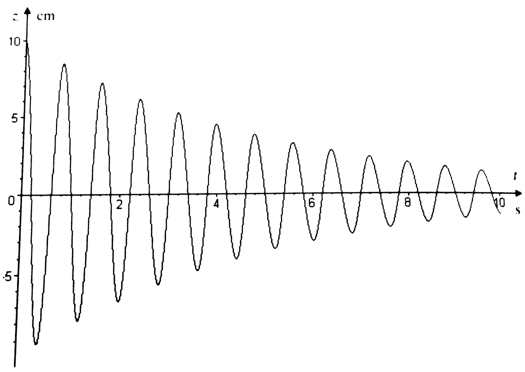
Exercice de cours

Un cylindre de masse m=200 g, de rayon a, de hauteur b est suspendu à un point fixe par un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide l_0. On supposera que le cylindre est totalement immergé dans de l'eau de masse volumique ρ. L'eau exerce sur le cylindre une force de frottement visqueuse de type $-h\overrightarrow{v}$.

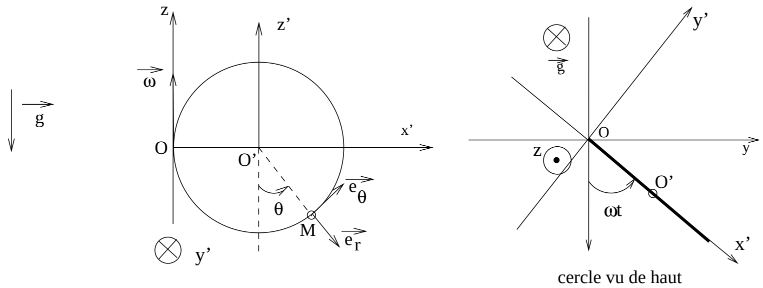


1. Déterminer la longueur à l'équilibre du ressort l_{eq}.
2. On pose $z = l - l_{eq}$ l'élongation du ressort par rapport à sa position d'équilibre. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par z sous la forme "canonique" :
$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$
en explicitant les grandeurs ω_0 et Q.
3. L'enregistrement des positions $z(t)$ de la masse au cours du temps est représenté ci-dessous. Comment nomme-t-on le régime observé ?
4. Résoudre l'équation différentielle pour ce régime.
5. Déterminer graphiquement la pseudo-période et le temps caractéristique d'amortissement.

Problème n°1

Une circonférence $\mathcal{C}$ de centre O' et de rayon a, située dans un plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz , d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}$.

Un anneau M de masse m, assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait O'M avec la verticale ascendante passant par O', θ étant compté positivement dans le sens indiqué sur les schémas.



A. Etude du mouvement de M sur $\mathcal{C}$ par plusieurs méthodes

1) Utilisation de la relation fondamentale de la dynamique

1. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (O, x', y', z') lié au cercle et en rotation dans le repère galiléen $\mathcal{R}$ (O, x, y, z). On représentera $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{ie}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{i\mathrm{C}}$ les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, et $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ la réaction de $\mathcal{C}$ sur M. On réfléchira à la position de H projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation du cercle.

2. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{ie}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_{x'}}$ et exprimer sa norme en fonction de θ, m, a et ω (norme du vecteur rotation autour de Oz).
3. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{i\mathrm{C}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_{y'}}$ et exprimer sa norme en fonction de θ, m, ω et v (norme de la vitesse de M dans le référentiel $\mathcal{R}'$).
4. Projeter la relation obtenue en 1. sur le vecteur $\overrightarrow{e}_\theta$ de la base locale des coordonnées polaires planes dans le plan $(x'\mathrm{O}'z')$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ. Montrer que la relation obtenue peut se mettre sous la forme $a\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = f(\theta)$ où $f(\theta)$ est à déterminer.

2) Utilisation du moment cinétique

1. Définir le moment cinétique en O' du point M dans son mouvement dans $\mathcal{R}'$. Montrer qu'il est colinéaire à $\overrightarrow{e}_{y'}$ et exprimer sa norme en fonction de a, m et $\dot{\theta}$.
2. Démontrer le théorème du moment cinétique utilisé dans un référentiel non galiléen.
3. L'appliquer pour retrouver l'équation différentielle du mouvement.

3) Utilisation de l'énergie mécanique

1. Calculer la fonction énergie potentielle U_1 dont dérive la force d'inertie d'entraînement. Exprimer U_1 en fonction de x', abscisse de M sur l'axe $(\mathrm{O}'x')$ puis en fonction de θ. Déterminer complètement $\mathrm{U}_1(\theta)$ en prenant $\mathrm{U}_1(0) = 0$.
2. Calculer la fonction énergie potentielle U_2 dont dérive le poids. Exprimer U_2 en fonction de z', abscisse de M sur l'axe vertical ascendant $(\mathrm{O}'z')$ puis en fonction de θ. Déterminer complètement $\mathrm{U}_2(\theta)$ en prenant $\mathrm{U}_2(0) = 0$ (on négligera la variation de l'accélération de la pesanteur g avec l'altitude).
3. Montrer que les énergies potentielles dont dérivent la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ et la force de Coriolis $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{i\mathrm{C}}$ sont des constantes que l'on fixera à 0 dans la suite du problème.
4. Ecrire en la justifiant la conservation de l'énergie et retrouver l'équation différentielle du mouvement.

B. Etude de l'équilibre relatif de M sur $\mathcal{C}$

1. Montrer que l'équation en θ dont les solutions donnent les positions d'équilibre est :

$$a\omega^2(1+\sin\theta) = g\tan\theta$$

2. En examinant les directions et les sens des trois forces mises en jeu dans cet équilibre, déterminer quels sont les intervalles possibles pour les valeurs de l'angle θ correspondant aux positions d'équilibre possibles parmi les 4 suivants : $[0,\pi/2]$, $[\pi/2,\pi]$, $[\pi,3\pi/2]$ et $[3\pi/2,2\pi]$.
3. Retrouver les résultats du 2 en en utilisant l'équation du 1. Pour celà, représenter graphiquement l'allure de deux fonctions de θ choisies de manière à ce que l'intersection de leurs graphiques corresponde aux valeurs cherchées (il n'est pas demandé une valeur précise des angles correspondant aux positions d'équilibre mais seulement les intervalles dans lesquels ils se situent).
4. On désire que l'équilibre stable corresponde à $\theta = \theta_0 = 30°$
   — a) Quelle doit être la valeur de la vitesse angulaire ω sachant que $a = 0,2m$ et $g = 10\ m.s^{-2}$?
   — b) Montrer au voisinage de l'équilibre que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$a\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0) = 0$$

   — c) Calculer la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}$ en $\theta = 30°$. En déduire, d'après son signe, la forme de la solution de cette équation et déterminer si le point M revient ou non à sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté, c'est-à-dire si l'équilibre est stable ou non.

Problème n°2

On utilisera les données suivantes :

- Constante de la gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$
- Période orbitale de révolution terrestre (année solaire) T_A = 365,26 jours solaires de 86400 s
- Rayon moyen de l'orbite terrestre : $R = 1,50.10^{11} m$
- Masse de la Terre : $M_T = 5,98.10^{24} kg$
- Rayon du Soleil : $a_S = 7,1.10^8 m$
- Soit une ellipse d'excentricité e, de paramètre p, de demi-grand axe a, de demi-petit axe b et d'aire A.
  $a = \dfrac{p}{1-e^2}$, $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ et $A = \pi ab$

Le Soleil est considéré comme un astre dont la répartition de masse est à symétrie sphérique, de centre S et de masse M_S, très supérieure à celle M_T de la Terre. Le référentiel de Képler (R_K) = (S XYZ) centré en S et dont les axes SX,SY et SZ gardent des directions fixes est considéré comme galiléen. Sauf indication contraire, la Terre sera considérée comme à symétrie sphérique de centre T et on suppose qu'elle ne subit que l'action du Soleil.

On considère dans un premier temps (parties A et B) que l'orbite terrestre est circulaire de centre S et de rayon R.

Partie A

1. Dans ces conditions, en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à la Terre, établir simplement la relation existant entre la vitesse angulaire de révolution ω de la Terre sur son orbite, la constante de gravitation universelle G, R et M_S.

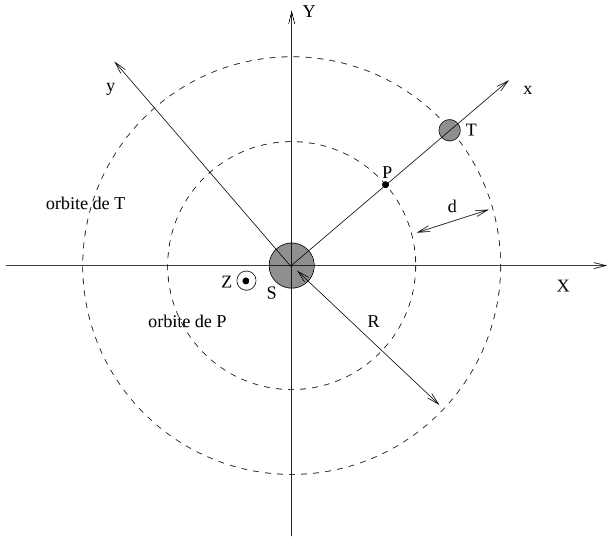
2. Donner alors l'expression de la durée de l'année T_A en fonction de G,R et M_S et en déduire la valeur numérique de M_S.

Partie B

Tous les 11 ans en moyenne, le Soleil connaît de brutales éruptions qui éjectent violemment de grande quantités de particules chargées. Quand ce "vent solaire" atteint la Terre, cela nuit aux télécommunications hertziennes. Il est donc nécessaire de disposer de satellites de surveillance du Soleil, placés constamment entre le Soleil et la Terre.

On travaillera dans le référentiel (R') = (SxyZ) tournant autour de (SZ) par rapport au référentiel de Képler en suivant le mouvement de la Terre, toujours supposé circulaire de rayon R, tel que T soit constamment sur la droite (Sx).

Soit P un tel satellite, assimilable à un point matériel de masse m. P doit tourner autour de S sur une orbite circulaire, de façon que S, P et T soient constamment alignés. P est donc supposé en équilibre dans le référentiel (R'), en un point de l'axe (Sx), à une distance d de T.



1. Le référentiel (R') est-il galiléen ? Effectuer le bilan des trois forces s'exerçant dans ce référentiel sur P, qui y sera supposé à l'équilibre. Ces forces seront exprimées dans la base (S, x, y) liée à (R') en fonction de G, m, ω, $\mathrm{M_S}$, $\mathrm{M_T}$, R et d.
2. Ecrire alors la condition d'équilibre de P relativement à (R'). En déduire une relation entre $\mathrm{M_S}$, $\mathrm{M_T}$, R et d (on utilisera la relation établie en A.1).
3. On cherche à résoudre cette équation en d : pour celà, on utilisera le fait que $d \ll \mathrm{R}$, on effectuera un développement limité en posant $\varepsilon = \dfrac{d}{\mathrm{R}}$ On justifiera a posteriori la validité du développement limité.
4. Calculer numériquement cette valeur de d à l'équilibre.

Partie C

En réalité, l'orbite de la Terre n'est pas rigoureusement circulaire.

1. Justifier que l'orbite terrestre (trajectoire de son centre T dans le référentiel de Képler) est cependant plane ; on supposera dans la suite que ce plan, appelé écliptique, est confondu avec le plan (S XY).
   La conséquence principale de la non-circularité de l'orbite terrestre est l'inégalité des durées des saisons. Il se trouve que les dates des solstices d'hiver (de l'hémisphère nord) et d'été coïncident respectivement avec le passage de la Terre au périhélie H (point de l'orbite le plus proche du Soleil) et à l'aphélie E (point de l'orbite le plus éloigné du Soleil) de son orbite : H est supposé être sur l'axe (SX) de (RK). Les positions des équinoxes de printemps P et d'automne A coïncident aux passages de la Terre sur 1a droite (SY) perpendiculaire à la direction (SX) = (SH). La durée de l'hiver $\mathrm{T_H}$ *= 89,4 jours solaires moyens de 86 400 s, celle du printemps est* $\mathrm{T_P}$ *= 93,2 jours solaires.*
2. Enoncer sans démonstration la nature géométrique de l'orbite terrestre (ou première loi de Képler dans le cas présent). Représenter cette orbite sur un schéma où figureront aussi S, H, P, E et A, et les axes (SX) et (SY). Pour plus de clarté, on ne craindra pas d'en exagérer l'excentricité.
3. Enoncer et justifier la loi des aires (ou deuxième loi de Képler dans le cas présent).
4. Soit e l'excentricité de l'orbite terrestre. Comme $e \ll 1$, on peut montrer que l'aire du secteur SHP de l'ellipse est $\mathrm{A_H} = \dfrac{ab}{4}(\pi - 4e)$, a et b représentant respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse trajectoire.
   Etablir alors la relation entre la durée de l'hiver $\mathrm{T_H}$, la durée $\mathrm{T_A}$ de l'année et e.
5. En déduire la valeur numérique de l'excentricité e de l'orbite terrestre.
6. Donc, durant la "belle saison" (printemps et été) de l'hémisphère nord, la Terre est en moyenne plus éloignée du Soleil que durant la "mauvaise saison". A ce propos, quelle caractéristique du mouvement de la Terre permet d'interpréter le phénomène des saisons ? On illustrera la réponse par un schéma clair. Interpréter le fait que les saisons sont plus contrastées dans l'hémisphère sud que dans l'hémisphère nord.