I. Satellites de télécommunication (inspiré du sujet de concours Mines-Ponts MP 2007)

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de masse M_T, de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.

Données physiques :
Constante de gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
Rayon de la Terre : $R_T = 6400$ km
Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg
Masse du satellite : $M_S = 2.10^3$ kg

I.1. Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O, à une altitude h de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). Établir (à partir du principe fondamental de la dynamique par exemple) l'expression de la vitesse $v = \left\|\vec{v}\right\|$ du satellite en fonction de h. En déduire la relation entre la période de révolution T du satellite et h.

I.2. Soient Ec et Ep l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du satellite dans le champ de gravitation de la Terre ; donner leurs expressions en fonction des données de l'énoncé et montrer : 2Ec + Ep = 0.

I.3. La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\vec{f_a}$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{f_a} = -\alpha M_S v\vec{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α. A partir d'un théorème énergétique et en supposant que la relation établie au **I.2.** reste applicable en présence de $\vec{f_a}$, établir l'équation différentielle vérifiée par h.

I.4. Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800km subit une diminution d'altitude d'environ 1m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat !). Calculer ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite en résolvant l'équation différentielle. Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

II. Dynamique de molécules diatomiques (ATS, 2003)

Dans ce problème, on s'intéresse aux mouvements d'une molécule diatomique, notée A_1A_2. On étudiera le cas où cette molécule est isolée.
Une molécule diatomique peut être assimilée à un système mécanique constitué de deux points matériels A_1 et A_2 de masses respectives m_1 et m_2 situées dans un référentiel ***R*** galiléen aux positions définies par les vecteurs $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$ (cf. figure 1).
Les quantités de mouvement de A_1 et A_2 sont notées respectivement $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$. Ces deux points matériels sont soumis à des forces d'interaction dérivant d'une énergie potentielle V(r), où r est la norme de $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$: la force $\vec{F_1}$ créée par A_2 et s'exerçant sur A_1 s'écrit donc $\vec{F_1} = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r}$ où $\vec{u_r}$ est le vecteur unitaire porté par la droite (A_1A_2) et dirigé de A_2 vers A_1 (de sorte que l'on peut écrire : $\vec{r} = r\vec{u_r}$. Les deux points matériels A_1 et A_2 sont uniquement soumis aux forces d'interaction dérivant de l'énergie potentielle V(r).

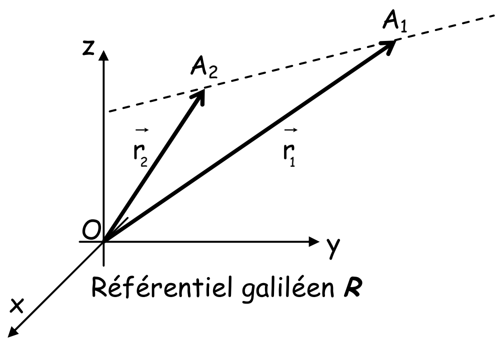


figure 1

II.1. Point matériel fictif A

II.1.1. Donner la définition et un exemple de référentiel approximativement galiléen.
II.1.2. Donner l'expression de la force $\vec{F_2}$ créée par A_1 et s'exerçant sur A_2.
II.1.3. Déterminer l'expression de $\vec{r_G}$, position du centre de masse G du système, en fonction de $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$ dans le référentiel ***R***.
II.1.4. Déterminer l'expression de la quantité de mouvement $\vec{p_G}$ de G affecté de la masse $m = m_1 + m_2$ en fonction de $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$. Que peut-on dire de $\vec{p_G}$? Conclure sur le mouvement de G dans ***R***.
II.1.5. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{GA_1}$ et $\overrightarrow{GA_2}$, en fonction de $\vec{r}$.
II.1.6. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique aux points matériels A_1 et A_2 dans ***R*** et en combinant ces deux relations, montrer que $\vec{r}$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r} \text{ avec } \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

On définit un point matériel fictif A de position $\overrightarrow{GA} = \vec{r}$ et de masse μ. Les trajectoires de A_1 et A_2 autour de G se déduisent de celle de A à partir des résultats établis à la question II.1.5. On admettra donc que le mouvement de A_1 et A_2 dans le référentiel du centre de masse ***R_G*** se déduit de celui du point matériel A soumis à la force $\vec{F_1}$.
II.1.7. Montrer que dans le référentiel ***R_G*** du centre de masse, le moment cinétique par rapport à G du système des deux points matériels A_1 et A_2 est égal au moment cinétique par rapport à G du point matériel fictif A.
II.1.8. Montrer que dans le référentiel ***R_G***, l'énergie cinétique du système des deux points matériels A_1 et A_2 est égale à l'énergie cinétique du point matériel fictif A.

Dans les parties II.2. et II.3., on se placera dans le référentiel $\boldsymbol{R_G}$ du centre de masse G.

II.2. Approximation de l'énergie potentielle d'interaction V(r)

L'énergie potentielle V(r) est représentée graphiquement sur la figure 2.
On étudie uniquement les mouvements du système lorsque r reste proche de r_e, valeur pour laquelle V(r) est minimum et est égale à $-V_0$.

II.2.1. Quel est l'état du système lorsque $r = r_e$?

Pour x proche de x_0, on peut écrire : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0}$ (développement limité de f(x) autour de x_0, au second ordre).

II.2.2. A partir d'un développement limité au second ordre de V(r) autour du point (r_e, $-V_0$), montrer que l'on peut écrire, pour r proche de r_e : $V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}k(r - r_e)^2$, avec $k = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_e}$.

Quel est le signe de k ? Quelle est son unité ?

II.2.3. A partir de l'expression précédente de V(r), déterminer l'expression de la force $\vec{F_1}$ à laquelle est soumis le point A en fonction de k, r, r_e et $\vec{u_r}$. On vérifiera que $\vec{F_1}$ est dirigée selon $\vec{u_r}$ lorsque $r < r_e$ et selon $-\vec{u_r}$ lorsque $r > r_e$.

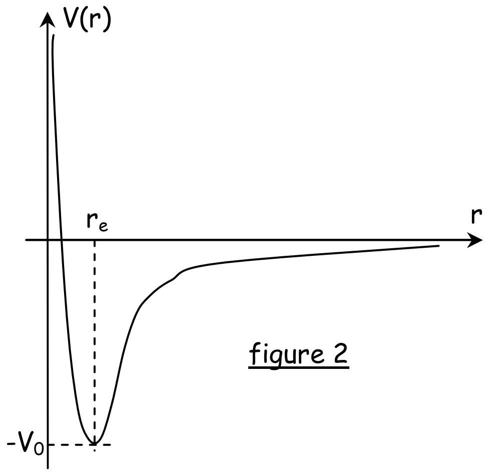


figure 2

Pour la suite du problème, on conservera pour V(r) l'expression obtenue à la question II.2.2. en supposant que r reste toujours proche de r_e.

II.3. Vibration et rotation de la molécule A_1A_2

II.3.1. Quelles propriétés vérifient l'énergie mécanique E_m et le moment cinétique $\overrightarrow{L_{G/R_G}}(A)$ (noté $\vec{L}$) par rapport à G du point matériel fictif A dans le référentiel $\boldsymbol{R_G}$? En déduire que la trajectoire de A est plane.
On notera $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ les vecteurs unitaires usuels des coordonnées polaires (r,θ) de A dans le plan de sa trajectoire dans le référentiel $\boldsymbol{R_G}$. On notera $\vec{u_z}$ le vecteur $\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta}$.

II.3.2. Exprimer le vecteur vitesse $\frac{d\vec{r}}{dt}$ du point A en fonction de $\dot{r}, \dot{\theta}$ et des vecteurs $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$.

II.3.3. Exprimer $\vec{L}$ en fonction de r, $\dot{\theta}$, μ et du vecteur $\vec{u_z}$.

II.3.4. Exprimer E_m en fonction de r, r_e, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, μ, k et V_0, puis en fonction r, r_e, $\dot{r}$, μ, k, V_0, et $L = \|\vec{L}\|$.

III.3.5. Montrer que lorsque L = 0, la trajectoire de A est rectiligne et que l'on peut assimiler le système mécanique à un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation ω_0 (appelée aussi pulsation de vibration de la molécule) en fonction de k et μ. Déterminer l'expression de la trajectoire $\vec{r}(t)$ du point A avec les conditions initiales suivantes : $\vec{r}(0) = C\vec{u_r}$ et $\frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{0}$.

II.3.6. On suppose $L \neq 0$. Montrer que si le mouvement du point A est uniforme alors ce mouvement est un cercle centré sur G dont on calculera le rayon, R, en fonction de r_e, ω_0 et Ω, vitesse angulaire de A autour de G (aussi appelée pulsation de rotation de la molécule). Pour cela, on pourra utiliser le principe fondamental de la dynamique appliqué à A dans $\boldsymbol{R_G}$.

II.3.7. Applications numériques. On considère la molécule A_1A_2 caractérisée par : $r_e = 10^{-10}$ m, k = 1000 USI et $\mu = 10^{-26}$ kg.
II.3.7.1. Calculer la valeur de ω_0.
II.3.7.2. Calculer la valeur de Ω dans le cas où $L = 10^{-33}$J.s et en supposant R proche de r_e.
II.3.7.3. A quel(s) domaine(s) du spectre électromagnétique appartiennent ω_0 et Ω ?

III. Mécanique en référentiel non galiléen (CCP TSI 2007)

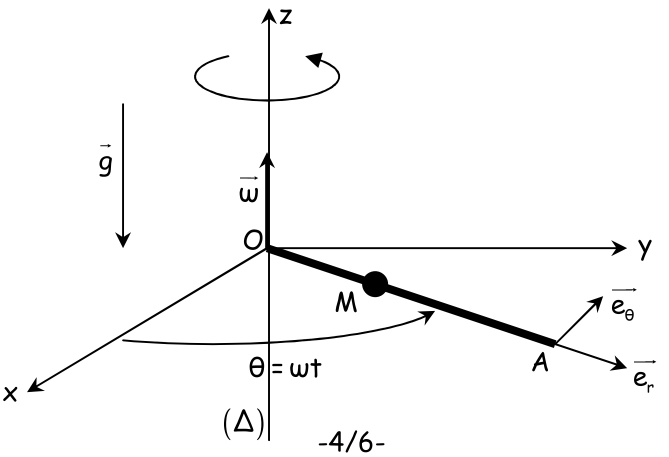
Au cours de ce problème, nous envisagerons deux situations différentes d'un petit anneau M de masse m, considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottements le long d'une tige OA, de longueur L, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical (Δ) passant par son extrémité O.
Le référentiel lié au laboratoire sera considéré comme galiléen.

L'espace est rapporté au repère cartésien $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ lié au laboratoire et tel que :
$\overrightarrow{e_x}$: vecteur unitaire de l'axe horizontal Ox.
$\overrightarrow{e_y}$: vecteur unitaire de l'axe horizontal Oy.
$\overrightarrow{e_z}$: vecteur unitaire de l'axe vertical Oz.
On pourra lors des calculs vectoriels utiliser les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_T}$ définis de la manière suivante :
$\overrightarrow{e_r}$: vecteur unitaire du plan (Oxy) dirigé suivant la projection de la tige dans le plan (Oxy) et orienté dans le sens $\overrightarrow{OA}$ de la tige.
$\overrightarrow{e_\theta}$: vecteur unitaire du plan (Oxy), perpendiculaire au vecteur vecteur $\overrightarrow{e_r}$ et tel que le repère $\left(O,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}\right)$ soit un repère direct.
$\overrightarrow{e_T}$: vecteur unitaire de la tige et orienté de O vers A.

III.1. Première partie : la tige OA est dans le plan horizontal

La tige OA se trouve dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe vertical (Δ) à la vitesse angulaire constante ω. L'axe (Δ) est ainsi confondu avec l'axe Oz.
Dans ce cas on a donc : $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_T}$.
L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < L$).
On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M (r = OM).
La réaction de la tige sur l'anneau est de la forme : $\vec{R} = R_\theta \overrightarrow{e_\theta} + R_z \overrightarrow{e_z}$

Figure 3



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

III.1.1. Faire un schéma sur lequel apparaissent les forces auxquelles est soumis l'anneau.
Ecrire l'expression vectorielle de ces forces en fonction des vecteurs unitaires définis précédemment.

III.1.2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par r(t).

III.1.3. Résoudre cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution r(t) en fonction de r_0, ω et t.

III.1.4. En déduire l'expression du temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, L et ω.

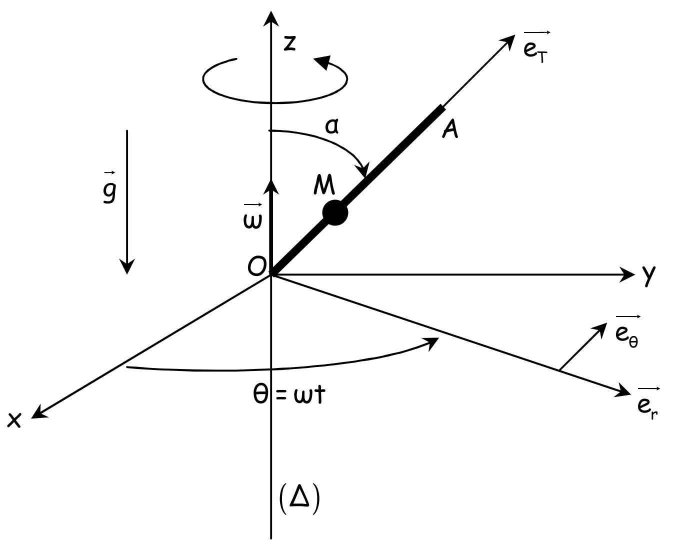
III.1.5. Déterminer l'expression de la vitesse $\overrightarrow{v_f}$, calculée dans le référentiel lié à la tige, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω, r_0, L et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

III.1.6. En déduire l'expression de la vitesse $\overrightarrow{v'_f}$, calculée dans le référentiel lié au laboratoire, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω, r_0, L et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

<u>III.2. Deuxième partie : la tige fait un angle α quelconque avec l'axe (Δ)</u>

La tige OA fait maintenant un angle α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$rad) avec l'axe (Δ). La tige tourne autour de (Δ) avec la vitesse angulaire constante ω.
On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M (r = OM).
La réaction de la tige sur l'anneau est perpendiculaire à la direction définie par $\overrightarrow{e_T}$.
L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < L$).

Figure 4



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

III.2.1. Faire un schéma sur lequel apparaissent les forces auxquelles est soumis l'anneau.
Ecrire l'expression vectorielle de ces forces (excepté celle de la réaction de la tige sur l'anneau) en fonction des vecteurs unitaires définis précédemment.

III.2.2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par r(t).

III.2.3. Résoudre cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution r(t) en fonction de r_0, α , g, ω et t.

III.2.4. Déterminer la position d'équilibre $r_{éq}$ de l'anneau sur la tige. Exprimer $r_{éq}$ en fonction de ω , α et g.
Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur la tige OA que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur seuil ω_0 que l'on déterminera. Exprimer ω_0 en fonction de α , g et l.

III.2.5. On se place dans le cas où $\omega > \omega_0$, l'anneau étant dans sa position d'équilibre. On écarte légèrement l'anneau de cette position d'équilibre.
Déterminer, en la justifiant, l'orientation de la résultante des forces appliquées à l'anneau. En déduire si l'équilibre est stable ou instable.