Sujet réalisé d'après ESIM PC 1999

1. L'expression définissant $f(x,y)$ a un sens si et seulement si $y^2 \neq 1$, $1+xy \neq 0$ et $\dfrac{x+y}{1+xy} > 0$, ce qui équivaut à :

$$\big(1-y^2 > 0 \quad \text{ou} \quad y^2-1>0\big) \quad \text{et} \quad (x+y)(1+xy) > 0.$$

Les applications $\alpha_1 : (x,y) \mapsto 1-y^2$, $\alpha_2 = -\alpha_1$ et $\alpha_3 : (x,y) \mapsto (x+y)(1+xy)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales. Les ensembles $U_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha_i(x,y) > 0\}$, pour $i \in [\![1,3]\!]$, sont donc des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Or, ce qui précède montre que

$$D = (U_1 \cup U_2) \cap U_3.$$

La notion de partie ouverte est stable par union quelconque et intersection finie, donc D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{1-y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. La fonction $(x,y) \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D pour la même raison, et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition et produit, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

3. On a, pour tout $(x,y) \in D$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{1+xy-(x+y)y}{(1+xy)^2}\right)\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^{-1} = \frac{1}{(x+y)(1+xy)},$$

et

$$(1-y^2)f(x,y) = \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right),$$

donc en dérivant par rapport à y,

$$(1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2yf(x,y) = \left(\frac{1+xy-(x+y)x}{(1+xy)^2}\right)\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^{-1} = \frac{1-x^2}{(x+y)(1+xy)}.$$

On en déduit que pour tout $(x,y) \in D$,

$$(1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2yf(x,y),$$

c'est-à-dire que f est solution de (E) sur D.

4. Si $x > 0$ et $y \in]0,1[$, alors $(x,y) \in D$ car $1-y^2 > 0$ et $(x+y)(1+xy) > 0$. De plus, $1/x > 0$ donc de la même façon, $(1/x,y) \in D$. Enfin

$$f\left(\frac{1}{x},y\right) = \frac{1}{1-y^2}\ln\left(\frac{1/x+y}{1+y/x}\right) = \frac{1}{1-y^2}\ln\left(\frac{1+xy}{x+y}\right) = -\frac{1}{1-y^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = -f(x,y).$$

5. Soit $y \in]0,1[$ fixé. Alors la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x+y}{1+xy}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(x) = \frac{1+xy-(x+y)y}{(1+xy)^2} = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} > 0.$$

Donc g est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g(0) = y$ et $g(x) \to 1/y$ lorsque $x \to +\infty$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 < y \leq \frac{x+y}{1+xy} \leq \frac{1}{y}.$$

La fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc finalement, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times]0,1[$,

$$\ln(y) \leq \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \leq -\ln(y),$$

ce qui est le résultat souhaité car $-\ln(y) = |\ln(y)|$ pour $y \in]0,1[$.

6. Pour tout $y \in]0,1[$, $(0,y) \in D$ et

$$f(0,y) = \frac{\ln(y)}{1-y^2}.$$

La fonction $y \mapsto f(0,y)$ est continue sur $]0,1[$ (elle y est même de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question **2**). On a

$$f(0,y) \underset{y\to 0^+}{\sim} \ln(y) < 0.$$

L'intégrale $\int_0^1 \ln(y)\,dy$ est une intégrale de référence convergente, donc par comparaison de fonctions négatives, $y \mapsto f(0,y)$ est intégrable sur $]0,1/2[$ par exemple. De plus,

$$\frac{\ln(y)}{1-y^2} \underset{y\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(y)}{2(1-y)} \underset{y\to 1^-}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\ln'(1) = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit que $y \mapsto f(0,y)$ est prolongeable en une fonction continue sur $]0,1]$, et finalement, elle est intégrable sur $]0,1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y \mapsto f(x,y)$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1[$ car $\mathbb{R}_+ \times]0,1[\subset D$. Alors, d'après l'inégalité de la question précédente (divisée par $1-y^2 > 0$) et par comparaison de fonctions positives, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $]0,1[$.

7. a. On applique le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres. D'après les questions **5** et **6**, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y \mapsto f(x,y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$ et on a l'hypothèse de domination car le majorant $\frac{|\ln(y)|}{1-y^2}$ ne dépend pas de x. Pour tout $y \in]0,1[$, $x \mapsto f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (elle y est même de classe $\mathcal{C}^1$ d'après **2**). D'après le théorème cité ci-dessus, F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après la question **4**,

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{]0,1[} f\left(\frac{1}{x},y\right)\,dy = -\int_{]0,1[} f\left(x,y\right)\,dy = -F(x).$$

En particulier, $F(1) = -F(1)$, et donc $F(1) = 0$.

c. D'après les deux questions précédentes, $F(1/x) \to F(0)$ lorsque $x \to +\infty$, et donc $F(x) \to -F(0)$ lorsque $x \to +\infty$.

8. a.

9. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $y \mapsto y^{2n}\ln(y)$ est continue sur $]0,1]$. Soit $a \in]0,1]$; les fonctions $y \mapsto y^{2n+1}/(2n+1)$ et $y \mapsto \ln(y)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,1]$, donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^1 y^{2n}\ln(y)\,dy &= \left[\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\ln(y)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{y^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{y}\,dy \\ &= -\frac{a^{2n+1}}{2n+1}\ln(a) - \left[\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_a^1 \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

car $a^{2n+1}\ln(a) \to 0$ lorsque $a \to 0^+$ par croissances comparées. On en déduit que l'intégrale $\int_{]0,1[} y^{2n}\ln(y)\,dy$ converge et que

$$\int_{]0,1[} y^{2n}\ln(y)\,dy = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

b. Pour tout $y \in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{1-y^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n}$$

(série géométrique de raison y^2 avec $|y^2| < 1$).

On a donc

$$F(0) = \int_{]0,1[} \frac{\ln(y)}{1-y^2}\,dy = \int_{]0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n}\ln(y)\,dy.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in]0,1[$, $f_n(y) = y^{2n}\ln(y)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$ d'après la question précédente (elle est de signe constant sur $]0,1[$). D'après le début de cette question, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $y \mapsto \frac{\ln(y)}{1-y^2}$, qui est continue (et en particulier continue par morceaux) sur $]0,1[$. Enfin, la série

$$\sum_{n\geq 0}\int_{]0,1[} |f_n(y)|\,dy = \sum_{n\geq 0}\int_{]0,1[} (-f_n(y))\,dy = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

est convergente par comparaison de séries à termes positifs : son terme général est équivalent à $1/(4n^2)$, et la série $\sum_{n\geq 1} 1/(4n^2)$ est (à un facteur près), une série de Riemann d'exposant $2 > 1$ donc convergente.

D'après le théorème d'intégration terme à terme pour les intégrales généralisées, on en déduit que l'intégrale définissant $F(0)$ est absolument convergente (ce que l'on savait déjà d'après la question **6**), avec

$$F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} f_n(y)\,dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

d'après la question **8.b**.

10. **a.** On va appliquer le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètres. D'après la question **6**, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $y \mapsto f(x,y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$. Pour tout $y \in]0,1[$, $x \mapsto f(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ d'après **2** et pour tout $x > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x+y)(1+xy)}$$

d'après la question **3**. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). Fixons $a \in]0,+\infty[$. Pour tout $(x,y) \in [a,+\infty[\times]0,1[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{1}{a+y}.$$

Le majorant définit une fonction continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $]0,1[$. Par comparaison de fonctions positives, pour $x \in [a,+\infty[$, $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est intégrable sur $]0,1[$ et on a l'hypothèse de domination car le majorant précédent ne dépend pas de $x \geq a$.

D'après le théorème cité ci-dessus, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \int_{]0,1[} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy = \int_{]0,1[} \frac{1}{(x+y)(1+xy)}\,dy.$$

b. Fixons $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Décomposons la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(x+Y)(1+xY)}$$

en éléments simples ; les pôles (racines du dénominateur) de cette fraction sont $-x$ et $-1/x$, ils sont distincts car $x^2 \neq 1$; il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{1}{(x+Y)(1+xY)} = \frac{a}{x+Y} + \frac{b}{1+xY}.$$

En multipliant cette égalité par $x+Y$ et en évaluant le résultat simplifié en $-x$, puis en la multipliant par $1+xY$ et en évaluant le résultat simplifié en $-1/x$, on obtient

$$a = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{x-1/x} = \frac{x}{x^2-1}.$$

On a donc notamment, pour tout $y \in]0,1[$,

$$\frac{1}{(x+y)(1+xy)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{x+y} - \frac{x}{1+xy}\right).$$

On en déduit que

$$F'(x) = \int_{]0,1[} \frac{1}{(x+y)(1+xy)}\,dy = \frac{1}{1-x^2}\left(\int_{]0,1[} \frac{dy}{x+y} - \int_{]0,1[} \frac{x}{1+xy}\,dy\right),$$

ces deux intégrales étant convergentes (intégrales sur $]0,1[$ de fonctions continues sur $[0,1]$). Finalement,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\left([\ln(x+y)]_0^1 - [\ln(1+xy)]_0^1\right) \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left(\ln(x+1) - \ln(x) - \ln(1+x)\right) = -\frac{\ln(x)}{1-x^2} = -f(0,x). \end{aligned}$$

c. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc en utilisant la question précédente, on a

$$F'(1) = \lim_{x\to 1^-} F'(x) = -\lim_{x\to 1^-} f(0,x) = \frac{1}{2}$$

d'après les calculs de la question **6**.

De plus, pour $t \in]0,1[$,

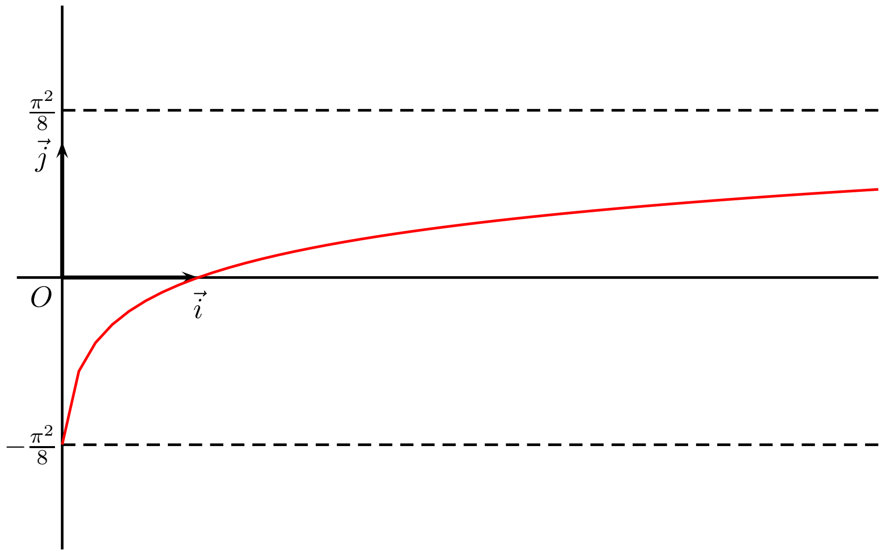
$$F'(t) = \frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction F est à valeurs réelles, continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$, donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in]0,x[$ tel que $F(x) - F(0) = F'(c_x)\,x$. Sachant que $c_x \to 0^+$ lorsque $x \to 0^+$, on en déduit que

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la courbe représentative de F possède une demi-tangente verticale (dirigée par $\vec{j}$) au point $(0,-\pi^2/8)$ d'abscisse 0.

11. L'allure de la courbe est basée sur les données suivantes établies dans cette partie : $F(0) = -\pi^2/8$, $F(1) = 0$, $F'(1) = 1/2$, $F(x) \to \pi^2/8$ lorsque $x \to +\infty$, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (d'après la question **10.b**), la courbe possède une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.



12. **a.** Soit M un point de $\mathcal{C}_1$ de coordonnées (a,b). Si le point M n'était pas un point régulier de $\mathcal{C}_1$, on aurait

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(a,b), \frac{\partial\phi}{\partial y}(a,b)\right) = (0,0).$$

avec $\phi(a,b) = 1$. L'équation (E) au point (a,b) donnerait donc $2b = 0$, ce qui est absurde car $(a,b) \in \Delta$. Le point M est donc régulier.

b. La tangente au point M de coordonnées (a,b) a pour équation

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(a,b)(y-b) = 0.$$

13. D'après (E), et sachant que $\phi(a,b) = 0$, on a

$$(1-a^2)\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,b) - (1-b^2)\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b) = 0$$

c'est-à-dire

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\operatorname{grad}\phi(a,b), u(a,b)) = 0.$$

On en déduit que $u(a,b)$ est colinéaire à $\operatorname{grad}\phi(a,b)$. De plus, si $a^2 \neq 1$ ou $b^2 \neq 1$, $u(a,b)$ est non nul. Dans ce cas, sachant que $\operatorname{grad}\phi(a,b)$ est normal à $\mathcal{C}_2$ au point régulier M, c'est aussi le cas de $u(a,b)$.

14. Pour $(x,y) \in D$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{1+xy} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad xy - x - y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)(y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } y = 1. \end{aligned}$$

Or, pour $y \in \mathbb{R}$, $(1,y)$ appartient à D (c'est-à-dire vérifie la condition de la question **1**) si et seulement si $y^2 \neq 1$ (dans ce cas, pour un tel couple, on a $(x+y)(1+xy) = (1+y)^2 > 0$). Pour $x \in \mathbb{R}$, $(x,1)$ n'appartient pas à D (pour un tel couple, on a $y^2 = 1$).

En conclusion, la courbe d'équation $f(x,y) = 0$ est donc la droite d'équation $x = 1$ privée des deux points de coordonnées $(1,1)$ et $(1,-1)$.

15. Une fonction ϕ définie sur Δ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne dépend pas de sa première variable si et seulement si il existe une fonction $\varphi :]-1,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(x,y) \in \Delta$, $\phi(x,y) = \varphi(y)$. Dans ce cas, la fonction ϕ est solution de (E) sur Δ si et seulement si pour tout $y \in]-1,1[$,

$$2y\varphi(y) - (1-y^2)\varphi'(y) = 0, \quad i.e. \quad \varphi'(y) = \frac{2y}{1-y^2}\varphi(y).$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 sans second membre, à coefficient continu. La fonction $y \mapsto -\ln(1-y^2)$ est une primitive sur $]-1,1[$ de $y \mapsto \frac{2y}{1-y^2}$, donc la solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit

$$y \mapsto k \exp\left(-\ln(1-y^2)\right) = \frac{k}{1-y^2} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sur $]-1,1[$ qui ne dépendent pas de leur première variable sont donc les fonctions de la forme

$$(x,y) \mapsto \frac{k}{1-y^2} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

16. **a.** Les racines du polynômes $X^2 - (u+v)X + uv = (X-u)(X-v)$ sont u et v (racines distinctes car $(u,v) \in \Omega$).

b. La fonction ψ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$. Si $(u,v) \in \Omega$, on a

$$(u+v)^2 - 4uv = (u-v)^2 > 0$$

donc ψ est à valeurs dans Ω'. Soit $(s,t) \in \Omega'$. D'après les liens coefficients/racines, si $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, la relation $\psi(u,v) = (s,t), i.e.\ u+v = s$ et $uv = t$, équivaut au fait que u et v soient les racines du polynôme $X^2 - sX + t$. Le discriminant de ce polynôme est $s^2 - 4t > 0$, donc il possède deux racines réelles distinctes u et v, et le couple (u,v) est unique si l'on impose la condition $v < u$. Ainsi ψ est une bijection de Ω sur Ω'.

c. Pour tout $(u,v) \in \Omega$,

$$J_\psi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{vmatrix} = u - v > 0.$$

La fonction ψ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω sur Ω' dont le jacobien ne s'annule pas sur Ω, donc d'après le théorème de caractérisation des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes (ou d'inversion globale), ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Ω'.

17. **a.** D'après la question précédente, ψ^{-1} est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω' à valeurs dans Ω. Par composition, $h = g\circ\psi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω', à valeurs réelles, et vérifie $g = h\circ\psi$, *i.e.*,

$$\forall\,(u,v)\in\Omega,\quad g(u,v) = h(u+v,uv).$$

b. D'après la règle de dérivation en chaîne, on a pour tout $(u,v)\in\Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial h}{\partial s}(u+v,uv)\times 1 + \frac{\partial h}{\partial t}(u+v,uv)\times v,\\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial h}{\partial s}(u+v,uv)\times 1 + \frac{\partial h}{\partial t}(u+v,uv)\times u.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $(u,v)\in\Omega$, les équivalences :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial h}{\partial t}(u+v,uv)\times v = \frac{\partial h}{\partial t}(u+v,uv)\times u \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial h}{\partial t}(u+v,uv) = 0,$$

car, si $(u,v)\in\Omega$, on a $u\neq v$. Sachant que $\psi : (u,v)\mapsto(u+v,uv)$ est une bijection de Ω sur Ω', on a l'équivalence de (i) et (ii).

18. **a.** Comme le rappelle l'énoncé, th est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-1,1[$. De plus, elle est strictement croissante (et de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\mathrm{th}' = 1-\mathrm{th}^2$). En particulier, si $(u,v)\in\Omega$, alors $(\mathrm{th}(u),\mathrm{th}(v))\in\Omega_1$, donc G est bien définie. Par composition et produit, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ; pour tout $(u,v)\in\Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) &= (1-\mathrm{th}^2(v))\frac{\partial H}{\partial x}(\mathrm{th}(u),\mathrm{th}(v))\times(1-\mathrm{th}^2(u))\\
\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) &= -2\,\mathrm{th}(v)(1-\mathrm{th}^2(v))\,H(\mathrm{th}(u),\mathrm{th}(v)) + \frac{\partial H}{\partial y}(\mathrm{th}(u),\mathrm{th}(v))\times(1-\mathrm{th}^2(v))^2.
\end{aligned}$$

b. La fonction H est solution de (E) sur Ω_1, donc pour tout $(u,v)\in\Omega$,

$$-2\,\mathrm{th}(v)\,H(\mathrm{th}(u),\mathrm{th}(v)) + (1-\mathrm{th}^2(v))\frac{\partial H}{\partial y}(\mathrm{th}(u),\mathrm{th}(v)) = (1-\mathrm{th}^2(u))\frac{\partial H}{\partial x}(\mathrm{th}(u),\mathrm{th}(v)).$$

En multipliant cette égalité par $1-\mathrm{th}^2(v)$ et en utilisant la question précédente, on obtient

$$\forall\,(u,v)\in\Omega,\quad \frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial G}{\partial v}(u,v).$$

D'après la question **17** appliquée avec $g = G$ et $h = G\circ\psi^{-1}$, on a :

$$\forall\,(s,t)\in\Omega',\quad \frac{\partial h}{\partial t}(s,t) = 0.$$

D'après l'indication de l'énoncé, il existe une fonction γ telle que pour tout $(s,t)\in\Omega'$, $h(s,t) = \gamma(s)$. Lorsque (s,t) parcourt Ω', s parcourt $\mathbb{R}$; h étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω', la fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $(u,v)\in\Omega$,

$$G(u,v) = h(\psi(u,v)) = h(u+v,uv) = \gamma(u+v),$$

donc

$$H(\mathrm{th}(u),\mathrm{th}(v)) = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(v)}\gamma(u+v).$$

Soit $(x,y)\in\Omega_1$ et $(u,v) = (\mathrm{argth}(x),\mathrm{argth}(y))$ (argth désigne la bijection réciproque de th) ; l'existence de (u,v) est garantie par les propriétés que rappelle l'énoncé en indication, et on a $v<u$ par croissance de th, donc $(u,v)\in\Omega$. On a alors $x = \mathrm{th}(u)$, $y = \mathrm{th}(v)$, donc d'après ce qui précède,

$$H(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\gamma(u+v).$$

En posant $\varphi = \gamma \circ \operatorname{argth}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par composition, on a finalement

$$H(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\,\varphi(\operatorname{th}(u+v)) = \frac{1}{1-y^2}\,\varphi\left(\frac{\operatorname{th}(u)+\operatorname{th}(v)}{1+\operatorname{th}(u)\operatorname{th}(v)}\right) = \frac{1}{1-y^2}\,\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

19. Soit $\varphi :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $(x,y) \in \Omega_1$, on a $1+xy > 0$ et en posant comme à la question précédente $(u,v) = (\operatorname{argth}(x),\operatorname{argth}(y))$, on a

$$\frac{x+y}{1+xy} = \operatorname{th}(u+v) \in]-1,1[.$$

De plus, la fonction $(x,y) \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω_1 en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, de même pour $(x,y) \mapsto \frac{1}{1-y^2}$. Par composition et produit, la fonction H définie sur Ω_1 par

$$H(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\,\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \tag{1}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω_1, et en menant le calcul comme à la question **3**, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{(1+xy)^2}\varphi'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \\ (1-y^2)\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) - 2yH(x,y) &= \frac{1-x^2}{(1+xy)^2}\varphi'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que H est solution de (E) sur Ω_1. La réciproque est vraie d'après la question précédente. Les solutions de (E) sur Ω_1 sont donc les fonctions H définies par (1), avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.