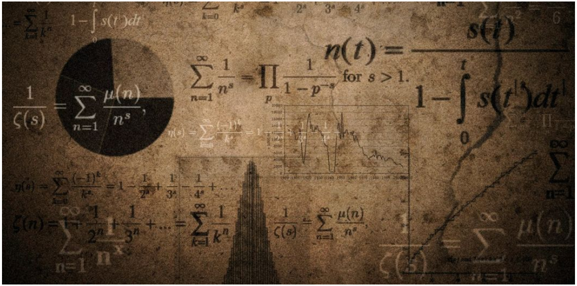
Exercice : Commutant d’une matrice

ET-TAHRI FOUAD

Ecole Royale de l’Air Marrakech
Koutoubia Prépas Marrakech
https://ettahrifouad1.wixsite.com/prepasmarrakech



April 13, 2020

Enoncé

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle commutant de A, noté $C(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A :

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \;\; AM = MA\}$$

1) Montrer que $C(A)$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Montrer que si A est diagonale d'éléments diagonaux deux à deux distincts, alors $C(A) = D_n(\mathbb{K})$ l'algébre des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Enoncé

3) Montrer que si A est diagonale par blocs telle que $A = diag(\lambda_1 I_{n_1}, ..., \lambda_r I_{n_r})$ où $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ et $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}^*$ alors $C(A) = \{diag(M_1, ..., M_r) \ \forall k \in [\![1, r]\!] \ M_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})\}$

4) On suppose que A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_r$ de multiplicité respitive $n_1, ..., n_r$

(a) Montrer que

$$\dim(C(A)) = \sum_{k=1}^{r} n_k^2 = \sum_{k=1}^{r} (\dim(E_{\lambda_k}(A))^2$$

(b) En déduire que $\dim(C(A)) \geq n$.

Correction de la question 1

Montrons que $C(A)$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $M, N \in C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

- Il est clair que $M + \lambda N \in C(A)$
- $I_n \in C(A)$
- $(MN)A = M(NA) = M(AN) = (MA)N = (AM)N = A(MN)$.

Donc $MN \in C(A)$.

Correction de la question 2

Montrons que $C(A) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

On pose $A = (a_{i,j}) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Alors $\forall i,j \in [\![1,n]\!], i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$ et $a_{i,i} = \lambda_i$

$$\begin{aligned}
B \in C(A) &\iff AB = BA \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (AB)_{i,j} = (BA)_{i,j} \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} b_{i,j} = b_{i,j} a_{j,j} \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i b_{i,j} = b_{i,j} \lambda_j \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (\lambda_i - \lambda_j) b_{i,j} = 0 \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \Longrightarrow b_{i,j} = 0 \\
&\iff B \text{ est diagonale}
\end{aligned}$$

Correction de la question 3

Soit $M \in C(A)$, comme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix}$$

On écrit M par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,r} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r,1} & M_{r,2} & \cdots & M_{r,r} \end{pmatrix}$$

où $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$

Correction de la question 3

Soit $i, j \in [\![1, r]\!]$ le blocs d'indice (i, j) de AM est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \lambda_i I_{n_i} & \cdots 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{1,j} \\ \vdots \\ M_{i,j} \\ \vdots \\ M_{r,j} \end{pmatrix} = \lambda_i I_{n_i} \times M_{i,j} = \lambda_i M_{i,j}$$

Le blocs d'indice (i, j) de MA est donnée par

$$\begin{pmatrix} M_{i,1} & \cdots & M_{i,j} & \cdots M_{i,r} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j I_{n_j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = M_{i,j} \times \lambda_j I_{n_j} = \lambda_j M_{i,j}$$

Correction de la question 3

Soit $i, j \in [\![1, r]\!]$ le bloc d'indice (i, j) de AM est donné par

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \lambda_i I_{n_i} & \cdots 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{1,j} \\ \vdots \\ M_{i,j} \\ \vdots \\ M_{r,j} \end{pmatrix} = \lambda_i I_{n_i} \times M_{i,j} = \lambda_i M_{i,j}$$

Le bloc d'indice (i, j) de MA est donné par

$$\begin{pmatrix} M_{i,1} & \cdots & M_{i,j} & \cdots M_{i,r} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j I_{n_j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = M_{i,j} \times \lambda_j I_{n_j} = \lambda_j M_{i,j}$$

Correction de la question 3

$$\begin{aligned}
M \in C(A) &\iff AM = MA \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,r]\!]\ AM \text{ et } MA \\
&\qquad \text{ont le meme bloc d'indice } (i,j) \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,r]\!]\ \lambda_i M_{i,j} = \lambda_j M_{i,j} \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,r]\!]\ (\lambda_i - \lambda_j) M_{i,j} = 0 \\
&\iff \forall i,j \in [\![1,r]\!]\ i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0 \\
&\iff M = diag(M_{1,1}, \cdots, M_{r,r})
\end{aligned}$$

Correction de la question 4 a)

Comme A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1 I_{n_1}, ..., \lambda_r I_{n_r})$
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{aligned} M \in C(A) &\iff AM = MA \\ &\iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \\ &\iff P^{-1}MP \in C(D) \end{aligned}$$

Ainsi $f : \begin{cases} C(A) \to C(D) \\ M \mapsto P^{-1}MP \end{cases}$ est bien défnie, et c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels
Donc $\dim(C(A)) = \dim(C(D))$

Correction de la question 4 a)

D'après la question 3,

$C(D) = \{diag(M_1, ..., M_r) \ \forall k \in [\![1, r]\!] \ M_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})\}$

Puisque l'application

$$g : \begin{cases} \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \times ... \times \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{K}) \to C(D) \\ (M_1, ..., M_r) \mapsto diag(M_1, ..., M_r) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \dim(C(A)) &= \dim(C(D)) \\ &= \dim(\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \times ... \times \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{K})) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \dim(\mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})) = \sum_{k=1}^{r} n_k^2 \end{aligned}$$

Correction de la question 4 b)

D'après la question 4 a),

$$\begin{aligned}\dim(C(A)) &= \sum_{k=1}^{r} n_k^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^{r} n_k \\ &= n\end{aligned}$$

Car $n_k = \dim(E_{\lambda_k}(A)) \geq 1$ et $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$.

Merci pour votre attention