PROBLÈME 2 :
DÉCOMPOSITIONS DE $M_2(\mathbb{C})$ EN SOMME DIRECTE DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS STABLES PAR LES ENDOMORPHISMES φ_M

Dans cet exercice, $M_2(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes ; la matrice identité de $M_2(\mathbb{C})$ est notée I_2
Si M et N sont deux matrices de $M_2(\mathbb{C})$, on pose $[M,N] = MN - NM$ et on noteφ_M l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$ défini par

$$\varphi_M(X) = [M,X] = MX - XM, \qquad X \in M_2(\mathbb{C})$$

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le but du problème est de déterminer toutes les décompositions de $M_2(\mathbb{C})$ en somme directe de deux sous-espaces vectoriels non nuls et stables par tous les endomorphismes φ_M .

$1^{\text{ère}}$ Partie : Construction de deux sous-espaces non nuls, supplémentaires dans $M_2(\mathbb{C})$ et stables par tous les endomorphismesφ_M

4.1. Calculer les matrice $[A,B]$, $[C,A]$ et $[C,B]$.

4.2. Montrer que la famille $(I_2 A, B, C)$ est une base de $M_2(\mathbb{C})$.

4.3. Soit $M = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in M_2(\mathbb{C})$; λ, α, β et γ étant des complexes.

4.3.1. Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ déterminer $\{N \in M_2(\mathbb{C}); \quad MN = NM\}$.

4.3.2. Si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ montrer que $\{NEM_2(\mathbb{C}); MN = NM\}$ est le sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$ engendré par la famille (I_2, M). Quelle est sa dimension ?

4.4. Dans la suite on note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$ engendré par la famille (A,B,C), et $\mathbb{C}.I_2$ celui engendré par la matrice I_2 : $\mathbb{C}.I_2 = \{\lambda I_2; \lambda \in \mathbb{C}\}$

4.4.1. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$

4.4.2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{F}$ et $\mathbb{C}.I_2$ sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{C})$.

4.4.3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{F}$ et $\mathbb{C}.I_2$ sont stables par φ_M, pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{C})$.

$2^{\text{ère}}$ Partie : $\mathcal{F}$ et $\mathbb{C}.I_2$ sont les seuls possibles

5.1. Calculer $\varphi_B(A)$ en fonction de C et $\varphi_B(C)$ en fonction de B.

5.2. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$ stable par φ_M, pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que $\mathcal{V}$ contient un élément $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$; λ, α, β et γ étant des complexes.

5.2.1. Si $\gamma \neq 0$

i. Calculer $\varphi_C \circ \varphi_A(X)$ et en déduire que $A \in \mathcal{V}$

ii. Justifier que B et C sont éléments de $\mathcal{V}$.

iii. En déduire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$.

5.2.2. Envisager les cas restants et montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$.

5.3. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux sous-espaces vectoriels non nuls et supplémentaires dans $M_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont stables par φ_M, pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{C})$.

5.3.1. On suppose qu'il existe$X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathcal{V}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$; λ, α, β et γ étant des complexes . Montrer que $\mathcal{V} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{W} = \mathbb{C}.I_2$.

5.3.2. Dans le cas contraire montrer que $\mathcal{W} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{V} = \mathbb{C}.I_2$.