^{o} 6 – Solution

(d'après e3a MP 2014)

1. On reconnaît une équation scalaire d'ordre 2, sans second membre, à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2+1=0$, dont les solutions sont i et $-i$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $z''+z=0$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto A\cos(x)+B\sin(x), \quad (A,B)\in\mathbb{K}^2 \ \ (\mathbb{K}=\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K}=\mathbb{C}).$$

2. On a

$$A\cos(x)+B\sin(x) \underset{x\to 0}{=} A(1+o(x))+B(x+o(x)) = A+Bx+o(x).$$

3. D'après la question précédente, si $A\neq 0$,

$$\frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{A}{\sqrt{x}}$$

qui n'a pas une limite finie en 0^+. Il est donc nécessaire que $A=0$. Réciproquement, si $A=0$,

$$\frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{=} B\sqrt{x}+o(\sqrt{x}) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc $A=0$, et dans ce cas, l'équivalent est $B\sqrt{x}$ si $B\neq 0$ (si $B=0$, la fonction est nulle).

4. On reconnaît une équation scalaire d'ordre 2, sans second membre, à coefficients continus, car sur $]0,+\infty[$, l'équation est équivalente à

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=0.$$

L'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ de $(E_{\frac{1}{2}})$ est donc un plan vectoriel de $\mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{K})$.

5. Par produit, z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$, $y(x)=x^{-1/2}z(x)$, d'où

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{1}{2}\,x^{-3/2}z(x)+x^{-1/2}z'(x),\\ y''(x) &= \frac{3}{4}\,x^{-5/2}z(x)-x^{-3/2}z'(x)+x^{-1/2}z''(x). \end{aligned}$$

Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E_{\frac{1}{2}}) \text{ sur }]0,+\infty[\\ \Leftrightarrow\quad & \forall\, x>0,\quad \frac{3}{4}\,x^{-1/2}z(x)-x^{1/2}z'(x)+x^{3/2}z''(x)-\frac{1}{2}\,x^{-1/2}z(x)+x^{1/2}z'(x)\\ & \qquad\qquad +x^{3/2}z(x)-\frac{1}{4}x^{-1/2}z(x)=0\\ \Leftrightarrow\quad & \forall\, x>0,\quad z''(x)+z(x)=0\\ \Leftrightarrow\quad & z \text{ est solution de } z''+z=0 \text{ sur }]0,+\infty[. \end{aligned}$$

6. On remarque de plus que la formule exprimant y en fonction de z montre que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ si *et seulement si* y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. D'après la question **1**, les solutions de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions

$$x\mapsto x^{-1/2}\left(A\cos(x)+B\sin(x)\right)=\frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{\sqrt{x}}, \quad (A,B)\in\mathbb{K}^2.$$

7. D'après la question précédente et la question **3**, les solutions réelles de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0,+\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0 sont les fonctions

$$x\mapsto B\,\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}, \quad B\in\mathbb{R}.$$

L'ensemble qu'elles forment est la droite vectorielle engendrée par $x\mapsto \sin(x)/\sqrt{x}$, c'est un espace vectoriel de dimension 1.

8. Une telle solution doit avoir une limite nulle en 0, donc être de la forme de la question **3** avec $A = 0$, et dans ce cas, pour que l'équivalent de la question **3** soit $\sqrt{2x/\pi}$, il faut que $B = \sqrt{2/\pi}$. Cette fonction ne peut donc être que

$$x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}},$$

d'où l'unicité. Réciproquement, cette fonction convient, d'où l'existence.

9. On a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \big[-e^{-t}\big]_0^A = \lim_{A\to+\infty} (1 - e^{-A}) = 1.$$

Soit $x > 0$. Les fonctions $f : t \mapsto -e^{-t}$ et $g : t \mapsto t^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, $t^x e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to 0^+$ car $x > 0$, et $t^x e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ par croissances comparées. Enfin, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,dt$ est convergente car $x+1 > 0$. D'après le théorème d'intégration par parties, $\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,dt$ est convergente (ce que l'on savait car $x > 0$) et on a

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \big[-t^x e^{-t}\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\,t^{x-1} e^{-t}\,dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt,$$

c'est-à-dire,

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

10. **a.** R est la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des $\rho \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n \rho^n)_{n\geqslant 0}$ soit bornée.

b. On peut dériver S terme à terme sur $]-R,R[$, en tant que fonction somme d'une série entière de rayon de convergence R. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& S \text{ est solution de } (E'_\alpha) \text{ sur }]-R,R[\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-R,R[,\quad x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (2\alpha+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-R,R[,\quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + (2\alpha+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-R,R[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + (2\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in]-R,R[,\quad (2\alpha+1)a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n+1)a_{n+1} + (2\alpha+1)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\big)x^n = 0.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (sachant que $R > 0$), ceci équivaut à

$$\begin{cases} (2\alpha+1)a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\quad n(n+1)a_{n+1} + (2\alpha+1)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire (sachant que $2\alpha + 1 \neq 0$), à

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\quad \big((n+1)(n+1+2\alpha)\big)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

11. **a.** Pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)(n+1+2\alpha) \neq 0$ car $\alpha \geqslant 0$. Les relations de la question précédente montrent alors, par récurrence immédiate, que $a_n = 0$ pour tout n impair, ce qui se réécrit : $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. D'après la question précédente, on se ramène à la série $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$. On va appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Si $a_0 = 0$ ou $x = 0$, on a $a_{2n}x^{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de même qu'à la question précédente, et la série $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ converge. Sinon, $a_{2n}x^{2n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après les relations de la question précédente, et

$$\left|\frac{a_{2n+2}\,x^{2n+2}}{a_{2n}\,x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+2+2\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0;$$

d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ converge absolument.

Finalement, dans tous les cas, $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ converge, et donc $R = +\infty$.

c. On remarque tout d'abord que $\Gamma(n+\alpha+1)>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (intégrale sur $]0,+\infty[$ d'une fonction continue, non nulle, et positive). On prouve la formule par récurrence. La propriété est vraie au rang 0 car

$$a_0=\frac{(-1)^0}{0!\,2^0}a_0.$$

Supposons la propriété vraie au rang n ; alors d'après la relation de la question **10.b**,

$$\begin{aligned}a_{2n+2}=-\frac{1}{(2n+2)(2n+2+2\alpha)}a_{2n}&=-\frac{1}{2^2(n+1)(n+1+\alpha)}\,\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!\,2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}\,a_0\\&=\frac{(-1)^{n+1}\Gamma(\alpha+1)}{(n+1)!\,2^{2(n+1)}\Gamma(n+\alpha+2)}\,a_0\end{aligned}$$

car, d'après **9**, on a $(n+1+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)=\Gamma(n+\alpha+2)$. On en déduit le résultat au rang $n+1$ et finalement pour tout $n\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.

12. De même qu'à la question **4**, il s'agit d'un plan vectoriel de $\mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{K})$.

13. On raisonne exactement comme à la question **5** : par produit, z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$, $y(x)=x^\alpha z(x)$, d'où

$$\begin{aligned}y'(x)&=\alpha\,x^{\alpha-1}z(x)+x^\alpha z'(x),\\y''(x)&=\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}z(x)+2\alpha x^{\alpha-1}z'(x)+x^\alpha z''(x).\end{aligned}$$

Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}&y \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[\\\Leftrightarrow\quad&\forall\,x>0,\quad \alpha(\alpha-1)\,x^\alpha z(x)+2\alpha x^{\alpha+1}z'(x)+x^{\alpha+2}z''(x)+\alpha\,x^\alpha z(x)+x^{\alpha+1}z'(x)\\&\qquad\qquad\qquad+x^{\alpha+2}z(x)-\alpha^2x^\alpha z(x)=0\\\Leftrightarrow\quad&\forall\,x>0,\quad xz''(x)+(2\alpha+1)z'(x)+xz(x)=0\\\Leftrightarrow\quad&z \text{ est solution de } (E'_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[.\end{aligned}$$

Entre la deuxième et la troisième ligne, on a bien équivalence, par division ou multiplication par $x^{\alpha+1}>0$.

14. Soit $(a_n)_{n\geqslant0}$ définie par la formule des questions **11.a** et **11.c** avec

$$a_0=\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}.$$

Une vérification immédiate montre que (a_n) vérifie les relations de la question **10.b** et donc, d'après **10.b** où l'on a raisonné *par équivalences*, la fonction S associée est solution de (E'_α) sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0,+\infty[$ (on rappelle que $R=+\infty$). La fonction f_α est donc bien définie, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ de même que S, et d'après **13**, elle est solution de (E_α) sur $]0,+\infty[$.

15. Avec les notations de la question précédente, S étant continue en 0 en tant que fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$, on a

$$S(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}S(0)=a_0=\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\neq0$$

et donc

$$f_\alpha(x)\underset{x\to0^+}{\sim}a_0x^\alpha=\frac{x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}.$$

16. Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$; on a

$$\begin{aligned}f_{p-1}(x)-f_{p+1}(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+1}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\end{aligned}$$

par changement d'indice dans la deuxième somme. Alors

$$\begin{aligned}f_{p-1}(x)-f_{p+1}(x)&=\frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left((n+p)+n\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\,(2n+p)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\end{aligned}$$

D'autre part, par dérivation terme à terme d'une fonction somme de série entière de rayon de convergence $+\infty$, on a

$$f_p'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!} \frac{2n+p}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}$$

d'où le résultat avec $k = 2$.

17. On va appliquer le théorème de la classe $\mathcal{C}^2$ pour les intégrales à paramètres. On remarquera que la fonction

$$\varphi : (x,t) \mapsto \cos(pt - x\sin(t))$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et que l'intervalle d'intégration $[0,\pi]$ est un segment. Notamment :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$.
- Pour tout $t \in [0,\pi]$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$,

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|-\sin(t)^2 \cos(pt - x\sin(t))\right| \leqslant 1.$$

La fonction constante égale à 1 est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$.
D'après le théorème de la classe $\mathcal{C}^2$ pour les intégrales à paramètres, g_p est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_p'(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t)\sin(pt - x\sin(t))\,dt, \\ g_p''(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\,dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t)^2 \cos(pt - x\sin(t))\,dt. \end{aligned}$$

18. Soit $x \in \mathbb{R}^*$; les fonctions $t \mapsto -\frac{p}{x} - \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(pt - x\sin(t))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, donc par intégration par parties dans l'expression de $g_p'(x)$ de la question précédente, on a

$$\pi\, g_p'(x) = \left[\left(-\frac{p}{x} - \cos(t)\right)\sin(pt - x\sin(t))\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(\frac{p}{x} + \cos(t)\right)(p - x\cos(t))\cos(pt - x\sin(t))\,dt.$$

Le crochet est nul car p est entier ; ainsi

$$\begin{aligned} \pi\, x g_p'(x) &= \int_0^\pi (p + x\cos(t))\,(p - x\cos(t))\cos(pt - x\sin(t))\,dt \\ &= \int_0^\pi (p^2 - x^2\cos(t)^2)\cos(pt - x\sin(t))\,dt \\ &= \int_0^\pi (p^2 - x^2 + x^2\sin(t)^2)\cos(pt - x\sin(t))\,dt \\ &= -(x^2 - p^2)\int_0^\pi \cos(pt - x\sin(t))\,dt + x^2 \int_0^\pi \sin(t)^2\cos(pt - x\sin(t))\,dt \\ &= -\pi\left((x^2 - p^2) g_p(x) + x^2 g_p''(x)\right). \end{aligned}$$

L'équation (E_p) est donc vérifiée par g_p en x. De plus, en $x = 0$, l'équation est aussi vérifiée ; c'est évident si $p = 0$, et si $p \in \mathbb{N}^*$, c'est aussi vrai car

$$g_p(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(pt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(pt)}{p}\right]_0^\pi = 0.$$

19. **a.** Soit $n \geqslant 2$ un entier ; on a

$$w_n = \int_0^\pi \sin(t)^{n-1}\sin(t)\,dt;$$

les fonctions $t \mapsto \sin(t)^{n-1}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} w_n &= \left[-\sin(t)^{n-1}\cos(t)\right]_0^\pi + \int_0^\pi (n-1)\sin(t)^{n-2}\cos(t)^2\,dt \\ &= \int_0^\pi (n-1)\sin(t)^{n-2}\,dt - \int_0^\pi (n-1)\sin(t)^{n-2}\sin(t)^2\,dt \\ &= (n-1)w_{n-2} - (n-1)w_n \end{aligned}$$

(le crochet est nul car $n-1 \geqslant 1$). Ainsi

$$nw_n = (n-1)w_{n-2}.$$

b. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{2n} = \pi \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

Le résultat est vrai au rang 0 car $w_0 = \pi$ et $0! = 1$. Supposons le résultat vrai au rang n ; d'après la question précédente,

$$w_{2(n+1)} = w_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} w_{2n}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$w_{2(n+1)} = \pi \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \pi \frac{2n+2}{2n+2} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \pi \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}(n+1)!^2},$$

d'où le résultat au rang $n+1$ et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

20. Soit $x \in \mathbb{R}$; par définition,

$$g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t - x\sin(t))\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big(\cos(t)\cos(x\sin(t)) + \sin(t)\sin(x\sin(t))\big)\, dt.$$

Or, si $x \neq 0$,

$$\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(x\sin(t))\, dt = \left[\frac{\sin(x\sin(t))}{x}\right]_0^{\pi} = 0$$

et si $x = 0$,

$$\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(x\sin(t))\, dt = \int_0^{\pi} \cos(t)\, dt = 0,$$

d'où la formule donnant $g_1(x)$.

De plus,

$$g_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\, dt = \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{\pi(2n)!}\right) dt$$

d'après le développement en série entière de cos, valable sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,\pi]$,

$$h_n(t) = (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{\pi(2n)!} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{\pi} \frac{\sin(t)^{2n}}{(2n)!}.$$

On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue sur $[0,\pi]$ (puissance d'une fonction usuelle).
• Pour tout $t \in [0,\pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|h_n(t)| \leqslant \frac{1}{\pi} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

le majorant est indépendant de t et c'est le terme général d'une série convergente, d'après le développement en série entière de la fonction ch.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(2n)!} \left(\int_0^{\pi} \sin(t)^{2n}\, dt\right) x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(2n)!} w_{2n} x^{2n}$$

et donc g_0 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On procède de même pour g_1 à partir de l'égalité du début de la question, en utilisant les développements en série entière de sin et sh, pour obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)!} w_{2(n+1)} x^{2n+1}.$$

21. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

Or, d'après la question **19.b**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(-1)^n}{\pi(2n)!} w_{2n} = \frac{(-1)^n}{\pi(2n)!} \pi \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}.$$

Les deux fonctions f_0 et g_0 ont donc le même développement en série entière valable sur $\mathbb{R}$, d'où $f_0 = g_0$.

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Or, d'après la question **19.b**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)!} w_{2(n+1)} = \frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)!} \pi \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} = (-1)^n \frac{2n+2}{4^{n+1}((n+1)!)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!(n+1)!}.$$

Les deux fonctions f_1 et g_1 ont donc le même développement en série entière valable sur $\mathbb{R}$, d'où $f_1 = g_1$.

22. Soit $p \geqslant 1$ entier et $x \in \mathbb{R}$; par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big(\cos((p-1)t - x\sin(t)) - \cos((p+1)t - x\sin(t)) \big)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \sin(pt - x\sin(t))\, dt \end{aligned}$$

car, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{b+a}{2}\right)$. On en déduit le résultat voulu d'après la question **17**.

23. On obtient le résultat par récurrence (d'ordre 2) immédiate à partir des résultats de la question **21** (qui permettent l'initialisation) et des questions **16** et **22** (qui donnent l'hérédité).