

et $A \vee B = \prod_{i=1}^{\lambda} P_i^{\lambda_i}$ où $\lambda_i = \max(m_i, n_i)$

Exemple :

$$A(x) = 2(x+1)^3 (x^2+1)^2 (x^2+x+1)^3$$

$$B(x) = 3(x+1)(x-2)^2 (x^2+1)$$

$$\text{alors } A \wedge B = (x+1)(x^2+1)$$

$$A \vee B = (x+1)^3 (x-2)^2 (x^2+1)^2 (x^2+x+1)^3$$

VI Fractions rationnelles :

Déf :

Tout rapport $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P, Q \in K[x]$ et $Q \neq 0_{K[x]}$

s'appelle fraction rationnelle et on note :

$$K(x) = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \mid P, Q \in K[x] \text{ et } Q \neq 0_{K[x]} \right\}$$

Règle :

On munit $K(x)$ des l.o.é. " + " et " x " définies par :

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) + P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}$$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \times \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}$$

Prop :

$(K(x), +, \times)$ est un corps commutatif.

Dém : (Exercice)

Défs :

Soit $F = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P, Q \in K[x]$

1



$Q \neq 0_{K[X]}$ et $PA - Q = 1$

On dit que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est la forme irréductible de la fraction F

2/ Soit $F \in K(x)$ de la forme irréductible : $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

avec $P, Q \in K[x]$ et $P \neq 0_{K[x]}$ et $Q \neq 0_{K[x]}$

On appelle le degré de la fraction F l'entier relatif :

$$d^0 F = (d^0 P) - (d^0 Q)$$

si $P = 0_{K[x]}$, on pose $d^0 F = -\infty$

3/ Soit $F \in K(x)$ tq : $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

On appelle la fraction dérivée de F , la fraction définie par :

$$F'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2}$$

Exemples :

$$F(x) = \frac{(x-1)^2(x^2+1)^3(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)(x^2+1)^4}$$

La forme irréductible de F est :

$$F(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$d^0 F = 3 - 3 = 0$$

$$d^0 \left(\frac{x^2+1}{(x-1)^4} \right) = -2$$

Prop :

1/ $\forall F, G \in K(x)$ et $\alpha, \beta \in K$

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G'$$

2/ $(F \cdot G)' = F'G + G'F$

3/ $\left(\frac{F}{G} \right)' = \frac{F'G - G'F}{G^2}$

②

$$4/ \forall n \in \mathbb{N} \quad (F \circ G)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k F^{(k)} G^{(n-k)}$$

Défs: (zéro et pôle d'une fraction)

Soit $F \in \mathbb{K}(x)$ tq: $F = \frac{P}{Q}$ et $P \wedge Q = 1$

1/ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, on dit que α est un zéro (ou racine) de F d'ordre m si α est une racine de multiplicité m de P .

2/ On dit que β est un pôle de F d'ordre n si β est une racine de Q de multiplicité n .

3/ On appelle fraction associée à F , la fct:

$$\tilde{F}: \mathbb{K} - \{\text{pôles de } F\} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \tilde{F}(x) = \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

Exemple:

$$F(x) = \frac{x^2(x+1)^3}{(x+2)^3(x^2+1)}$$

Les zéros de F dans $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$) sont $\{0, -1\}$

Les pôles de F dans $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$) sont $\{2\}$ (resp $\{2, i, -i\}$)

$$\tilde{F}: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tilde{F}(x) = \frac{x^2(x+1)^3}{(x+2)^2(x^2+1)}$$

$$\tilde{F}: \mathbb{C} - \{2, i, -i\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \tilde{F}(z) = \frac{z^2(z+1)^3}{(z+2)^2(z^2+1)}$$

Théorème: (Partie entière d'une fraction)

Soit $F \in \mathbb{K}(x)$ tq: $F = \frac{P}{Q}$ et $P \wedge Q = 1$

Alors $\exists ! (E, A, R) \in \mathbb{K}[x]$ tq:

$$F = E + \frac{A}{R} \quad \text{avec} \quad \boxed{d^0 A < d^0 R}$$

E s'appelle la partie entière de F

$$(d^0(\frac{A}{R}) \in \mathbb{Z}^{*-})$$

3

Dém :

si $d^0 P < d^0 Q$, on prend $E = 0_{\mathbb{K}[X]}$

si $d^0 P \geq d^0 Q$

D'après la division euclidienne de P par Q

on a : $\exists (E, R) \in \mathbb{K}[X]$:

$$P = EQ + R \text{ avec } d^0 R < d^0 Q$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{E(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)}$$

$$= E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Exemple :

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2(x+3)}$$

La partie entière de F est $E = 0$

$$G(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)}$$

$$G(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 2) + 3}{x^2 + 1}$$

$$= x^2 - 2 + \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$E(G(x)) = x^2 - 2$$

$$\begin{array}{r} x^4 - x^2 + 1 \\ - (x^4 - x^2) \\ \hline 2x^2 + 1 \\ - (2x^2 + 2) \\ \hline -1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x^2 - 2 \\ \hline \end{array}$$

Décomposition en éléments simples :

Exemple ① :

$$F(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{(x-1)^2 x}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^2 + 1 \\ - (x^4 + 2x^3 - x^2) \\ \hline 2x^3 + 2x^2 + 1 \\ - (2x^3 + 4x^2 - 2x) \\ \hline -2x^2 + 2x + 1 \\ - (-2x^2 + 2x + 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x \\ x + 2 \\ \hline \end{array}$$

4

$$F(x) = x + 2 + \frac{6x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2 x}$$

$\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ tq:

$$G(x) = \frac{6x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2 x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$H_1(x) = xG(x) = \frac{6x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = a + x \left(\frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \right)$$

$$\tilde{H}_1(0) = 1 = a$$

$$H_2(x) = (x-1)^2 G(x) = \frac{6x^2 - 2x + 1}{x} = c + \frac{q(x-1)^2}{x} + b(x-1)$$

$$\tilde{H}_2(1) = 5 = c$$

$$\tilde{G}(2) = \frac{21}{2} = \frac{1}{2} + 5 + b$$

$$\Rightarrow b = 5$$

$$G_c: \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{(x-1)^2 x} = x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$$

Application:

dérivées

Calcul de primitive et des résidus n^{ème} d'une fraction.

Exemple 2:

$$F(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\ -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x & \\ \hline -2x^3 - 2x^2 - x & \\ -2x^3 - 2x^2 - x & \\ \hline 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2 & \\ 2x^3 + 3x^2 + 2 & \\ \hline & \end{array}$$

$$\text{Donc: } F(x) = x + 2 + \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

(r)

$$\exists a, b, c \in \mathbb{R} : \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$a=1 \quad (H_n(x) = (x+1)G(x); \quad \tilde{H}_n(-1) = a)$$

$$\tilde{G}(0) = 2 = a+c$$

$$\Rightarrow c = 2 - a = 1$$

$$\tilde{G}(1) = \frac{7}{6} = \frac{1}{2} + \frac{b+1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{b+1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow b=1$$

$$F(x) = (x-2) + \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Exemple ③:

Décomposition (DES) dans $\mathbb{C}(x)$ de la fraction $F(x) = \frac{P}{Q}$

où $Q(x) = \prod_{i=1}^{i=n} (x - \alpha_i)$ et α_i sont distincts 2 à 2

et $\deg P < \deg Q$

$$F(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x - \alpha_k}$$

Soit $j \in [1, n]$

$$H(x - \alpha_j) F(x) = \frac{P(x)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{i=n} (x - \alpha_i)}$$

$$\tilde{H}(\alpha_j) = \frac{\tilde{P}(\alpha_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{i=n} (\alpha_j - \alpha_i)} = \alpha_j \dots$$

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{i=n} (x - \alpha_i)$$

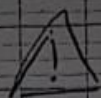
$$= (x - \alpha_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{i=n} (x - \alpha_i)$$

$$Q'(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{i=n} (x - \alpha_i) + (x - \alpha_j) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{i=n} (x - \alpha_i) \right)'$$

6

$$\tilde{Q}'(\alpha_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\alpha_j - \alpha_i)$$

$$q_c: a_j = \frac{\tilde{P}(\alpha_j)}{\tilde{Q}'(\alpha_j)}$$



Exercice d'application:

1/ Soit $n \geq 2$: DÉS dans $\mathbb{C}(x)$ la fraction: $F(x) = \frac{x^{n-1}}{x^n - 1}$

2/ On pose $G(x) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega^k)}$

DÉS dans $\mathbb{R}(x)$ la fraction G

Solut:

$$n \geq 2: 1/ F(x) = \frac{x^{n-1}}{x^n - 1}$$

$$dF = -1 \quad \text{donc: } E = 0$$

$$F(x) = \frac{x^{n-1}}{\prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega^k)} \quad \text{ou } \omega = e^{i \frac{2\pi}{n}}$$

$$\text{donc: } F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x - \omega^k}$$

$$\text{avec } q_k = \frac{(\omega^k)^{n-1}}{n(\omega^k)^{n-1}}$$

$$a_k = \frac{1}{n}$$

$$q_c: F(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - \omega^k}$$

Pour $n = 4$:

$$F(x) = \frac{x^3}{x^4 - 1}$$

(7)

$$F(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+i} \right)$$

Décomposition dans $\mathbb{R}(x)$

$$F(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} \right)$$

Rq: !

$$F_n(x) = \frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{x^n - 1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{x - \omega^k}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{n(\omega^k)^{n-1}} = \frac{\omega^k}{n(\omega^k)^n} = \frac{\omega^k}{n}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{x^n - 1}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{i}{x-i} + \frac{1}{x+1} + \frac{-i}{x+i} \right)$$

Dans $\mathbb{R}(x)$:

$$F_n(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} \right)$$

$$2/ \quad G(x) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x+k}$$

Soit $j \in [0, n]$:

$$H(x) = (x+j) G(x)$$

$$= \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} (x+k)}$$

$$= a_j + (x+j) \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{a_k}{x+k} \right)$$

8

$$\tilde{H}(-j) = a_j$$

$$\tilde{H}(-j) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{j-1} (-j+k)}$$

$$= \frac{1}{(-j) \times (-j+1) \times \dots \times (-1) \times 1 \times 2 \times \dots \times (n-j)}$$

$$= \frac{1}{(-1)^j j! (n-j)!}$$

$$a_j = \frac{(-1)^j}{n!} C_n^j$$

2^{ème} méthode :

Résultat :

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 f_3)' &= f_1' (f_2 f_3) + f_1 (f_2' f_3 + f_2 f_3') \\ &= f_1' (f_2 f_3) + f_2' (f_1 f_3) + f_3' (f_1 f_2) \end{aligned}$$

Dans le cas général (réurrence)

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^n f_k \right)' &= \sum_{j=1}^n f_1 f_2 \dots f_{j-1} (f_j)' f_{j+1} \dots f_n \\ &= \sum_{j=1}^n f_j' \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n f_i \right) \end{aligned}$$

$$\text{on a : } a_j = \frac{1}{\left(\prod_{k=0}^n (x+k) \right)' (-j)}$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{1-n} x(x+n) \dots (x+i-1)(x+i)'(x+i+1) \dots (x+n) \right) (-j)}$$

9

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{j-1} x(x+1) \dots (x+i-1)(x+i+1) \dots (x+n) \right) (-j)}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=0}^{j-1} j(j+1) \dots (-j+i-1)(-j+i+1) \dots (-j+n)}$$

$$= \frac{1}{-j(-j+1) \dots x(-1)x \dots x(n-j)}$$

Exemple (5): décomposition de $\frac{P'}{P}$ ds $\mathbb{C}(x)$ ~~sur~~ $P = \prod_{i=1}^{j=n} (x-x_i)^{m_i}$

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ tq:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{j=n} (x-x_i)^{m_i} \quad (x_i \in \mathbb{C})$$

$$P'(x) = \prod_{j=1}^{j=n} (x-x_1)^{m_1} (x-x_2)^{m_2} \dots (x-x_{j-1})^{m_{j-1}} (x-x_j)^{m_j} (x-x_{j+1})^{m_{j+1}} \dots (x-x_n)^{m_n}$$

$$= \prod_{j=1}^{j=n} (x-x_j)^{m_j-1} m_j (x-x_j)^{m_j-1} \dots x(x-x_n)^{m_n}$$

$$= \prod_{j=1}^{j=n} \frac{m_j P(x)}{(x-x_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n} \frac{m_j P(x)}{x-x_j}$$

$$\text{c/c: } \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{m_j}{(x-x_j)} \quad \Delta$$

Exemple 1

$$P(x) = (x-1)^2 (x+1)^3 (x-i)$$

$$P'(x) = 2(x-1)(x+1)^3(x-i) + 3(x+1)^2(x-1)^2(x-i) + (x-1)^2(x+1)^3$$

utiliser du DL : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+1}{(x-1)^4 x^3}$

donc $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

$G(x) = \frac{1}{(x+1)^2 (x-1)^n}$, $n \geq 3$

Exemple 1

(Utilisation du poly de Taylor)

$F(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^3}$

$Q(x) = x^2+1$

$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{a_3}{(x-1)^3}$

$Q(x) = x^2+1 = \tilde{Q}(1) + \tilde{Q}'(1)(x-1) + \frac{\tilde{Q}''(1)}{2!} (x-1)^2$

$x^2+1 = 2 + 2(x-1) + (x-1)^2$

Donc $F(x) = \frac{2 + 2(x-1) + (x-1)^2}{(x-1)^3}$

$= \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)}$

Exemple (7)

$F(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$

$= \frac{x^2}{(x^2+1)^2 - 2x^2}$

$= \frac{x^2}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$

Decomposition dans $\mathbb{R}(x)$

$F(x) = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}$

on a : F est paire ($\tilde{F}(x) = \tilde{F}(-x)$)

donc : $\frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{-ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{-cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}$

Donc : $\begin{cases} c = -a \\ b = d \end{cases}$

11

$n \geq 3$.

$$\begin{aligned} \tilde{F}(0) &= b + d = 0 \\ \Rightarrow b &= d = 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{F}(\sqrt{2}) = \frac{2}{5} = a\sqrt{2} + \frac{c\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$F(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

Réponse: (Utiliser la partie + conjugué + dév.)

$$\text{so } F(x) \in \mathbb{R}(x)$$

$$F_1(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$F_1(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)^2}$$

Décomposition dans $\mathbb{C}(x)$:

$$F_1(x) = \frac{x}{(x+i)^2(x-i)^2}$$

$$= \frac{A}{x+i} + \frac{B}{(x+i)^2} + \frac{C}{x-i} + \frac{D}{(x-i)^2}$$

$$\overline{F_1(x)} = F_1(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A}}{(x-i)} + \frac{\overline{B}}{(x-i)^2} + \frac{\overline{C}}{x+i} + \frac{\overline{D}}{(x+i)^2} = \frac{A}{(x+i)} + \frac{B}{(x+i)^2} + \frac{C}{(x-i)} + \frac{D}{(x-i)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{C} = A \\ \overline{B} = D \end{cases}$$

(12)

$$F_1(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{\bar{A}}{x-i} + \frac{\bar{B}}{(x-i)^2}$$

$$B = \frac{-i}{-4} = \frac{i}{4}$$

$$\bar{B} = \frac{-i}{4}$$

$$F_1(0) = \frac{A}{0} + B + \frac{\bar{A}}{-i} - \bar{B} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A - \bar{A}}{i} = 0$$

$$\Rightarrow A = \bar{A}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)^2}$$

VII Polynômes d'interpolation de Lagrange:

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts 2 à 2 et $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{K}$

On cherche un poly $P \in \mathbb{K}[x]$ de degré $\deg P \leq n-1$ tel que $\forall i \in [1, n]: P(x_i) = y_i$



Déf: (Poly de Lagrange)

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts 2 à 2 et $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{K}$

On appelle polys de Lagrange liés aux scalaires $x_1, x_2, \dots, x_n$ les polynômes notés: $L_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{x_i - x_k}$

Exemples:

Pour $n=3$:

$$L_1(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^3 \frac{(x - x_k)}{x_1 - x_k}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

13

$$L_1(x_2) = 0 = L_1(x_3)$$

$$L_1(x_1) = 1$$

$$L_1(x_j) = \delta_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=1 \\ 0 & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$$

$$L_2(x) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{k=3} (x - x_k)}{x_2 - x_k}$$

$$= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \times \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_2(x_j) = \delta_{2j}$$

$$L_3(x) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{k=2} (x - x_k)}{x_3 - x_k}$$

$$= \frac{(x - x_1)}{x_3 - x_1} \times \frac{(x - x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$L_3(x_j) = \delta_{3j}$$

Prop:

Avec les notations précédentes, on a:

$$\forall j \in [1, n]: L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

En particulier, L_i admet comme racines $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots$ (il n'y a pas de x_i)

$$\deg L_i \leq n-1$$

Dém:

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{k=n} (x - x_k)}{x_i - x_k}$$

$$\text{Si } j \neq i, L_i(x_j) = 0$$

$$L_i(x_i) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{k=n} (x_i - x_k)}{x_i - x_k} = 1$$

Prop②:

Soient $x_1, \dots, x_n \in K$ distincts 2 à 2 ($n \geq 2$) et $y_1, y_2, \dots, y_n \in K$
alors $\exists ! P \in K[x]$ tq: $\deg P \leq n-1$ et $\forall i \in [1, n]: P(x_i) = y_i$

$$(P = \sum_{i=1}^n y_i L_i) \quad \triangle$$

M

Dém:

Existence:

$$\text{On pose } P(x) = \sum_{i=1}^n y_i L_i(x)$$

$$\text{on a : } d^0 L_i(x) = n-1 \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\text{donc : } d^0 P \leq n-1$$

$$\begin{aligned} \forall j \in [1, n] : P(x_j) &= \sum_{i=1}^n y_i L_i(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \delta_{ij} = y_j \end{aligned}$$

Unicité:

$$\text{Soit } P, Q \in K[x] \text{ tq : } d^0 P \leq n-1 \text{ et } d^0 Q \leq n-1$$

$$\text{et } \forall i \in [1, n] : P(x_i) = y_i = Q(x_i)$$

Le poly $(P-Q)$ est de degré $\leq n-1$

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, n] : (P-Q)(x_i) &= P(x_i) - Q(x_i) \\ &= y_i - y_i = 0 \end{aligned}$$

$(P-Q)$ admet au moins n racines distinctes d'après

$$\text{Donc } (P-Q) = 0_{K[x]}$$

$$\text{c.à.d. } P = Q$$

Prop ③:

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$, distinctes d'après 2. et $y_1, \dots, y_n \in K$.

Les polynômes Q de $K[x]$ vérifiant : $\forall i \in [1, n] : Q(x_i) = y_i$ sont les poly de la forme :

$$Q(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i L_i(x)}_P + R(x) \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k) \text{ où } R \in K[x]$$

Dém:

$$\text{Soit } Q \in K[x] \text{ et } P = \sum_{i=1}^n y_i L_i(x)$$

$$\forall i \in [1, n] : Q(x_i) = y_i \Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : Q(x_i) - P(x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : (Q-P)(x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k) \mid Q - P$$

$$Q(x) - P(x)$$



$$\Leftrightarrow \exists R \in K[X] : (Q - P)(X) = R(X) \prod_{k=1}^{k=n} (X - x_k)$$

$$\Leftrightarrow \exists R \in K[X] : Q(X) = \sum_{i=1}^{i=n} y_i L_i(X) + R(X) \prod_{k=1}^{k=n} (X - x_k)$$

Exemple:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

$$y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 5$$

Le poly P de degré ≤ 2 tq: $x_i \in [1, 3] : P(x_i) = y_i$ est la poly d'interpolation de Lagrange définie par:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{i=3} y_i L_i(x)$$

$$L_1(x) = \frac{\prod_{k=2}^{k=3} (x - x_k)}{x_1 - x_k}$$

$$= \frac{x-2}{-1} \times \frac{x-3}{-2}$$

$$L_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{\prod_{k=1, k \neq 2}^{k=3} (x - x_k)}{x_2 - x_k}$$

$$= \frac{(x-1)}{1} \times \frac{(x-3)}{-1} = -(x-1)(x-3)$$

$$L_3(x) = \frac{\prod_{k=1}^{k=2} (x - x_k)}{x_3 - x_k}$$

$$= \frac{(x-1)}{2} \times \frac{(x-2)}{1} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$\text{Donc: } P(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$= 2L_1(x) + 3L_2(x) + 5L_3(x)$$

$$= (x-2)(x-3) - 3(x-1)(x-3) + \frac{5}{2}(x-1)(x-2)$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$$

16

Rq: Tous les polynômes Q de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant:
 $\forall i \in [1, 3] : Q(x_i) = y_i$ sont de la forme
 $Q(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right) + R(x)(x-1)(x-2)(x-3)$
 où $R \in \mathbb{R}[X]$.

Rq: (Utilisation d'un Δ dans la DES d'une fraction)

Exemple ①:

$$F(x) = \frac{x+1}{x(x-1)^4}$$

on a: $\exists A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ tq:

$$F(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^4} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)}$$

$$A=1 \quad \left(xF(x) \Big|_{x=0} \right)$$

$$\text{on a: } F(x) - \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x(x-1)^4} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x+1 - (x-1)^4}{x(x-1)^4}$$

$$= \frac{x+1 - (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)}{x(x-1)^4}$$

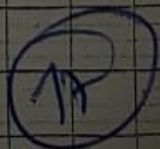
$$= \frac{-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x}{x(x-1)^4}$$

$$G(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 - 6x + 5}{(x-1)^4}$$

$$\text{on pose: } Y = x-1$$

$$G(x) = \frac{-(Y+1)^3 + 4(Y+1)^2 - 6(Y+1) + 5}{Y^4}$$

$$G(x) = \frac{-(Y^3 + 3Y^2 + 3Y + 1) + 4Y^2 + 8Y + 4 - 6Y - 1}{Y^4}$$



$$= \frac{-Y^3 + Y^2 - Y + 2}{Y^4}$$

$$= \frac{-1}{Y} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Y^3} + \frac{2}{Y^4}$$

$$= \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^4}$$

$$g_c: \frac{X+1}{X(X-1)^4} = \frac{1}{X} + \frac{2}{(X-1)^4} - \frac{1}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1}$$

2^{ème} méthode: (Utilisation d'un DL)

$$g(x) = (x-1)^4 \cdot x \quad \tilde{F}(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part: } &= B + C(x-1) + D(x-1)^2 + E(x-1)^3 + (x-1)^4 \cdot \frac{1}{x} \\ &= B + C(x-1) + D(x-1)^2 + E(x-1)^3 + O(x-1)^3 \end{aligned}$$

en utilisant un DL: ($R = x-1$)

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{R+2}{R+1} = (R+2)(1 - R + R^2 - R^3 + O(R^3))$$

$$= 2 - 2R + 2R^2 - 2R^3 + R - R^2 + R^3 + O(R^3)$$

$$= 2 - R + R^2 - R^3 + O(R^3)$$

D'après l'unicité du DL, on a:

$$B=2, \quad C=-1, \quad D=1, \quad E=-1$$

$$\text{soit } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

Rq: ?

si F admet un pôle de multiplicité 2

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$b = \frac{1}{2} \quad \left((x+1)^2 f(x) \right) \Big|_{x=-1}$$

18

1^{ère} méthode:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\frac{1}{2}x}{(x+1)^2} = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{2x+3 - \frac{1}{2}(x^2+1)}{(x+1)^2(x^2+1)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}}{(x+1)^2(x^2+1)} \\
 &= \frac{(x+1)(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2})}{(x+1)^2(x^2+1)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{(x+1)(x^2+1)}
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{3}{2} \quad ((x+1)H(x) \mid x=-1)$$

2^{ème} méthode: (Dérivée)

(facile double)

(racine double)

$$K(x) = (x+1)^2 E(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} + a(x+1) + (x+1)^2 \left(\frac{cx+d}{x^2+1} \right)$$

$$K'(x) = \left(\frac{2x+3}{x^2+1} \right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= a + 2(x+1) \left(\frac{cx+d}{x^2+1} \right) + (x+1)^2 \left(\frac{cx+d}{x^2+1} \right)'$$

$$K'(-1) = \frac{3}{2} = a$$

Exemple (3):

$$G(x) = \frac{3x+2}{(x-1)^3(x+2)^4}$$

$$= \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)} + \frac{d}{(x+2)^4} + \frac{e}{(x+2)^3} + \frac{f}{(x+2)^2} + \frac{g}{(x+2)}$$

$$(x-1)^3 G(x) = \frac{3x+2}{(x+2)^4}$$

19

$$(x-1)^3 G(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + (x-1)^2 ((x-1)A(x))$$

$$\text{d'où } \tilde{H}(x) = \frac{3x+2}{(x+2)^4}$$

$$= a + b(x-1) + c(x-1)^2 + o(x-1)^2$$

En utilisant un DL ($R = x-1$)

$$\tilde{H}(x) = \frac{3(R+1)+2}{(R+3)^4}$$

$$= (5+3R) \times \frac{1}{3^4} \left(1 + \frac{R}{3}\right)^{-4}$$

$$= \frac{1}{81} (5+3R) \left(1 - \frac{4R}{3} + \frac{10R^2}{9} - o(R^2)\right)$$

$$= \frac{1}{81} \left(5 - \frac{20R}{3} + \frac{50R^2}{9} + 3R - 4R^2 + o(R^2)\right)$$

$$= \frac{1}{81} \left(5 - \frac{11R}{3} + \frac{14R^2}{9} + o(R^2)\right)$$

$$= \frac{5}{81} - \frac{11}{243} R + \frac{14}{729} R^2 + o(R^2)$$

$$\text{d'où : } a = \frac{5}{81}, \quad b = -\frac{11}{243}, \quad c = \frac{14}{729}$$

$$\text{De même : } E(x) = (x+2)^4 G(x) = \frac{3x+2}{(x-1)^3}$$

$$E(x) = \alpha + \beta(x+2) + \gamma(x+2)^2 + \delta(x+2)^3 + (x+2)^4 \left(\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{c}{x-1} \right)$$

$$\tilde{E}(x) = \frac{3x+2}{(x-1)^3}$$

$$= \alpha + \beta(x+2) + \gamma(x+2)^2 + \delta(x+2)^3 + o(x+2)^3$$

$$R = x+2$$

$$\tilde{E}(x) = \frac{3(R-2)+2}{(R-3)^3} = (-4+3R) \times \frac{-1}{27} \left(1 - \frac{R}{3}\right)^{-3}$$

20