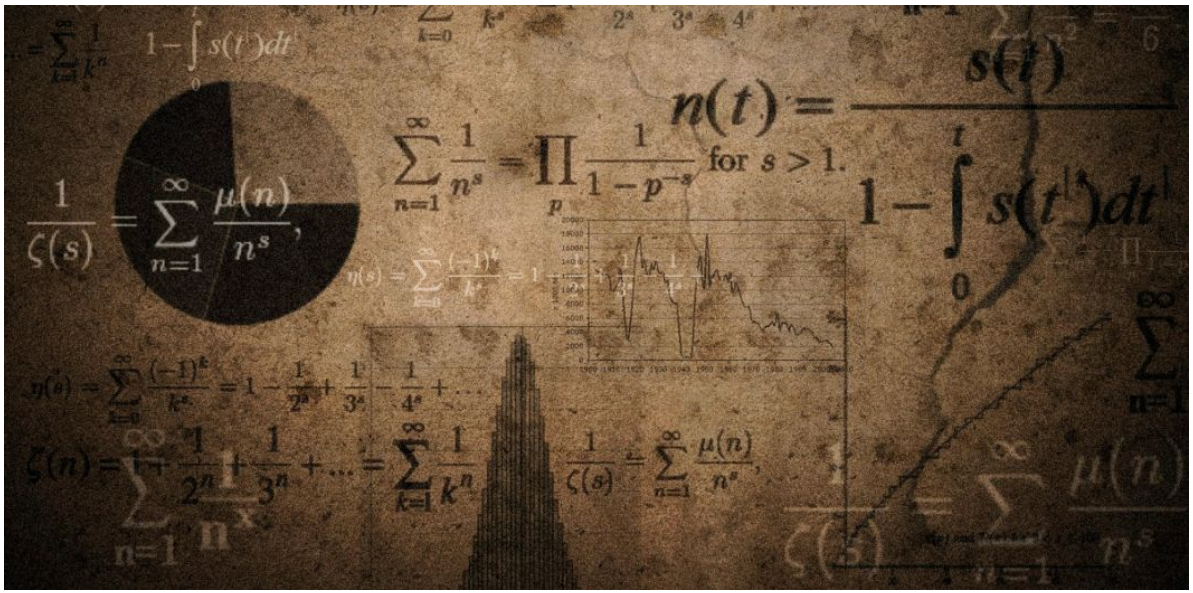
Exercice : Réduction des matrices de rang 1

ET-TAHRI FOUAD

Ecole Royale de l'Air Marrakech
Koutoubia Prépas Marrakech
https://ettahrifouad1.wixsite.com/prepasmarrakech



April 9, 2020

Méthode 1

Méthode 1

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Méthode 1

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Justifier que 0 est une valeur propre de A et que le sous espace propre associé est de dimension $n-1$.

Méthode 1

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Justifier que 0 est une valeur propre de A et que le sous espace propre associé est de dimension $n-1$.
2. Montrer que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

Méthode 1

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Justifier que 0 est une valeur propre de A et que le sous espace propre associé est de dimension $n-1$.
2. Montrer que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.
3. En déduire que

$$A \text{ est diagonalisable} \iff Tr(A) \neq 0$$

Correction de la question 1

Correction de la question 1

Justifions que 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

Correction de la question 1

Justifions que 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

On a $rg(A) = 1 \neq n$, car $n \geq 2$

Correction de la question 1

Justifions que 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

On a $rg(A) = 1 \neq n$, car $n \geq 2$

Alors A n'est pas inversible

Correction de la question 1

Justifions que 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

On a $rg(A) = 1 \neq n$, car $n \geq 2$

Alors A n'est pas inversible

Par suite 0 est une valeur propre de la matrice A.

Correction de la question 1

Justifions que 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

On a $rg(A) = 1 \neq n$, car $n \geq 2$

Alors A n'est pas inversible

Par suite 0 est une valeur propre de la matrice A.

D'après le théorème du rang, on a $n = \dim(Ker(A)) + rg(A)$

Correction de la question 1

Justifions que 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

On a $rg(A) = 1 \neq n$, car $n \geq 2$

Alors A n'est pas inversible

Par suite 0 est une valeur propre de la matrice A.

D'après le théorème du rang, on a $n = \dim(Ker(A)) + rg(A)$

Donc $\dim(Ker(A)) = n - 1$

Correction de la question 1

Justifions que 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$.

On a $rg(A) = 1 \neq n$, car $n \geq 2$

Alors A n'est pas inversible

Par suite 0 est une valeur propre de la matrice A.

D'après le théorème du rang, on a $n = \dim(Ker(A)) + rg(A)$

Donc $\dim(Ker(A)) = n - 1$

Par suite $\dim(E_0(A)) = n - 1$

Correction de la question 2

Correction de la question 2

Montrons que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

Correction de la question 2

Montrons que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

On a 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$

Correction de la question 2

Montrons que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

On a 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$

Alors 0 est une valeur propre de A de multiplicité

$m_0(A) \geq \dim(E_0(A)) = n - 1$

Correction de la question 2

Montrons que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

On a 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$

Alors 0 est une valeur propre de A de multiplicité

$m_0(A) \geq \dim(E_0(A)) = n - 1$

D'où X^{n-1} divise χ_A (dans $\mathbb{R}[X]$)

Correction de la question 2

Montrons que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

On a 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$

Alors 0 est une valeur propre de A de multiplicité

$m_0(A) \geq \dim(E_0(A)) = n - 1$

D'où X^{n-1} divise χ_A (dans $\mathbb{R}[X]$)

Par suite $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)$

Correction de la question 2

Montrons que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

On a 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$

Alors 0 est une valeur propre de A de multiplicité

$m_0(A) \geq \dim(E_0(A)) = n - 1$

D'où X^{n-1} divise χ_A (dans $\mathbb{R}[X]$)

Par suite $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)$

(car χ_A est unitaire et degré n)

Correction de la question 2

Montrons que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

On a 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$

Alors 0 est une valeur propre de A de multiplicité

$m_0(A) \geq \dim(E_0(A)) = n - 1$

D'où X^{n-1} divise χ_A (dans $\mathbb{R}[X]$)

Par suite $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)$

(car χ_A est unitaire et degré n)

Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors $Tr(A) = (n-1) \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda$

Correction de la question 2

Montrons que $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

On a 0 est une valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$

Alors 0 est une valeur propre de A de multiplicité

$m_0(A) \geq \dim(E_0(A)) = n - 1$

D'où X^{n-1} divise χ_A (dans $\mathbb{R}[X]$)

Par suite $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)$

(car χ_A est unitaire et degré n)

Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors $Tr(A) = (n-1) \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda$

Ainsi $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$.

Correction de la question 3

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Si $Tr(A) \neq 0$

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Si $Tr(A) \neq 0$

Alors 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n - 1 = \dim(E_0(A))$ et

$Tr(A)$ est une valeur propre simple de A, donc

$m_{Tr(A)}(A) = 1 = \dim(E_{Tr(A)}(A))$

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Si $Tr(A) \neq 0$

Alors 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n - 1 = \dim(E_0(A))$ et

$Tr(A)$ est une valeur propre simple de A, donc

$m_{Tr(A)}(A) = 1 = \dim(E_{Tr(A)}(A))$

Alors A est diagonalisable.

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Si $Tr(A) \neq 0$

Alors 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n - 1 = \dim(E_0(A))$ et

$Tr(A)$ est une valeur propre simple de A, donc

$m_{Tr(A)}(A) = 1 = \dim(E_{Tr(A)}(A))$

Alors A est diagonalisable.

Si $Tr(A) = 0$

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Si $Tr(A) \neq 0$

Alors 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n - 1 = \dim(E_0(A))$ et

$Tr(A)$ est une valeur propre simple de A, donc

$m_{Tr(A)}(A) = 1 = \dim(E_{Tr(A)}(A))$

Alors A est diagonalisable.

Si $Tr(A) = 0$

Alors $\chi_A = X^n$.

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Si $Tr(A) \neq 0$

Alors 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n - 1 = \dim(E_0(A))$ et

$Tr(A)$ est une valeur propre simple de A, donc

$m_{Tr(A)}(A) = 1 = \dim(E_{Tr(A)}(A))$

Alors A est diagonalisable.

Si $Tr(A) = 0$

Alors $\chi_A = X^n$.

D'où 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n \neq n - 1 = \dim(E_0(A))$

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Si $Tr(A) \neq 0$

Alors 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n - 1 = \dim(E_0(A))$ et

$Tr(A)$ est une valeur propre simple de A, donc

$m_{Tr(A)}(A) = 1 = \dim(E_{Tr(A)}(A))$

Alors A est diagonalisable.

Si $Tr(A) = 0$

Alors $\chi_A = X^n$.

D'où 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n \neq n - 1 = \dim(E_0(A))$

Ainsi A n'est pas diagonalisable.

Correction de la question 3

Tout d'abord $\chi_A = X^{n-1}(X - Tr(A))$ est scindé sur $\mathbb{R}$

Si $Tr(A) \neq 0$

Alors 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n - 1 = \dim(E_0(A))$ et

$Tr(A)$ est une valeur propre simple de A, donc

$m_{Tr(A)}(A) = 1 = \dim(E_{Tr(A)}(A))$

Alors A est diagonalisable.

Si $Tr(A) = 0$

Alors $\chi_A = X^n$.

D'où 0 est une valeur propre de multiplicité

$m_0(A) = n \neq n - 1 = \dim(E_0(A))$

Ainsi A n'est pas diagonalisable.

On en déduit

$$A \text{ est diagonalisable} \iff Tr(A) \neq 0$$

Méthode 2

Méthode 2

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Méthode 2

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$rg(A) = 1 \Longleftrightarrow \exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = X\ {}^tY$$

Méthode 2

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$rg(A) = 1 \Longleftrightarrow \exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = X\ {}^tY$$

2. On suppose que A est de rang 1.

Méthode 2

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$rg(A) = 1 \Longleftrightarrow \exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = X\ {}^tY$$

2. On suppose que A est de rang 1.
   a) Montrer que $A^2 = Tr(A)A$.

Méthode 2

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$rg(A) = 1 \iff \exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = X\ {}^tY$$

2. On suppose que A est de rang 1.
   a) Montrer que $A^2 = Tr(A)A$.
   b) En déduire que

$$A \text{ est diagonalisable} \iff Tr(A) \neq 0$$

Correction da la question 1

Correction da la question 1

$\Longleftarrow$) On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ où $x_1, .., x_n, y_1, .., y_n \in \mathbb{R}$

Correction da la question 1

$\Longleftarrow$) On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ où $x_1, .., x_n, y_1, .., y_n \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors } A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

Correction da la question 1

$\Longleftarrow$) On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ où $x_1, .., x_n, y_1, .., y_n \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors } A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_i y_j)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

Correction da la question 1

$\Longleftarrow$) On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ où $x_1, .., x_n, y_1, .., y_n \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors } A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_i y_j)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \forall j \in [\![1, n]\!],\ C_j = \begin{pmatrix} x_1y_j \\ \vdots \\ x_ny_j \end{pmatrix} = y_j \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y_j X \in vect(X)$$

Correction da la question 1

Correction da la question 1

Par suite $vect(C_1, ..., C_n) = vect(X)$, car $Y \neq 0$

Correction da la question 1

Par suite $vect(C_1, ..., C_n) = vect(X)$, car $Y \neq 0$
Ainsi $rg(A) = \dim(vect(X)) = 1$, car $X \neq 0$.

Correction da la question 1

Correction da la question 1

$\Longrightarrow$) On a $rg(A) = 1$, donc $\dim(vect(C_1, ..., C_n)) = 1$

Correction da la question 1

$\Longrightarrow$) On a $rg(A) = 1$, donc $\dim(vect(C_1, ..., C_n)) = 1$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que (X) une base de $vect(C_1, ..., C_n)$

Correction da la question 1

$\Longrightarrow$) On a $rg(A) = 1$, donc $\dim(vect(C_1, ..., C_n)) = 1$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que (X) une base de $vect(C_1, ..., C_n)$

Donc $\forall j \in [\![1, n]\!], \exists y_j \in \mathbb{R}, C_j = y_j X$

Correction da la question 1

$\Longrightarrow$) On a $rg(A) = 1$, donc $\dim(vect(C_1, ..., C_n)) = 1$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que (X) une base de $vect(C_1, ..., C_n)$

Donc $\forall j \in [\![1, n]\!], \exists y_j \in \mathbb{R}, C_j = y_j X$

$\Longrightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = y_j x_j = x_i y_j$

Correction da la question 1

$\Longrightarrow$) On a $rg(A) = 1$, donc $\dim(vect(C_1, ..., C_n)) = 1$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que (X) une base de $vect(C_1, ..., C_n)$

Donc $\forall j \in [\![1, n]\!], \exists y_j \in \mathbb{R}, C_j = y_j X$

$\Longrightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = y_j x_j = x_i y_j$

D'où $A = X\,{}^tY$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Correction da la question 1

$\Longrightarrow$) On a $rg(A) = 1$, donc $\dim(vect(C_1, ..., C_n)) = 1$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que (X) une base de $vect(C_1, ..., C_n)$

Donc $\forall j \in [\![1, n]\!], \exists y_j \in \mathbb{R}, C_j = y_j X$

$\Longrightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = y_j x_j = x_i y_j$

D'où $A = X\,{}^tY$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

De plus $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ (sinon $A = 0$, absurdre car $rg(A) = 1$).

Correction da la question 2 a)

Correction da la question 2 a)

Comme A est de rang 1, alors $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = X\ {}^tY$

Correction da la question 2 a)

Comme A est de rang 1, alors $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = X\ {}^tY$

Donc

$$A^2 = (X\ {}^tY)(X\ {}^tY)) = X\underbrace{({}^tYX)}_{Scalire}Y = ({}^tYX)(X\ {}^tY) = ({}^tYX)A$$

Correction da la question 2 a)

Comme A est de rang 1, alors $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = X\ {}^tY$

Donc

$$A^2 = (X\ {}^tY)(X\ {}^tY)) = X\underbrace{({}^tYX)}_{Scalire}Y = ({}^tYX)(X\ {}^tY) = ({}^tYX)A$$

Puisque $A = (x_iy_j)_{1\leq i,j\leq n}$, alors

$${}^tYX = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} y_kx_k = Tr(A)$$

Correction da la question 2 a)

Comme A est de rang 1, alors $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = X\ {}^tY$

Donc

$$A^2 = (X\ {}^tY)(X\ {}^tY)) = X\underbrace{({}^tYX)}_{Scalire}Y = ({}^tYX)(X\ {}^tY) = ({}^tYX)A$$

Puisque $A = (x_iy_j)_{1\leq i,j\leq n}$, alors

$${}^tYX = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} y_kx_k = Tr(A)$$

Par suite $A^2 = Tr(A)A$.

Correction da la question 2 b)

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$,

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$
Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de A

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$
Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de A
Donc A est diagonalisable.

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$
Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de A
Donc A est diagonalisable.
$\Longrightarrow$) Par l'absurde, supposons que $Tr(A) = 0$

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$
Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de A
Donc A est diagonalisable.
$\Longrightarrow$) Par l'absurde, supposons que $Tr(A) = 0$
Alors $A^2 = 0$

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$
Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de A
Donc A est diagonalisable.
$\Longrightarrow$) Par l'absurde, supposons que $Tr(A) = 0$
Alors $A^2 = 0$
Comme A est diagonalisable, il existe $(P, D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$
telle que $A = PDP^{-1}$

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$
Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de A
Donc A est diagonalisable.
$\Longrightarrow$) Par l'absurde, supposons que $Tr(A) = 0$
Alors $A^2 = 0$
Comme A est diagonalisable, il existe $(P, D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$
telle que $A = PDP^{-1}$
Donc $A^2 = PD^2P^{-1}$, ainsi $D^2 = P^{-1}A^2P = 0$

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$
Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de A
Donc A est diagonalisable.
$\Longrightarrow$) Par l'absurde, supposons que $Tr(A) = 0$
Alors $A^2 = 0$
Comme A est diagonalisable, il existe $(P, D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$
telle que $A = PDP^{-1}$
Donc $A^2 = PD^2P^{-1}$, ainsi $D^2 = P^{-1}A^2P = 0$
Or D est diagonale et $D^2 = 0$, alors $D = 0$, par suite $A = 0$

Correction da la question 2 b)

Comme $A^2 = Tr(A)A$, Alors
$P(X) = X^2 - Tr(A)X = X(X - Tr(A))$ est annulateur de A.
$\Longleftarrow$) Si $Tr(A) \neq 0$
Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de A
Donc A est diagonalisable.
$\Longrightarrow$) Par l'absurde, supposons que $Tr(A) = 0$
Alors $A^2 = 0$
Comme A est diagonalisable, il existe $(P, D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$
telle que $A = PDP^{-1}$
Donc $A^2 = PD^2P^{-1}$, ainsi $D^2 = P^{-1}A^2P = 0$
Or D est diagonale et $D^2 = 0$, alors $D = 0$, par suite $A = 0$
ce qui est absurde, car $rg(A) = 1$

Méthode 3

Méthode 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E de rang 1.

Méthode 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ ou $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Méthode 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ ou $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.

Méthode 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ ou $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.
   a) Vérifier que $f \circ f = 0$

Méthode 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ ou $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.
   a) Vérifier que $f \circ f = 0$
   b) En déduire que f n'est pas diagonalisable.

Méthode 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ ou $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.
   a) Vérifier que $f \circ f = 0$
   b) En déduire que f n'est pas diagonalisable.
3. On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Méthode 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ ou $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
2. On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.
   a) Vérifier que $f \circ f = 0$
   b) En déduire que f n'est pas diagonalisable.
3. On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
   Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = diag(0, ..., 0, Tr(f))$.

Correction da la question 1

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.
Puisque $Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f)$

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.
Puisque $Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f)$
Alors $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) \leq \dim(Im(f)) = 1$

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.
Puisque $Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f)$
Alors $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) \leq \dim(Im(f)) = 1$
Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 1$

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.

Puisque $Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f)$

Alors $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) \leq \dim(Im(f)) = 1$

Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 1$

Alors $\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f) \\ \dim(Ker(f) \cap Im(f)) = \dim(Im(f)) \end{cases}$

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.

Puisque $Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f)$

Alors $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) \leq \dim(Im(f)) = 1$

Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 1$

Alors $\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f) \\ \dim(Ker(f) \cap Im(f)) = \dim(Im(f)) \end{cases}$

Donc $Ker(f) \cap Im(f) = Im(f)$, d'où $Im(f) \subset Ker(f)$

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.

Puisque $Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f)$

Alors $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) \leq \dim(Im(f)) = 1$

Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 1$

Alors $\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f) \\ \dim(Ker(f) \cap Im(f)) = \dim(Im(f)) \end{cases}$

Donc $Ker(f) \cap Im(f) = Im(f)$, d'où $Im(f) \subset Ker(f)$

Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 0$

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.

Puisque $Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f)$

Alors $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) \leq \dim(Im(f)) = 1$

Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 1$

Alors $\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f) \\ \dim(Ker(f) \cap Im(f)) = \dim(Im(f)) \end{cases}$

Donc $Ker(f) \cap Im(f) = Im(f)$, d'où $Im(f) \subset Ker(f)$

Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 0$

Puisque

$\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) \quad \text{Théorème du Rang} \end{cases}$

Correction da la question 1

Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$.

Puisque $Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f)$

Alors $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) \leq \dim(Im(f)) = 1$

Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 1$

Alors $\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) \subset Im(f) \\ \dim(Ker(f) \cap Im(f)) = \dim(Im(f)) \end{cases}$

Donc $Ker(f) \cap Im(f) = Im(f)$, d'où $Im(f) \subset Ker(f)$

Si $\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 0$

Puisque

$\begin{cases} Ker(f) \cap Im(f) = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) \quad \text{Théorème du Rang} \end{cases}$

Alors $E = Ker(f) \oplus Im(f)$

Correction da la question 2 a)

Correction da la question 2 a)

On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.

Correction da la question 2 a)

On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.
Puisque $\forall x \in E, f(x) \in Im(f)$

Correction da la question 2 a)

On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.
Puisque $\forall x \in E, f(x) \in Im(f)$
Alors $\forall x \in E, f(x) \in Ker(f)$

Correction da la question 2 a)

On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.
Puisque $\forall x \in E, f(x) \in Im(f)$
Alors $\forall x \in E, f(x) \in Ker(f)$
D'où $\forall x \in E, f(f(x)) = 0$

Correction da la question 2 a)

On suppose que $Im(f) \subset Ker(f)$.
Puisque $\forall x \in E, f(x) \in Im(f)$
Alors $\forall x \in E, f(x) \in Ker(f)$
D'où $\forall x \in E, f(f(x)) = 0$
Alors $f \circ f = 0$

Correction da la question 2 b)

Correction da la question 2 b)

On a $f \circ f = 0$.

Correction da la question 2 b)

On a $f \circ f = 0$.
Donc $P(X) = X^2$ est annulateur de f.

Correction da la question 2 b)

On a $f \circ f = 0$.
Donc $P(X) = X^2$ est annulateur de f.
D'où $\pi_f = X$ ou $\pi_f = X^2$

Correction da la question 2 b)

On a $f \circ f = 0$.
Donc $P(X) = X^2$ est annulateur de f.
D'où $\pi_f = X$ ou $\pi_f = X^2$
Si $\pi_f = X$, alors $f = 0$, ce qui est absurde, car $rg(f) = 1$.

Correction da la question 2 b)

On a $f \circ f = 0$.
Donc $P(X) = X^2$ est annulateur de f.
D'où $\pi_f = X$ ou $\pi_f = X^2$
Si $\pi_f = X$, alors $f = 0$, ce qui est absurde, car $rg(f) = 1$.
Par suite $\pi_f = X^2$ n'est pas à racines simples, donc f n'est pas diagonalisable.

Correction da la question 3

Correction da la question 3

On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Correction da la question 3

On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$ et $\dim(Ker(f)) = n - 1$ (Théorème du rang)

Correction da la question 3

On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$ et $\dim(Ker(f)) = n - 1$ (Théorème du rang)
Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de $Ker(f)$ et (e_n) une base de $Im(f)$

Correction da la question 3

On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$ et $\dim(Ker(f)) = n - 1$ (Théorème du rang)
Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de $Ker(f)$ et (e_n) une base de $Im(f)$
Puisque $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, alors $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à la somme directe.

Correction da la question 3

On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$ et $\dim(Ker(f)) = n - 1$ (Théorème du rang)
Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de $Ker(f)$ et (e_n) une base de $Im(f)$
Puisque $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, alors $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à la somme directe.
$\forall k \in [\![1, n-1]\!], f(e_k) = 0$ et $f(e_n) \in Im(f) = vect(e_n)$,

Correction da la question 3

On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$ et $\dim(Ker(f)) = n - 1$ (Théorème du rang)
Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de $Ker(f)$ et (e_n) une base de $Im(f)$
Puisque $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, alors $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à la somme directe.
$\forall k \in [\![1, n-1]\!], f(e_k) = 0$ et $f(e_n) \in Im(f) = vect(e_n)$,
Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(e_n) = \lambda e_n$

Correction da la question 3

On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$ et $\dim(Ker(f)) = n - 1$ (Théorème du rang)
Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de $Ker(f)$ et (e_n) une base de $Im(f)$
Puisque $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, alors $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à la somme directe.
$\forall k \in [\![1, n-1]\!], f(e_k) = 0$ et $f(e_n) \in Im(f) = vect(e_n)$,
Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(e_n) = \lambda e_n$
Par suite $Mat_{\mathcal{B}}(f) = diag(0, ..., 0, \lambda)$.

Correction da la question 3

On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
Comme $rg(f) = 1$, alors $\dim(Im(f)) = 1$ et $\dim(Ker(f)) = n - 1$ (Théorème du rang)
Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de $Ker(f)$ et (e_n) une base de $Im(f)$
Puisque $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, alors $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à la somme directe.
$\forall k \in [\![1, n-1]\!], f(e_k) = 0$ et $f(e_n) \in Im(f) = vect(e_n)$,
Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(e_n) = \lambda e_n$
Par suite $Mat_{\mathcal{B}}(f) = diag(0, ..., 0, \lambda)$.
Par la trace, on en déduit que $\lambda = Tr(f)$.

Merci pour votre attention