I Description du mouvement d'un solide

I.1 Solide

I.1.a) Définition

Un <u>solide</u> est un système matériel indéformable dont les points restent à distance constante les uns des autres : $\forall\ A,\ B \in$ solide $AB = \text{cste}$

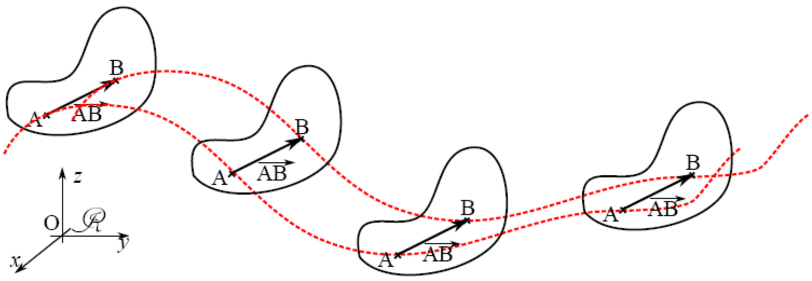
On oppose les solides (indéformables) aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns aux autres. Les déformations ou les ruptures du solide sont exclues de cette étude.
<u>Exemples</u> : une boule de billard est un solide indéformable tandis qu'un ressort est un système déformable.

I.2 Translation

I.2.a) Définition

On étudie le mouvement d'un solide $\mathcal{S}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$.

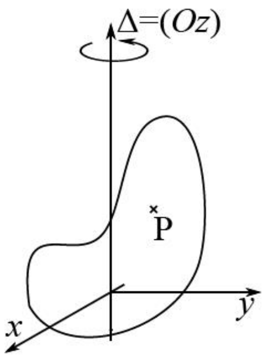
Un solide est en **<u>translation</u>** par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ lorsque les directions du repère lié au solide restent fixes par rapport au référentiel d'étude.
Autrement dit : Le solide est en translation ssi $\forall(A, B) \in$ solide , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est constant.

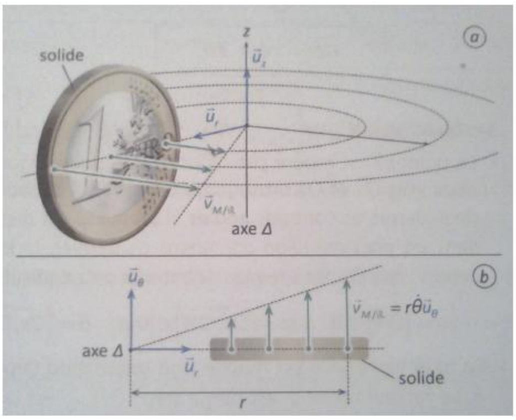


I.3 Rotation autour d'un axe fixe

I.3.a) Définition

Un solide a un mouvement de **<u>rotation autour d'un axe fixe</u>** par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ si les points liés rigidement au solide et situés sur cet axe à un instant quelconque sont fixes par rapport à $\mathscr{R}$ et au solide. Cette droite peut appartenir ou non au solide en rotation.





Exemples :

- mouvement d'un CD ou d'un DVD en lecture
- mouvement de rotation propre de la Terre autour de l'axe Nord-Sud
- mouvement d'une roue d'un voiture roulant en ligne droite par rapport au référentiel de la voiture.

III Loi du moment cinétique

III.1 Moment cinétique d'un système de points – moment d'inertie

III.1.a) Définition

Le moment cinétique du système $\mathcal{S} = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ par rapport à un axe orienté $\Delta = (O;\overrightarrow{u_\Delta})$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est la somme des moments cinétiques de chacun des points par rapport à Δ :

$$\boxed{L_{\Delta/\mathscr{R}}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} L_{\Delta/\mathscr{R}}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\overrightarrow{v_{/\mathscr{R}}}(M_i)\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

III.1.b) Introduction du moment d'inertie

L'axe Δ étant fixe dans $\mathscr{R}$, on repère les points M_i par leurs coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec Δ : $M_i(r_i, \theta_i, z_i)$.

Application 4

1. Exprimer le moment cinétique d'un point M_i par rapport à Δ en fonction de m_i, r_i et ω la vitesse angulaire de rotation du solide.
2. En déduire que le moment cinétique du solide $\mathcal{S}$ par rapport à Δ s'écrit sous la forme : $L_\Delta(\mathcal{S}) = J_\Delta\omega^2$, avec J_Δ le moment d'inertie dont on en donnera l'expression.

Le moment d'inertie J_Δ du solide $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe Δ est défini par la relation suivante : $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$
Avec r_i la première coordonnée cylindrique d'axe $(Oz) = \Delta$ du point M_i c'est-à-dire la distance entre le point M_i et l'axe (Oz).

Rq : si l'on modélise le solide $\mathcal{S}$ par une répartition continue de masse alors la somme précédente devient une intégrale sur le volume du solide.

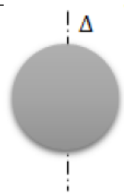
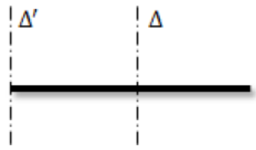
III.1.c) Bilan : relation entre moment cinétique scalaire du solide et moment d'inertie

Le moment cinétique d'un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour de l'axe fixe Δ à la vitesse angulaire ω, par rapport à l'axe Δ s'écrit : $\boxed{L_\Delta(\mathcal{S}) = J_\Delta\omega}$, avec J_Δ le moment d'inertie du solide $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe Δ.

III.1.d) Quelques valeurs de moment d'inertie

Le moment d'inertie est d'autant plus élevé que la masse du solide est éloignée de l'axe de rotation.

Pour information, on donne les moments d'inertie par rapport à l'axe Δ pour des solides homogènes de masse totale m :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule (pleine) de rayon R	barre de longueur L
			
$J_\Delta = mR^2$	$J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$	$J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$	$J_\Delta = \frac{1}{12}mL^2$ $J_{\Delta'} = \frac{1}{3}mL^2$

III.2.a) Moment d'une force quelconque pour un solide

Pour un solide, le moment d'une force $\overrightarrow{F_{\to M_i}}$ subie par un point M_i du solide par rapport à un point O quelconque est : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_{\to M_i}}) = \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\to M_i}}$
M_i est le point d'application de la force et c'est ce point qui intervient pour calculer le moment de la force.

III.2.b) Moment des forces extérieures pour un solide

Le moment des forces extérieures par rapport au point quelconque O est la somme des moments des différentes forces extérieures qui s'exercent sur chacun des points du solide : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O^{\text{ext}}} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}}$

III.2.c) Moment des forces intérieures pour un solide

Considérons deux points M_p et M_q du solide $\mathcal{S}$.
Calculons $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,qp}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O,p}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O,q}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{f_{M_q\to M_p}} + \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{f_{M_p\to M_q}}$,
Or d'après la troisième loi de Newton $\overrightarrow{f_{M_p\to M_q}} = -\overrightarrow{f_{M_q\to M_p}}$,
donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,qp}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{f_{M_q\to M_p}} - \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{f_{M_q\to M_p}} = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right) \wedge \overrightarrow{f_{M_q\to M_p}}$, donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,qp}} = \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{f_{M_q\to M_p}}$
Toujours d'après la troisième loi de Newton la force $\overrightarrow{f_{M_q\to M_p}}$ est dirigée selon la droite (PQ), donc le produit vectoriel est nul.

Le moment résultant des forces intérieures est nul.

III.3 Couple

Un **couple** est un ensemble de forces de résultante nulle, mais de moment total non nul. Par abus de langage, « couple » désignera souvent le moment total, qui sera noté $\overrightarrow{\Gamma}$.

Exemple : On exerce deux forces opposées $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ en deux points différents d'un solide qui peut tourner autour d'un axe.

III.4 Dispositifs rotatifs

III.4.a) Liaison pivot

Une **liaison pivot** d'axe Δ entre deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est une liaison n'autorisant qu'une rotation de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$ autour d'un seul axe Δ, fixe par rapport à $\mathcal{S}_1$.

La liaison pivot peut être réalisée en emboîtant deux cylindres sur le même axe et en réalisant des butées pour empêcher les cylindres de coulisser le long de leur axe commun. Le contact entre les deux cylindres conduit à l'existence de forces de frottement que l'on peut réduire au minimum en réalisant des roulements à billes.
La prise en compte des frottements revient à considérer des forces exercées par le dispositif sur le solide. Ces forces orthoradiales engendrent un couple de frottement dont le moment scalaire est non nul : $\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot}) \neq 0$

La **liaison pivot d'axe Δ est parfaite** si le moment scalaire de l'action de contact entre les deux solides par rapport à l'axe Δ est nul : $\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot parfaite}) = 0$

⚠ La résultante de l'action mécanique exercée par le support sur le solide n'est pas nulle puisqu'elle assure le guidage en rotation autour de l'axe Δ, seul le moment de l'action par rapport à l'axe est nul.

III.4.b) Moteurs et freins

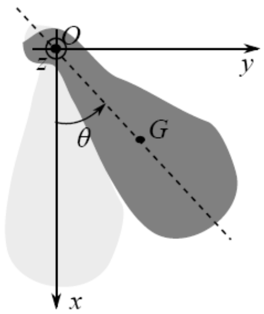
- Un **dispositif rotatif** est un dispositif dans lequel un solide indéformable appelé **rotor** est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile appelé **stator**.
- Un **moteur** est utilisé pour entrainer une autre pièce mécanique en rotation. Le stator exerce un couple moteur sur le rotor qui entraine alors la pièce mécanique.
- Un **frein** est utilisé pour freiner le rotor. Le stator exerce sur le rotor un couple de freinage.

Le couple moteur ou le couple de freinage est en général exercé par un dispositif électromécanique grâce au phénomène d'induction qui sera étudié dans la partie V. Induction (cf mois de juin).

III.5 Loi du moment cinétique A faire

III.6 Applications

III.6.a) Pendule pesant



Un **pendule pesant** est un solide de masse m de forme quelconque mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son axe de gravité G.

On note (Oz) l'axe de rotation du solide et $J_{(Oz)}$ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz). On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz).

On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox).

Application 5

Mise en équation

1. Préciser les actions extérieures auxquelles est soumis le solide.
2. Exprimer les moments de ces actions par rapport à l'axe (Oz). On notera d la distance OG.
3. Exprimer le moment cinétique du solide par rapport à l'axe (Oz).
4. En appliquant la loi du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz), établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Résolution numérique

5. La résoudre dans le cas des petites oscillations et donner l'expression de la période propre. Dépend-elle de l'amplitude du mouvement ?
6. Proposer un protocole pour mesurer le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz).
7. Pour des mouvements d'amplitude quelconque, établir une intégrale première du mouvement reliant $\dot{\theta}^2$ et $\cos(\theta)$. Commenter.
8. On a tracé ci-dessous les courbes $\theta(t)$ pour différentes conditions initiales. Les commenter.
9. Comment évolue la période des oscillations avec l'amplitude ?

Voir l'animation :
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.html

Portrait de phase

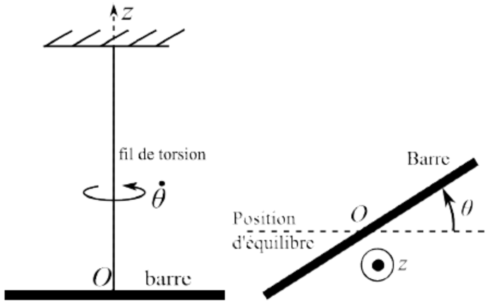
10. Commenter les portraits de phase tracés ci-dessous pour différentes conditions initiales. Distinguer les deux types de mouvements possibles.

III.6.b) Pendule de torsion

Le pendule de torsion est constitué d'une barre homogène de longueur L, de masse m et fixée en un point O (confondu avec le centre d'inertie de la barre) à un fil.

On fait tourner le fil sur lui-même de manière à le « tordre » et on lâche sans vitesse initiale.
La barre se met à tourner autour de l'axe z.

Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe $\Delta = (O;\overrightarrow{e_z}) = (G;\overrightarrow{e_z})$ est noté J. Il vaut $J = \dfrac{1}{12}mL^2$.



L'action du fil sur la barre est modélisée par un couple de rappel de moment par rapport à l'axe du fil $\boxed{\Gamma = -C\theta}$ appelé **couple de torsion** : le couple de torsion exercé par le fil est proportionnel à l'angle de torsion θ.

Application 6

Équation du mouvement

1. Faire un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur la barre.
2. Exprimer le moment de ces actions mécaniques par rapport à l'axe (Oz).
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.
4. Proposer une analogie avec l'oscillateur harmonique.
5. À partir de l'équation différentielle précédente, déterminer une intégrale première du mouvement.

IV Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation

IV.1 Énergie cinétique

IV.1.a) Définition générale

L'**énergie cinétique** d'un système $\mathcal{S} = \{M_i(m_i)\}_{i\in[1,n]}$ est donnée par $\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$

IV.1.b) Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit l'axe Δ fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ d'étude, on étudie le cas où le solide $\mathcal{S}$ est en rotation autour de l'axe Δ.

Application 7

1. Exprimer la vitesse v_i du point M_i en utilisant les coordonnées cylindriques d'axe Δ.
2. En déduire l'expression de l'énergie cinétique du solide $\mathcal{S}$ en faisant apparaître le moment d'inertie J_Δ de $\mathcal{S}$ par rapport à Δ et la vitesse angulaire de rotation ω.
3. Exprimer également l'énergie cinétique de $\mathcal{S}$ en fonction du moment cinétique de $\mathcal{S}$ par rapport à Δ et de ω.

Remarque.
Pour un solide en translation, tous les points ont même mouvement, donc on peut écrire qu'ils ont tous le même vecteur vitesse $\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v}(G)$. Ainsi $\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_G^2 = \frac{1}{2}mv_G^2$. ***Un solide en translation s'étudie comme un point matériel confondu avec le centre d'inertie G du solide qui concentrerait toute la masse du solide.***

IV.2 Puissance et travail des forces

IV.2.a) Puissance et travail d'une force quelconque pour un solide

- La puissance d'une force $\overrightarrow{F_{\to M_i}}$ subie par un point M_i du solide $\mathcal{S}$ s'écrit : $\mathscr{P}(\overrightarrow{F_{\to M_i}}) = \overrightarrow{F_{\to M_i}} \cdot \overrightarrow{v_i}$, avec $\overrightarrow{v_i}$ le vecteur vitesse du point M_i.
- Le travail élémentaire d'une force $\overrightarrow{F_{\to M_i}}$ subie par un point M_i du solide $\mathcal{S}$ s'écrit : $\delta\mathcal{W}(\overrightarrow{F_{\to M_i}}) = \overrightarrow{F_{\to M_i}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM_i} = \mathscr{P}(\overrightarrow{F_{\to M_i}})\mathrm{d}t$, avec $\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}$ le vecteur déplacement élémentaire du point M_i et dt un temps infinitésimal.

IV.2.b) Puissance et travail des forces extérieures pour un solide

➜ **Cas général**

La puissance des forces extérieures est la somme des puissances des différentes forces extérieures qui s'exercent sur chacun des points du solide : $\mathscr{P}^{\text{ext}} = \sum_i \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}} \cdot \overrightarrow{v_i}$

Le travail élémentaire des forces extérieures est la somme des travaux élémentaires des différentes forces extérieures qui s'exercent sur chacun des points du solide : $\delta\mathcal{W}^{\text{ext}} = \sum_i \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM_i} = \mathscr{P}^{\text{ext}}\mathrm{d}t$

IV.2.b) Puissance et travail des forces extérieures pour un solide

➜ **Cas général**

La puissance des forces extérieures est la somme des puissances des différentes forces extérieures qui s'exercent sur chacun des points du solide : $\mathscr{P}^{\text{ext}} = \sum_i \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}} \cdot \overrightarrow{v_i}$

Le travail élémentaire des forces extérieures est la somme des travaux élémentaires des différentes forces extérieures qui s'exercent sur chacun des points du solide : $\delta\mathcal{W}^{\text{ext}} = \sum_i \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M_i}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM_i} = \mathscr{P}^{\text{ext}}\mathrm{d}t$

Le travail « intégré » des forces extérieures entre deux dates t_1 et t_2 s'exprime alors ainsi :
$\mathcal{W}^{\text{ext}} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{W}^{\text{ext}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}^{\text{ext}}\mathrm{d}t$

➜ **Solide en rotation autour d'un axe fixe – Lien puissance des forces / moment des forces**

Considérons une force $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur un point M_i du solide $\mathcal{S}$ en rotation autour de l'axe orienté fixe $\Delta = (O;\overrightarrow{u_\Delta})$ la vitesse angulaire ω.

Application 8

On exprime la force $\overrightarrow{F}$ dans la base cylindrique d'axe $(Oz) = \Delta$: $\overrightarrow{F} = F_r\overrightarrow{e_r} + F_\theta\overrightarrow{e_\theta} + F_z\overrightarrow{e_z}$.

1. En utilisant l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_i}$ du point M_i dans la base cylindrique, exprimer le travail de la force $\overrightarrow{F}$.
2. Exprimer, toujours dans la même base, le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport à l'axe Δ.
3. En déduire une relation entre la puissance de la force $\overrightarrow{F}$ et le moment $\mathcal{M}_\Delta$ de la force par rapport à Δ.

IV.3 Lois de l'énergie et de la puissance cinétiques pour un solide

IV.3.a) Cas général

Soit $\mathcal{S}$ un <u>solide</u> (<u>système indéformable</u>) que l'on étudie dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen.
<u>**Loi de la puissance cinétique**</u> : $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}^{\text{ext}}$
<u>**Loi de l'énergie cinétique entre $A(t_A)$ et $B(t_B)$**</u> : $\Delta\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = \mathcal{W}^{\text{ext}}$
Les forces intérieures n'interviennent pas dans les lois de l'énergie et de la puissance cinétiques car pour un solide $\mathscr{P}^{\text{int}} = 0$ et $\mathcal{W}^{\text{int}} = 0$ (cf § précédent).

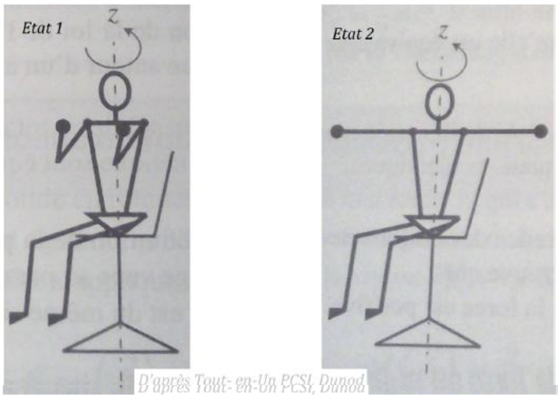
IV.3.b) Cas d'un solide en rotation

Soit $\Delta = (O, \overrightarrow{u_\Delta})$ un axe fixe par rapport à $\mathscr{R}$ un référentiel galiléen. Soit $\mathcal{S}$ un solide tel que son mouvement par rapport à $\mathscr{R}$ est une rotation autour de l'axe ω et on suppose que son moment d'inertie J_Δ est constant (solide fermé).

Application 9 Équivalence LMC/LPC pour un solide en rotation
Montrer que les lois de la puissance cinétique et du moment cinétique par rapport à l'axe Δ sont équivalentes.

V Système déformable

Une personne est assise sur un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe vertical Δ. La personne se met en rotation, les bras repliés sur elle-même (état 1), à la vitesse angulaire ω_1. Ensuite elle détend les bras (état 2) et sa rotation se fait à une vitesse angulaire différente ω_2.



Application 10

1. Que dire du moment cinétique scalaire L_Δ du système {personne-siège} pendant cette opération ?
2. Dans les états initial et final, le système est assimilable à un solide, de moments d'inertie initial J_1 par rapport à l'axe Δ et J_2 dans l'état final.
   Comparer J_1 et J_2.
3. Trouver une relation entre les moments d'inertie et les vitesses angulaires initiaux et finaux. Commenter le résultat.
4. Appliquer la loi de l'énergie cinétique au système entre les états 1 et 2. Commenter le résultat.
5. L'expérience est plus spectaculaire si la personne tient dans ses mains des haltères. Expliquer pourquoi.
6. Ensuite, la personne replie à nouveau les bras. Quelle est la vitesse angulaire ω_3 dans cet état noté 3 ?
7. Appliquer de nouveau la loi de l'énergie cinétique entre les états 2 et 3. Qu'en penser ?

<u>**Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable :**</u> $\boxed{W_{\text{int}} \neq 0}$; $\Delta\mathscr{E}_c(\mathcal{S}) = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$
<u>**Loi de la puissance cinétique pour un système déformable :**</u> $\boxed{\mathscr{P}_{\text{int}} \neq 0}$; $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}_{\text{ext}} + \mathscr{P}_{\text{int}}$