MP	TD Transferts Thermiques	16/03/2020

Conduction - Convection.

Exercice I : Calcul de résistances thermiques.

On considère un manchon cylindrique de conductivité thermique λ, de rayon intérieur r_1, de rayon extérieur r_2 et de hauteur H. dans les deux cas suivants, calculer la résistance thermique du manchon :

Les faces latérales cylindriques sont isolées et les sections de base isothermes.

La paroi intérieure est portée à la température T_1 et la paroi extérieur à la température T_2. Les bases sont isolées thermiquement.

Même question pour une coquille sphérique de conductivité thermique λ, de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2. La paroi intérieure est portée à la température T_1 et la paroi extérieure à la température T_2.

Rep : 1. $H/\left[\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)\lambda\right]$ 2. $\frac{1}{2\pi H\lambda}\mathrm{Ln}\frac{r_2}{r_1}$ 3. $\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

Exercice II : Transmission thermique par une barre cylindrique.

On considère une barre de cuivre homogène, d'axe Ox, de section droite d'aire S et de périmètre L, de longueur très grande. En x = 0, la barre est en contact thermique avec un milieu à température T_A uniforme et constante. La surface latérale de la barre est en contact avec l'air ambiant de température uniforme et constante T_0.

On désigne par λ la conductivité thermique du cuivre, par h le coefficient de transfert conducto-convectif avec l'air supposés constants. On se propose d'étudier le champ des températures T(x) dans la barre en régime stationnaire. On posera $\theta(x) = T(x) - T_0$.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(x)$. On introduira une longueur caractéristique a. En déduire l'expression de $\theta(x)$ et également celle du flux conductif thermique Φ^{cd} à travers la section de la barre d'abscisse x. **A.N** : On donne $\lambda = 400 W.m^{-1}.K^{-1}$; $h = 8 W.m^{-2}.K^{-1}$. La barre est un cylindre à section droite circulaire de diamètre d = 2cm. Calculer a.

La longueur L de la barre est telle que L/a >> 1. Définir et calculer sa conductance thermique.

a) On se propose de montrer l'analogie du comportement thermique précédent avec le comportement électrique d'un câble coaxial en électricité. Etablir les équations différentielles relatives à la tension U(x) et à l'intensité du courant I(x) en régime stationnaire. On désignera par R la résistance du câble par unité de longueur et de même par G sa conductance de fuite par unité de longueur.

b) Etablir la correspondance entre les grandeurs θ, Φ^{cd} d'une part et V et I d'autre part. En déduire d'autres correspondances.

Rep : 1. $\frac{d^2\theta}{dx^2}-\frac{\theta}{a^2}=0$; a = 0.5m.

Exercice III : Cylindre parcouru par une courant électrique ou (et) thermique.

On considère un conducteur cylindrique massif (électrique et thermique) d'axe Ox, de longueur L, de section droite d'aire S de surface latérale d'aire Σ. Le conducteur est supposé homogène et isotrope. μ, c et

EL HISSE ABDERRAHMAN

λ désignant respectivement la masse volumique, la chaleur massique et la conductivité thermique supposées constantes ; η est sa résistivité électrique.

1. La surface latérale du cylindre est calorifugée par une paroi adiabatique. Les extrémités du conducteur sont maintenues aux températures T_1 et T_2 constantes. Le conducteur est traversé par un courant d'intensité I constante dans le sens des x croissants. Le régime étant supposé stationnaire, écrire l'équation qui régit le champ des températures T. En déduire l'expression de T. On posera : $A = (\eta I^2)/(\lambda S^2)$. Etudier les variations de j^{cd} avec la variable de position adéquate.

Rep : $T(u) = -\frac{A}{2}u^2 + \left[\frac{1}{L}\left(T_2 - T_1\right) + \frac{A}{2}L\right]u + T_1$

2. Ce conducteur cylindrique n'est plus parcouru par un courant électrique. Une de ses faces transversales (à son axe Ox) est maintenue à la température constante et uniforme T_0. La paroi latérale de ce conducteur est en contact avec l'air ambiant à la température constante T^∞. Le coefficient d'échange conducto-convectif est h. Dans le cas où l'extrémité libre de la barre est aussi en contact avec l'air ambiant, faire un bilan énergétique et établir l'équation de la chaleur satisfaite par la température dans cette barre. On prendra garde d'expliciter clairement les diverses conditions aux limites. On ne s'intéressera qu'au régime permanent. Résoudre l'équation précédente et déterminer la fonction T. On posera $m = \sqrt{2h/\lambda R}$. Quel est le flux de chaleur évacué par la barre ?

Rep : $T(u) = T^\infty + \left(T_0 - T^\infty\right)\frac{(\lambda m + h)\exp[m(L-u)] + (\lambda m - h)\exp[-m(L-u)]}{(\lambda m + h)\exp[mL] + (\lambda m - h)\exp[-mL]}$

PROBLEME : Conduction de la chaleur.

Ce problème traite de différentes applications de la conduction de la chaleur à partir de la loi de Fourier. On considère un milieu (M) continu, conducteur de la chaleur, isotrope et homogène, caractérisé par sa masse volumique ρ, sa chaleur massique c et sa conductivité thermique λ, toutes uniformes et constantes.

Première partie : Equations Générales.

1. a) En faisant un bilan énergétique dans un volume V du milieu, et en supposant que celui-ci ne contient aucune source d'énergie, démontrer la relation : $\iiint_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = -\oiint_S \vec{j}_Q . d^2\vec{S}$.

b) On définit la diffusivité thermique par $h = \lambda/(\rho c)$ (à ne pas confondre ici avec le coefficient de transfert conducto-convectif). Etablir l'équation (E1) de la chaleur. Préciser la dimension et l'unité de la diffusivité thermique.

c) On suppose dans cette question qu'il existe dans le milieu des sources caractérisées par p_e, la puissance interne créée par unité de volume dans le matériau. Comment se modifie l'équation de la chaleur ?

2. Le milieu ne possède pas de source de chaleur et l'on suppose que la température ne dépend que de la coordonnée z et du temps. Comment s'écrit alors l'équation de la chaleur (E2) ?

3. a) On cherche pour l'équation (E2) de la chaleur des solutions normales, c'est à dire sous la forme $T(z,t) = f(z)\times g(t)$. Déterminer les équations différentielles que vérifient séparément f(z) et g(t). On introduira dans ces équations une constante k réelle homogène à l'inverse d'une longueur .

b) En déduire une solution particulière de T(z,t) donnée pour une valeur de k qui peut être positive ou négative.

c) Montrer que la solution générale T(z,t) peut s'écrire : $T(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp\left(ikz - k^2 ht\right)dk$, si l'on suppose que k peut prendre continûment une infinité de valeurs.

d) On note $T_0(z) = T(z,t = 0)$. On définit en mathématiques la transformation de Fourier de la façon suivante : étant donnée une fonction de la forme : $\Omega(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\exp(-i\omega t)dt$, on peut écrire : $u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$. En déduire l'expression complète, sous forme d'une intégrale simple, de T(z,t) sachant que : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\mu - \gamma k^2)dk = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\exp\left(-\frac{\mu^2}{4\gamma}\right)$

4. a) A l'instant initial, le plan $z = 0$ est porté à haute température. Cette distribution initiale d'un contenu calorifique fini appliqué de façon discontinue en $z = 0$ s'exprime proportionnellement à la distribution de Dirac $\delta(z)$, dont il suffit ici de connaître la définition : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z)f(z)dz = f(0)$. On posera donc $T_0(z) = \theta_0.\delta(z)$, où θ_0 est une constante. Monter que : $T(z,t) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{\pi h t}}\exp(-\frac{z^2}{4ht})$. Représenter l'allure de cette distribution de température T(z) à deux instants t_1 et t_2 avec $t_2 > t_1$.

b) Montrer que chaque plan d'abscisse $z = z_0$ est atteint par une « bouffée de chaleur » à un instant t_{max} que l'on précisera.

Deuxième partie : Refroidissement d'une ailette.

On considère une ailette de refroidissement constituée du matériau (M), de section rectangulaire constante de côtés a (|| à Ox) et b (|| à Oy) et de longueur L parallèle à l'axe zz'. L'épaisseur b de cette ailette est supposée négligeable devant a et L. L'ailette est fixée sur une paroi de température T_0, parallèle au plan xOy et baigne dans un milieu de température T_a. L'échange de chaleur entre un point de l'ailette de température T et le milieu ambiant se fait par convection, la puissance ainsi cédée par l'unité de surface de l'ailette à l'extérieur étant : $\varphi = \alpha(T - T_a)$. α est le coefficient d'échange conducto-convectif. On posera $m^2 = 2\alpha/(b\lambda)$.

Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit, en régime permanent, la température de l'ailette en faisant un bilan d'énergie entre les deux sections de cotes z et z + dz.

a) Préciser les conditions aux limites en z = et z = L, en supposant que le matériau de l'ailette est très conducteur, si bien que $\alpha L << \lambda$.

b) Résoudre complètement cette équation différentielle.

7. Quelle serait la loi T*(z) si l'ailette avait une longueur infinie ? Evaluer une condition portant sur L et sur m pour qu'une ailette réelle puisse être assimilée à une ailette infinie.
8. Quelle est la quantité de chaleur évacuée par unité de temps pour une ailette de longueur L ? Même question pour une ailette infinie.

Troisième Partie : Conduction entre deux sphères.

9. Soient deux sphères concentriques (S1) et (S2) de centre O, de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$; les deux sphères sont portées respectivement aux températures T_1 et T_2, toutes les deux constantes, avec $T_1 > T_2$. L'espace compris entre les deux sphères est rempli du matériau (M) ne comportant pas de source d'énergie. On appelle résistance thermique le rapport $R_{th} = (T_1 - T_2)/\Phi$ où Φ est le flux de chaleur traversant le conducteur (M). Calculer R_{th} et donner l'expression de la loi T(r) dans le milieu conducteur.
10. Les deux sphères ont la même capacité calorifique Γ et une grande conductivité thermique, si bien qu'on peut à chaque instant négliger la capacité calorifique du milieu (M) et considérer que chaque sphère possède une température uniforme. L'ensemble est isolé de façon qu'il n'existe aucun échange

thermique entre ce système et l'extérieur. Les sphères sont portées aux températures initiales T_{10} et T_{20} avec $T_{10} > T_{20}$. Donner les lois d'évolution de $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

11. Exprimer la variation d'entropie du système entre l'état initial et l'instant t en fonction de $T_1(t)$ et $T_2(t)$ et conclure.

Quatrième partie : conduction entre deux plans.

On considère un système formé de deux plans parallèles (P1) et (P2) orthogonaux à l'axe z'z. Les plans sont distants de e et maintenus respectivement aux températures T_1 et T_2, toutes les deux constantes, avec $T_1 > T_2$. Entre les plans se trouve le matériau (M) sans source d'énergie. Ces plans sont de grande taille, si bien qu'on peut négliger les effets de bord et les considérer comme infinis. Donner la valeur et l'orientation du vecteur densité surfacique de flux thermique $\vec{j}_Q$ entre les plaques, noté $\vec{j}_0$ en régime permanent.

On place entre les plaques une sphère (S) de centre O et de rayon a, de conductivité thermique idéalement nulle et l'on veut déterminer l'allure des lignes de courant thermique $\vec{j}_Q$ une fois que s'est établi un nouveau régime permanent. Le rayon de la sphère est petit devant la distance qui sépare les plans. Montrer en considérant les conditions aux limites, que la superposition d'un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$ et du champ d'un dipôle de moment électrique $\vec{p} = -p\vec{e}_z$ placé en O est susceptible de fournir une solution de l'équation que doit vérifier la température en tout point. Donner les expressions des composantes radiale et orthoradiale de $\vec{j}_Q$ en un point M du milieu conducteur en fonction des cordonnées sphériques du point.

En quels points de la surface de la sphère le module de $\vec{j}_Q$ est-il maximum ? En quels points est-il nul ? En déduire l'allure des lignes de courant