Espaces vectoriels, et applications linéaires

Exercice 1.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par

$$(a + i.b).(x, y) = (a.x - b.y, a.y + b.x)$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Celui-ci est appelé complexifié de E.

Exercice 2.

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$

indication : E_2 n'est pas un sous ev car $(1, 0, -1) + (1, 0, 1) \notin E_2$, et de même pour E_4.

Exercice 3.

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
3. L'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3) du système : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 0. \end{cases}$
4. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
5. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.
6. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
7. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
8. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4. Identifier cet ensemble.
9. L'ensemble des polynômes de degré exactement n.
10. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
11. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
12. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.
13. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
14. L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
15. L'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.
16. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.
17. L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$
2. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$ **Réponse :** non, pour cela remarquer que toute suite est la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante, puis conclure.
3. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$
4. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$

Exercice 5.

Montrer que l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles telles que $(|x_n|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bornée est un sous espace vectoriel de l'espace de toutes les suites.

Exercice 6.

Montrer que les parties de $\mathscr{F}([a\,;b],\mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels :

1. $F = \{f \in \mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$
2. $G = \left\{f \in \mathscr{C}^0([a\,;b],\mathbb{R}) \mid \displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0\right\}$

Exercice 7.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on pose :

$$u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$

Exercice 8.

Exercice 9.

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que la famille $(x \mapsto \sin kx)_{1\le k\le n}$ est une famille libre de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et considérons un polynôme $Q \in E$ non nul. Posons :

$$F = \{P \in E \mid Q \text{ diviseP }\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . puis déterminer un supplémentaire G de F et donnez-en une base.

Exercice 11.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $x = (1,-1,1)$ et $y = (0,1,a)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $u = (1,1,2)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(x,y)$. Comparer alors $\mathrm{Vect}(x,y)$, $\mathrm{Vect}(x,u)$ et $\mathrm{Vect}(y,u)$.

Exercice 12.

Soient $F = Vect\,((2,3,-1);(1,-1-2))$ et $G = Vect\,((3,7,0);(5,0,-7))$.
Montrer que $F = G$.

Exercice 13.

Soient $F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1\,;1],\mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{f \in \mathscr{C}([-1\,;1],\mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([-1\,;1],\mathbb{C})$.

Exercice 14.

Soient

$$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

et $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n$.
Montrer que G et $\mathbf{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

Correction : $F = \mathrm{Vect}(u)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, (Vérifier !)
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x - \lambda u \in G \Leftrightarrow (x_1 - \lambda, \dots, x_n - \lambda) \in G \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! \lambda \in \mathbb{R} /\ x - \lambda u \in G,$$

et donc,

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G.$$

Exercice 15.

Dans l'espace $E = \mathscr{C}([0\,;\pi],\mathbb{R})$ on considère les parties

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\} \text{ et } G = \mathbf{Vect}(\sin, \cos)$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 16.

Soit $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 17.

Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. (x_1, x_2) avec $x_1 = (1,0,1)$ et $x_2 = (1,2,2)$
2. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (1,1,0)$ et $x_3 = (1,1,1)$
3. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,1,-1)$ et $x_3 = (1,-1,-2)$
4. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (2,-1,3)$ et $x_3 = (-1,1,-1)$.

Exercice 18.

On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0\,;2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :
$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x\cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x\sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 19.

Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = \mathrm{e}^{k.x}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 20.

Soient A, B, C des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On suppose A et B supplémentaires et $A \subset C$.
Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C.

Exercice 21.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. Établir :

1. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \mathbf{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est libre
2. Si $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} \in \mathbf{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice.

Exercice 22.

Soit E un espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \Longleftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

indication

1. Pour le sens $\Rightarrow$: raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de $F \setminus G$ et un de $G \setminus F$. Regarder la somme de ces deux vecteurs.
2. Raisonner par double inclusion, revenir aux vecteurs.

Exercice 23.

Soit $a_1, \cdots, a_p$ des réels deux à deux distincts et $I = \{a_1, \cdots, a_p\}$. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_p)$ est libre dans l'espace fonctionnel qui la contient pour les cas suivants.

1. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on définit f_i dans $\mathbb{R} - I$ par :
$$f_i(t) = \frac{1}{t - a_i}.$$
2. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, f_i est la fonction caractéristique de l'intervalle $[a_i, +\infty[$.

Exercice 24.

Soit F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que
$$\left.\begin{array}{c} F + G = F + H \\ F \cap G \subset F \cap H \\ H \subset G \end{array}\right\} \Rightarrow H = G.$$

Exercice 25.

Dans $E = \mathscr{C}^{\infty}([0,1],\mathbb{R})$, on définit F par :

$$\forall f \in E, f \in F \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}.$$

On définit $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ avec

$$\forall i \in [\![0,2]\!],\ e_i(t) = t^i.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 26.

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On dit que $f \in E$ est *de signe constant* si et seulement si $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$ ou $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_-$.
Quels sont les sous-espaces de E constitués uniquement de fonctions de signe constant ?

Exercice 27.

Soit $\left(e_1, \cdots, e_p\right)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On pose $x_i = e_1 + \cdots + e_i$ pour tout entier i entre 1 et p. La famille $\left(x_1, \cdots, x_p\right)$ est-elle libre ?
Même question avec $y_k = e_k - e_{k+1}$ si $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $y_p = e_p$ ou $y_p = e_p - e_1$.

Exercice 28.

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on définit deux sous-espaces vectoriels :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$B = \mathrm{Vect}(b_1, b_2) \text{ avec } \begin{cases} b_1 = (1,2,-1,0) \\ b_2 = (1,0,0,-1) \end{cases}$$

Montrer que A et B sont supplémentaires.

Exercice 29.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \ldots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 30.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x+a)$, $x \mapsto \sin(x+b)$ et $x \mapsto \sin(x+c)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 31.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = |x-a|$.
Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Exercice 32.

Pour $a \in \mathbb{C}$, on note e_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $e_a(t) = \exp(at)$.
Montrer que la famille $(e_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Exercice 33.

Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f_a(t) = \cos(at)$$

Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}_+}$ est une famille libre d'éléments de l'espace de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 34.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les quatre fonctions définies par

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos t \cosh t, \\ x_2(t) &= \sin t \cosh t, \\ x_3(t) &= \cos t \sinh t, \\ x_4(t) &= \sin t \sinh t \end{aligned}$$

appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.

Exercice 35.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X-a)/P\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c,d) tels que $1 = c(X-a)+d(X-b)$. En déduire que $E = E_a + E_b$, la somme est-elle directe ?

Exercice 36.

Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \left\{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Correction :
Analysons d'abord les fonctions de E qui ne sont pas dans F : ce sont les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ ou $h'(0) \neq 0$.
Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b$, $(b \in \mathbb{R}^*)$ ou les homothéties $x \mapsto ax$, $(a \in \mathbb{R}^*)$ n'appartiennent pas à F.
Cela nous donne l'idée de poser

$$G = \left\{x \mapsto ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.
Soit $f \in F \cap G$, alors $f(x) = ax + b$ (car $f \in G$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in F$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F \cap G = \{0\}$.
Soit $h \in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in G$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.
En conclusion nous avons montré que $E = F \oplus G$.

Exercice 37.

Soit
$$E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \right\}.$$
Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Correction :
On note F l'espace vectoriel des suites constantes et G l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.

1. $F \cap G = \{0\}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.
2. $F + G = E$. Soit (u_n) un élément de E. Notons ℓ la limite de (u_n). Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \ell$, alors (v_n) converge vers 0. Donc $(v_n) \in G$. Notons (w_n) la suite constante égale à ℓ. Alors nous avons $u_n = \ell + u_n - \ell$, ou encore $u_n = w_n + v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En terme de suite cela donne $(u_n) = (w_n) + (v_n)$. Ce qui donne la décomposition cherchée.

Bilan : F et G sont en somme directe dans E : $E = F \oplus G$.

Exercice 38.

On pose :
$$F = \{(x, 2x, 3x), \quad x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x+y, x+y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

Exercice 39.

1. Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = (1-X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
   (a) Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a $R[X] = A \oplus \{\text{ polynômes pairs }\}$.
   A-t-on $R[X] = A \oplus \{\text{ polynômes impairs }\}$?
   (b) Que peut-on dire si l'on remplace $Q(X^2)$ par une fonction f paire ?
2. Soient E_1, E_2 deux sev d'un ev E tels que E_1 et E_2 sont isomorphes et $E = E_1 \oplus E_2$. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

Correction

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ que l'on décompose en $P = P_1(X^2) + XP_2(X^2)$. Alors $P = (P_1 + P_2)(X^2) - (1-X)P_2(X^2) = (1-X)P_1(X^2) + X(P_1 + P_2)(X^2)$, ce qui prouve que les deux sommes sont égales à $\mathbb{R}[X]$. Ces sommes sont facilement directes.
   (b) Cela ne change pas A : les éléments de A sont ceux dont les parties paire et impaire sont opposées (au facteur X près), indépendament du fait (vrai) que ces parties sont des polynômes.
2. Soit f un isomorphisme de E_1 sur E_2 et $F = \{x - f(x) \text{ tq } x \in E_1\}$. Alors $E = E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$.

Exercice 40.

Soit $E = K_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tq } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \text{ tq } P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 41.

Soit $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. Pour i entre 1 et n, on note
$$U_i = E_1 + \cdots + E_{i-1} + E_{i+1} + \cdots + E_n$$
Montrer que $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont en somme directe si et seulement si les $U_i \cap E_i = \{0_E\}$.

Exercice 42.

Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = P(2)\}$;
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P'(0) = 2\}$;
3. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A|P\}$;
4. $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables ;
5. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathscr{D}$.
6. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où $a \in \mathscr{D}$.

Exercice 43.

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $(\sin x, \cos x)$;
2. $(\sin 2x, \sin x, \cos x)$;
3. $(\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x)$;
4. $(x, e^x, \sin(x))$.

Exercice 44.

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants : $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$. Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathrm{vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{vect}(v_3)$?
2. $\mathrm{vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{vect}(v_4, v_5)$?
3. $\mathrm{vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\mathrm{vect}(v_2, v_5)$?
4. $\mathrm{vect}(v_1, v_4)$ et $\mathrm{vect}(v_3, v_5)$?

Exercice 45.

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles,

$$F = \{(u_n) \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\}$$

$$G = \{(u_n) \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 46.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim_{+\infty} f = 0$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Exercice 47.

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X];\ A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à F.

Exercice 48.

Soit $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (ie $f(-x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (ie $f(-x)=-f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 49.

Soit E un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire. Soit F un sous-espace vectoriel propre de E (c'est-à -dire que $F\neq\{0\}$ et que $F\neq E$). Démontrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.

Exercice 50.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a\in\mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.
2. Plus généralement, soient $a_0,\dots,a_N$ des éléments distincts de $\mathbb{R}$ et $G=\{f\in E;\ f(a_0)=\cdots=f(a_N)=0\}$. Trouver un supplémentaire à G.

Exercice 51.

Soit E un K-espace vectoriel, soit A, B deux sous-espaces vectoriels de E et C un supplémentaire de $A\cap B$ dans B. Montrer que $A\oplus C=A+B$.

Exercice 52.

Soit $\mathbb{K}$ un corps *infini* (par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère une famille finie $A_1,\cdots,A_p$ de sous-espaces vectoriels vérifiant :

— $A_1\cup\cdots\cup A_p$ est un sous-espace vectoriel de E,

— il existe i et j distincts tels que $A_i\not\subset A_j$.

Montrer que

$$A_j\subset\bigcup_{k\neq j}A_k$$

On pourra considérer des $a_i+\lambda x$ avec $x\in A_j$ et $a_i\in A_i$ tel que $a_i\notin A_j$ puis utiliser le *principe des tiroirs*.

Si on veut ranger strictement plus de q objets dans q tiroirs, au moins un tiroir contient plusieurs objets.

Exercice 53.

Soient F,G,F',G' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$F\oplus G=F'\oplus G'=E \text{ et } F'\subset G$$

Montrer

$$F\oplus F'\oplus(G\cap G')=E$$

Exercice 54.

Soient $E_1,\dots,E_n$ et $F_1,\dots,F_n$ sous-espaces vectoriels de E tel que $E_i\subset F_i$ et

$$\bigoplus_{i=1}^{n}E_i=\bigoplus_{i=1}^{n}F_i$$

Montrer que $E_i=F_i$.

Exercice 55.

Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$.
Montrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 56.

Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 57.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_k = \frac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}$$

1. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, P_k(x) \in \mathbb{Z}$$
3. Trouver tous les polynômes P tels que
$$\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$$

Exercice 58.

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère F la partie de E constituée des applications de la forme :

$$x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x \text{ avec } P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

1. Montrer que F un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension finie et déterminer $\dim F$.

Exercice 59.

Montrer par des opérations sur les Vect l'égalité :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\right)$$

Exercice 60.

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On pose :

$$F = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \quad \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!], \quad f(x_k) = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 61.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère $T : E \to E$ l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+1)$. Montrer que T est un automorphisme de E

Exercice 62.

Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\phi : E \to E$ l'application définie par :

$$\forall y \in E, \phi(y) = y'' - 4y' + 3y$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme surjectif de E
2. Déterminer son noyau. ϕ est-il injectif ?

Exercice 63.

Soit $E = C^{0}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et ϕ l'application définie sur E qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x t f(t) dt$$

Exercice 64.

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.

Exercice 65.

1. Montrer que la famille $(X+k)^n$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Redémontrer la formule donnant l'expression du déterminant de Vandermonde

Exercice 66.

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x$$

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 67.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p périodiques *i.e.* l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) = u(n)$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.

Exercice 68.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites complexes p périodiques *i.e.* l'ensemble des suites (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) = u(n)$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.
2. Déterminer une base de E formée de suites géométriques.

Exercice 69.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$.

1. Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.
2. Exprimer les composantes dans ε d'un vecteur en fonction de ses composantes dans e.

Exercice 70.

[Lemme d'échange] Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.

Exercice 71.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient H et H' deux hyperplans de E. Montrer que ceux-ci possèdent un supplémentaire commun.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F = \dim G$.
   Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 72.

Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie qui sont de même dimension ont un supplémentaire commun.

Exercice 73.

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose $\dim F_1 = \dim F_2$. Montrer qu'il existe G sous-espace vectoriel de E tel que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$.
2. On suppose que $\dim F_1 \leq \dim F_2$. Montrer qu'il existe G_1 et G_2 sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2 = E$ et $G_2 \subset G_1$.

Exercice 74.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on note

$$F_a = \operatorname{Vect}(e_1 + a, \dots, e_p + a)$$

1. Montrer que
$$F_a \oplus G = E$$
2. Soient $a, b \in G$. Montrer
$$a \neq b \implies F_a \neq F_b$$

Exercice 75.

E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E, on définit l'application $f : E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Appliquer le théorème du rang.

Correction

1. ...
2. Par définition de f et ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est
$$\operatorname{Im} f = E_1 + E_2.$$
   Pour le noyau :

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x_1,x_2) \mid f(x_1,x_2)=0\}\\ &= \{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2=0\}\end{aligned}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1,x_2) \in \ker f$, vérifie $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in E_2$. Donc $x_1 \in E_1 \cap E_2$. Réciproquement si $x \in E_1 \cap E_2$, alors $(x,-x) \in \ker f$. Donc

$$\ker f = \{(x,-x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}.$$

De plus par l'application $x \mapsto (x,-x)$, $\ker f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

3. Le théorème du rang s'écrit :
$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(E_1 \times E_2).$$
Compte tenu de l'isomorphisme entre $\ker f$ et $E_1 \cap E_2$ on obtient :
$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \times E_2).$$
Mais $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle quelques fois le théorème des quatre dimensions :
$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Exercice 76.

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$:

1. (x_1,x_2,x_3) avec $x_1 = (1,1,1,1), x_2 = (1,-1,1,-1)$ et $x_3 = (1,0,1,1)$.
2. (x_1,x_2,x_3,x_4) avec $x_1 = (1,1,0,1), x_2 = (1,-1,1,0), x_3 = (2,0,1,1)$ et $x_4 = (0,2,-1,1)$.

Exercice 77.

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que pour $p \leq n$:
$$\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_p) \geq \operatorname{rg}(x_1,\dots,x_n) + p - n$$

Exercice 78.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2.
Soit H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts.
Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 79.

Soient H un hyperplan et F un sous-espace vectoriel non inclus dans H.
Montrer
$$\dim F \cap H = \dim F - 1$$

Exercice 80.

Soit E un espace de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E distinct de E.
Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?

Exercice 81.

Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $D \not\subset H$ alors D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 82.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, H un hyperplan de E et D une droite vectorielle de E.
À quelle condition H et D sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 83.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, distinct de E.
Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?

Exercice 84.

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

1. $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$.
2. $f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$.

Correction

— pour l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons $\ker f = \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \ker f$, cela entraine $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang $\dim\ker f + \operatorname{rg} f = n$, mais $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, ainsi $2\operatorname{rg} f = n$.

— pour l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) : Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ car pour $y \in \operatorname{Im} f$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2\operatorname{rg} f = n$ alors par la formule Du rang $\dim\ker f = \operatorname{rg} f$ c'est-à-dire $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f$. Nous savons donc que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\ker f$ mais ces espaces sont de même de dimension donc sont égaux : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Exercice 85.

Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 86.

Soient a un élément d'un ensemble X non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $E_a : \mathscr{F}(X,E) \to E$ définie par $E_a(f) = f(a)$ est une application linéaire.
2. Déterminer l'image et le noyau de l'application E_a.

Exercice 87.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soient $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par :
$\varphi(f) = f'$ et $\psi(f)$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
2. Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3. Déterminer images et noyaux de φ et ψ.

Exercice 88.

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

$1/$ Montrer que si $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

$2/$ Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.

$3/$ Montrer que f est une homothétie.

Exercice 89.

Soient p, q deux projections de même base H et de directions F, G. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est encore une projection de base H

Exercice 90.

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $u \in E$ tel que la famille $(f^k(u))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre l'espace E.

$1/$ Montrer que $(u, \dots, f^{n-1}(u))$ est une base de E

$2/$ Montrer qu'un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f.

Exercice 91.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E non injectif. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \text{Ker} f^k$ et $I_k = \text{Im} f^k$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k)$.
2. (a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}$, $(N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2})$.
   (b) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N} / \ \forall k \in \mathbb{N}$, $(k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1}$ et $k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1})$.
   (c) Montrer que $p \leq n$.
3. Montrer que si $k < p$, $I_k = I_{k+1}$ et si $k \geq p$, $I_k = I_{k+1}$.
4. Montrer que $E = I_p \oplus N_p$ et que f induit un automorphisme de I_p.
5. Soit $d_k = \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées I_k décroît de moins en moins vite).

Exercice 92.

Montrer que l'application partie entière Ent$: \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}[X]$ est linéaire et déterminer son noyau.

Exercice 93.

Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
Montrer que pour toute partie A de E, on a $f(\text{Vect}\,A) = \text{Vect}\,f(A)$.

Exercice 94.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer

$$f(A) \subset f(B) \iff A + \ker f \subset B + \ker f$$

Exercice 95.

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Exprimer $u^{-1}\big(u(F)\big)$ en fonction de F et de $\ker u$.
2. Exprimer $u\big(u^{-1}(F)\big)$ en fonction de F et de $\operatorname{Im} u$.
3. À quelle condition a-t-on $u\big(u^{-1}(F)\big) = u^{-1}\big(u(F)\big)$?

Exercice 96.

Caractériser les sous-espaces F d'un espace vectoriel E tels que

$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$$

Exercice 97.

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathscr{L}(E,F)$, une famille $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1\leq j\leq p}$ de sous-espaces vectoriels de F.

1. Montrer
$$f(\sum_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$$
2. Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe alors la somme des $f(E_i)$ est directe.
3. Montrer
$$f^{-1}(\sum_{j=1}^{p} F_j) \supset \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$$
Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 98.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires et ce pour tout $x \in E$.

1. Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x . x$.
2. Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
(indice : on pourra distinguer les cas : (x,y) liée ou (x,y) libre.)
3. Conclure que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 99.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires.
Montrer que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 100.

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose
$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, g(x) = \lambda_x f(x)$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$g = \lambda f$$

Exercice 101.

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 102.

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f+g)$.
2. Comparer $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im}(f+g)$.
3. Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.
4. Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$.

Exercice 103.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer

1. $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$.
2. $E = \operatorname{Im} f + \ker f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

Exercice 104.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id} = 0$$

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Établir que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 105.

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$; montrer que $\ker f = \ker(g \circ f)$, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$ puis que $\ker f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.

Exercice 106.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
2. Montrer
$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$$
3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Exercice 107.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent *i.e.* tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\mathrm{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 108.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que p est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{Id} - p$ l'est.
2. Exprimer alors $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et $\ker(\mathrm{Id} - p)$ en fonction de $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$.

Exercice 109.

Soient $p, q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;

(ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 110.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E. En déterminer noyau et image.

Exercice 111.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E. En déterminer noyau et image.

Exercice 112.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit s un endomorphisme de E involutif, *i.e.* tel que $s^2 = \mathrm{Id}$.
On pose $F = \ker(s - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id})$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Montrer que s est la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.
   Plus généralement, soient $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - (\alpha + 1)f + \alpha \,\mathrm{Id} = 0$.
   On pose $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(f - \alpha \,\mathrm{Id})$.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
4. Montrer que f est l'affinité par rapport à F, parallèlement à G et de rapport α.

Exercice 113.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\,\mathrm{Id} = \tilde{0}$. Montrer

$$\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 3\,\mathrm{Id}) = E.$$

Quelle transformation vectorielle réalise f ?

Exercice 114.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On pose $q = \mathrm{Id} - p$ et on considère
$L = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid \exists u \in \mathscr{L}(E), f = u \circ p\}$ et $M = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid \exists v \in \mathscr{L}(E), g = v \circ q\}$.
Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 115.

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que p et q ont même noyau si, et seulement si, $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
2. Énoncer une condition nécessaire et suffisante semblable pour que p et q aient même image.

Exercice 116.

Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.
2. Préciser alors $\mathrm{Im}(p + q)$ et $\ker(p + q)$.

Exercice 117.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

1. Montrer que $u(\ker p) \subset \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p \subset \ker u$.
2. En déduire $u^2 = 0$.
3. Réciproque ?

Exercice 118.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p avec $n > p$.
On considère $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$ vérifiant

$$u \circ v = \operatorname{Id}_F$$

1. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.
2. Déterminer son rang, son image et son noyau.

Exercice 119.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer

$$f \text{ est un projecteur} \iff \operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(\operatorname{Id} - f) = n$$

Exercice 120.

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vérifiant

$$\operatorname{Im} p \subset \ker q$$

Montrer que $p + q - p \circ q$ est un projecteur et préciser son image et son noyau.

Exercice 121.

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \operatorname{Id}$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
2. Montrer
$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$$
3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Exercice 122.

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E de dimension quelconque.
Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H. Montrer

$$H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$$

Exercice 123.

Soient H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque et D une droite vectorielle non incluse dans H.
Montrer que D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 124.

Soient $f,g \in E^*$ telles que $\ker f = \ker g$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = \alpha g$.

Exercice 125.

Soit $e = (e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^*, f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0 \implies f = 0$$

Montrer que e est une base de E.

Exercice 126.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer

$$V \subset f(V) \implies f(V) = V$$

Exercice 127.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ injective. Montrer que pour tout famille $(x_1,\dots,x_p)$ de vecteurs de E, on a

$$\mathrm{rg}(f(x_1),\dots,f(x_p)) = \mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p)$$

Exercice 128.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.

1. Soit $x \notin \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x),\dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que $f^n = 0$.

Exercice 129.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient $f,g \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$f^2 + f \circ g = \mathrm{Id}$$

Montrer que f et g commutent.

Exercice 130.

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$
2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (2x+y+z, x+y+t, x+z-t)$
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 131.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, f un endomorphisme nilpotent non nul de E et p le plus petit entier tel que $f^p = \tilde{0}$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille
$$\left(x, f(x), f^2(x),\dots, f^{p-1}(x)\right)$$
soit libre.
2. En déduire $f^n = \tilde{0}$.

Exercice 132.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $(I, f, f^2, \ldots, f^{n^2})$ est liée et en déduire qu'il existe un polynôme non identiquement nul qui annule f.

Exercice 133.

Soit E un plan vectoriel.

1. Montrer que f endomorphisme non nul est nilpotent si, et seulement si, $\ker f = \operatorname{Im} f$.
2. En déduire qu'un tel endomorphisme ne peut s'écrire sous la forme $f = u \circ v$ avec u et v nilpotents.

Exercice 134.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.
Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 135.

Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(P) = \left(P(a_0), P'(a_0), \ldots, P(a_n), P'(a_n)\right)$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 136.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

puis que

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f-g)$$

Exercice 137.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies et $f \in \mathscr{L}(E,F), g \in \mathscr{L}(F,E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Montrer que $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.

Exercice 138.

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Montrer

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Exercice 139.

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.

1. Montrer

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$

2. Trouver u et v dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que
$$\operatorname{rg}(u+v) < \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$
3. Trouver deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ tels que
$$\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$

Exercice 140.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$.
Montrer
$$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \iff \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \\ \ker f + \ker g = E \end{cases}$$

Exercice 141.

Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que :

1. $\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.
2. $\operatorname{rg}(f \circ g) \geq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim E$.

Exercice 142.

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer
$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g \iff E = \operatorname{Im} f + \ker g$$
2. Montrer
$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f \iff \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$$

Exercice 143.

Soient E un $\mathbb{K}$ ev, F un sev de E et $f \in \mathscr{L}(E)$

1. Montrer que si $F \subset f(F)$ et F de dimension finie alors $f(F) = F$
2. Le résultat reste t-il vrais i F n'est pas de dimension finie ?

Exercice 144.

Soient E un ev de dimension finie, f et g deux formes linéaires non nulles sur E . Montrer que ker f = kerg si, et seulement si, la famille (f, g) est liée.

Exercice 145.

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'ils existent $g \in E^*$ et $a \in E$ tel que $\forall x \in E\, f(x) = g(x)a$
En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$

Exercice 146.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : E \to E$ définie par :
$$f(P) = P + (1-X)P'.$$
Montrer que $f \in L(E)$, donner une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\ker(f)$.
Correction

1. f est bien linéaire...
2. Soit P tel que $f(P)=0$. Alors P vérifie l'équation différentielle

$$P+(1-X)P'=0.$$

Dont la solution est $P=\lambda(X-1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Donc $\ker f$ est de dimension 1 et une base est donnée par un seul vecteur : $X-1$.

3. Par le théorème du rang la dimension de l'image est :

$$\dim \operatorname{Im} f=\dim \mathbb{R}_n[X]-\dim \ker f=(n+1)-1=n.$$

Il faut donc trouver n vecteurs linéairement indépendants dans $\operatorname{Im} f$. Évaluons $f(X^k)$, alors

$$f(X^k)=(1-k)X^k+kX^{k-1}.$$

Cela donne $f(1)=1, f(X)=1, f(X^2)=-X^2+2X, \ldots$ on remarque que pour $k=2,\ldots n$, $f(X^k)$ est de degré k sans termes constant. Donc l'ensemble

$$\{f(X), f(X^2), \ldots, f(X^n)\}$$

est une famille de n vecteurs, appartenant à $\operatorname{Im} f$, et libre (car les degrés sont distincts). Donc ils forment une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 147.

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ deux à deux distincts, pour $1\leq i\leq n$, on note v_i le vecteur $v_i=\left(\lambda_1^{i-1},\ldots,\lambda_n^{i-1}\right)$ élément de $\mathbb{K}^n$. Montrer de deux facons, que la famille $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 148.

Soit E un ev de dimension n, f un endomorphisme de E. Montrer que rg $f^n=\operatorname{rg} f^{n+1}$

Exercice 149.

Soient a et b deux nombres complexes.On considère l'espace vectoriel E des suites complexes vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}$$

Déterminer dim E.
Considérer l'application $f:E\to\mathbb{C}^2$ définie par $f\left((u_n)_n\right)=(u_0,u_1)$

Exercice 150.

Soit $f\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $f^3=-f$. Montrer que $\mathbb{R}^3=\ker f\oplus Imf$.

Exercice 151.

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que $\ker(f)\cap\operatorname{Im}(f)=f(\ker(f\circ f))$.

Correction Pour montrer l'égalité $\ker f\cap\operatorname{Im} f=f(\ker f^2)$, nous montrons la double inclusion.
Soit $y\in\ker f\cap Imf$, alors $f(y)=0$ et il existe x tel que $y=f(x)$. De plus $f^2(x)=f(f(x))=f(y)=0$ donc $x\in\ker f^2$. Comme $y=f(x)$ alors $y\in f(\ker f^2)$. Donc $\ker f\cap Imf\subset f(\ker f^2)$.

Pour l'autre inclusion, nous avons déja vu que $f(\ker f^2)\subset f(E)=\operatorname{Im} f$. De plus $f(\ker f^2)\subset\ker f$, car si $y\in f(\ker f^2)$ il existe $x\in\ker f^2$ tel que $y=f(x)$, et $f^2(x)=0$ implique $f(y)=0$ donc $y\in\ker f$. Par conséquent $f(\ker f^2)\subset\ker f\cap\operatorname{Im} f$.

Exercice 152.

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Monter que $E = P \bigoplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P de direction I.

Correction :

1. La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle : $P \cap I = \{0\}$. Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :
$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire (le vérifier !), la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire. Donc $P + I = E$.
Bilan : $E = P \oplus I$.
2. Le projecteur sur P de direction I est l'application $\pi : E \longrightarrow E$ qui à f associe la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$. Nous avons bien $\pi \circ \pi = \pi$, $\pi(f) \in P$ et $\ker \pi = I$.

Exercice 153.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ supplémentaires dans E ;

(ii) $E = \operatorname{Im} f + \ker f$;

(iii) $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$;

(iv) $\ker f^2 = \ker f$.

Exercice 154.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g$ bijectif et $g \circ f = \tilde{0}$. Montrer que
$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$$

Exercice 155.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence
$$\ker f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f)$$

Exercice 156.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = \tilde{0}$.
Établir
$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u^2 \leq n$$

Exercice 157.

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que
$$f + g = \mathrm{Id}_E \text{ et } \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$$
Montrer que f et g sont des projecteurs complémentaires.

Exercice 158.

Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que

$$u + v = \text{id} \text{ et } \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$$

Montrer que u et v sont des projecteurs.

Exercice 159.

[Images et noyaux itérés d'un endomorphisme] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \operatorname{Im} f^p$ et $N_p = \ker f^p$.

1. Montrer que $(I_p)_{p\geq 0}$ est décroissante tandis que $(N_p)_{p\geq 0}$ est croissante.
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
3. Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés.
   Montrer que
   $$\forall s \geq r, I_s = I_r \text{ et } N_s = N_r$$
4. Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 160.

[Images et noyaux itérés d'un endomorphisme] Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_p = \operatorname{Im} f^p \text{ et } N_p = \ker f^p$$

1. Montrer que les suites $(I_p)_{p\geq 0}$ et $(N_p)_{p\geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante et que celles-ci sont simultanément stationnaires.
2. On note r le rang à partir duquel les deux suites sont stationnaires. Montrer
   $$I_r \oplus N_r = E$$

Exercice 161.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E.
On considère $h : H \to E$ la restriction de $g \circ f$ à H.

1. Montrer que
   $$\ker(g \circ f) = \ker h + \ker f$$
2. Observer que
   $$\operatorname{rg} h \geq \operatorname{rg} f - \dim \ker g$$
3. En déduire que
   $$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker g + \dim \ker f$$

Exercice 162.

Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$, $h \in \mathscr{L}(G, H)$ des applications linéaires. Montrer

$$\operatorname{rg}(g \circ f) + \operatorname{rg}(h \circ g) \leq \operatorname{rg} g + \operatorname{rg}(h \circ g \circ f)$$

Exercice 163.

Soient $v \in \mathscr{L}(E, F)$ et $u \in \mathscr{L}(F, G)$. Établir

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim F \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$$

Exercice 164.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.

1. En appliquant le théorème du rang à la restriction h de f à l'image de g, montrer que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g)$$

2. Pour $n = 3$, trouver tous les endomorphismes de E tels que $f^2 = 0$.

Exercice 165.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \dim\left(\ker u^{k+\ell}\right) \leq \dim\left(\ker u^k\right) + \dim\left(\ker u^\ell\right)$$

Exercice 166.

On dit qu'une suite d'applications linéaires

$$\{0\} \xrightarrow{u_0} E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} E_n \xrightarrow{u_n} \{0\}$$

est exacte si on a $\operatorname{Im} u_k = \ker u_{k+1}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que si tous les E_k sont de dimension finie, on a la formule dite d'Euler-Poincaré :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

Exercice 167.

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer

$$\dim \ker f \cap F \geq \dim F - \operatorname{rg} f$$

Exercice 168.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Établir que

$$\dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(\ker g) + \dim(\ker f)$$

Exercice 169.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$.

1. Établir $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\ker f^2 = \ker f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 170.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant

$$\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$$

1. Établir

$$\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f \text{ et } \ker f^2 = \ker f$$

2. Montrer

$$\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$$

Exercice 171.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient u et v deux endomorphismes de E tels que

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v$$

Établir que d'une part, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$, d'autre part $\ker u$ et $\ker v$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 172.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose

$$\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g = E$$

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 173.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}_E$. Montrer

$$\ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = E$$

Exercice 174.

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = f \text{ et } f \circ g \circ f = g$$

1. Montrer que $\ker f = \ker g$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.
   On pose
   $$F = \ker f = \ker g \text{ et } G = \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$$
2. Montrer que
   $$E = F \oplus G$$

Exercice 175.

Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$f_1 + \dots + f_n = \mathrm{Id}_E \text{ et } \forall 1 \leq i \neq j \leq n, f_i \circ f_j = 0$$

1. Montrer que chaque f_i est une projection vectorielle.
2. Montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i = E$.

Exercice 176.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \dots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut Id_E. On note $F_1, \dots, F_m$ les images de $p_1, \dots, p_m$. Montrer

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$$

Exercice 177.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer que w est un isomorphisme si, et seulement si, u est injective, v est surjective et

$$\operatorname{Im} u \oplus \ker v = F$$

Exercice 178.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\operatorname{Im} f = \ker f$ si, et seulement si, n est pair.

Exercice 179.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note

$$\mathscr{C} = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Observer que
$$\mathscr{C} = \left\{a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}$$
3. Déterminer la dimension de $\mathscr{C}$.

Exercice 180.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n.
On note
$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit a un vecteur de E tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$.
   Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ constitue une base de E.
3. Soit $\varphi_a : \mathscr{C}(f) \to E$ l'application définie par $\varphi_a(g) = g(a)$.
   Montrer que φ_a est un isomorphisme.
4. En déduire que
$$\mathscr{C}(f) = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$$

Exercice 181.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Former une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\ker u = G$.

Exercice 182.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que $\operatorname{rg} f^2 = 3$. Quels sont les rangs possibles pour f ?

Exercice 183.

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $(g - \operatorname{Id})^2 = 0$. Préciser g^{-1}.
3. On pose $h = fog$. Montrer que h est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques. Que remarque-t-on ?
4. Montrer que $g = foh$. En déduire une définition de g.

Exercice 184.

On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ définit par :

$$P \longrightarrow (X+2)P'(X) + P(X-1)$$

Calculer l'image par φ des vecteurs $1, X+1$ et $2X^2+4X+3$. Qu'en déduit-on ?