Exercice. 1
Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Établir que

$$\mathrm{M}^2 - (a+d)\mathrm{M} + (ad-bc)\mathrm{I}_2 = \mathrm{O}_2$$

Exercice. 2
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2$$

Montrer que $AB = BA$

Exercice. 3
On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices A et B définies par $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et

$$a_{i,j} = i+j, \quad b_{i,j} = i-j$$

Calculer le terme général des matrices $C = A - B$ et $D = AB$

Exercice. 4
On considère l'ensemble $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & -3b+3c & a-3c \end{pmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et en donner une base.

Exercice. 5
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 - 4A + 4I_p = 0_p$. Établir que, pour tout entier naturel n, A^n appartient à $\mathrm{vect}(I_p, A, A^2)$ et exprimer A^n en fonction de I_p, A et A^2.

Exercice. 6

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Calculer J^n pour n entier naturel.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice. 7

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_4[X]$ définie par : $f : P(X) \mapsto P(1-X)$, et A sa matrice dans la base canonique. Calculer A et A^{-1}.

Exercice. 8
Soit A=$(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall i \in\{1,\ldots,n\}$, $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ une matrice à diagonale strictement dominante. Montrer que A est inversible.

Exercice. 9
Soit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

.

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer A $^{-1}$.

Exercice. 10
Soit $n \geqslant 1$. Prouver l'inversibilité et calculer l'inverse des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice. 11

Soient $n \geqslant 1$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{I}_n + \mathrm{A}$ soit inversible. On pose alors $\mathrm{B} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1}$

1. Montrer que $\mathrm{B} = (\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$
2. Prouver que $\mathrm{I}_n + \mathrm{B}$ est inversible.

Exercice. 12

Soient $n \geqslant 1$ et

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Prouver l'inversibilité et inverser M par la méthode du pivot de Gauss.
2. On pose

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Calculer les puissances de J.
   b. Exprimer M en fonction de J.
   c. En déduire que M est inversible et retrouver l'expression de son inverse.

Exercice. 13

Dire si la matrice est inversible et calculer son inverse dans le cas échéant : a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice. 14

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $u(2e_1 - 3e_2 + 5e_3)$
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$
3. Déterminer $\operatorname{Ker}(u^2)$ et $\operatorname{Im}(u^2)$
4. Calculer $(\mathrm{I} - M)\mathrm{I} + M + M^2$ et en déduire que $(\mathrm{I} - M)$ est inversible. Préciser $(\mathrm{I} - M)^{-1}$

Exercice. 15

Soit

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

considérée comme matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique. En déterminer l'image et le noyau. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur.

Exercice. 16

Déterminer des bases du noyau et de l'image de $A=\begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ Donner aussi des systèmes d'équations cartésiennes (avec un nombre minimum d'équations) de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Exercice. 17

Discuter le rang de : $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice. 18

Soit A une matrice réelle. Montrer que $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}({}^tAA)=\operatorname{rg}(A\,{}^tA)$

Exercice. 19

Soit M une matrice carrée de taille $n \geqslant 2$ à coefficients réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $\mathrm{M}=\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V}$
2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et de tr(M)
3. A quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelles sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

Exercice. 20

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E. On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D
2. Déterminer une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$. Calculer P^{-1}.
3. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathrm{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathrm{N}}$ définies par $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \\ z_0=0 \end{cases}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1}= & 4x_n-2(y_n+z_n) \\ y_{n+1}= & x_n-z_n \\ z_{n+1}= & 3x_n-2y_n-z_n \end{cases}$$

Exercice. 21

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(x,y,z)\mapsto(2x-y,y-z,-z+2x)$$

1. Calculer la matrice M de f dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$.
2. Prouver que la famille $\mathcal{B}'$ définie par

   $$f_1=e_2-e_3,\ f_2=-e_1+e_3,\ f_3=e_1+e_2$$

   est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la matrice $\mathrm{P}=\operatorname{mat}(\mathcal{B}\to\mathcal{B}')$ et son inverse.

4. Calculer la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
5. Quel est le lien entre M, M' et P ?

Exercice. 22

Soient $n \in \mathbb{N}, \mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et T_n l'application définie sur E_n par

$$\mathrm{T}_n(\mathrm{P}) = (n\mathrm{X}+1)\mathrm{P} + \left(1-\mathrm{X}^2\right)\mathrm{P}'$$

1. Prouver que $\mathrm{T}_n \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_n)$
2. Écrire la matrice $\mathrm{M}_n = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n}(\mathrm{T}_n)$ de T_n dans la base canonique de E_n
3. Dans le cas où $n = 3$, déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}_n)$ et de $\mathrm{Im}(\mathrm{T}_n)$

Exercice. 23

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et f l'application définie sur l'espace E par $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P} + \mathrm{P}'$

1. Prouver que f est un endomorphisme de E
2. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de E. Déterminer la matrice $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$
3. Établir que f est un automorphisme de E et calculer M^{-1}.
4. En déduire la solution P de $\mathrm{P} + \mathrm{P}' = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$

Exercice. 24

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \quad \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{AX})\mathrm{B} \end{cases}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie
3. Déterminer la base et la direction de f dans ce cas.

Exercice. 25

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] &\to \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} &\mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$. On notera M cette matrice.
3.
   a. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
   b. En déduire que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, et donner la matrice de ϕ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$
4. En déduire que l'équation $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}) = 4\mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$ admet une unique solution $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, et donner cette solution.

Exercice. 26

Soit E le sous ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathrm{E} = \left\{ \mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim(\mathrm{E})$
2. Soit $\mathrm{M}(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang.
3. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $\mathrm{M}(a,b,c)^{-1}$ de $\mathrm{M}(a,b,c)$
4. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1

Exercice. 27

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ Montrer que M est inversible si et seulement si A et B le sont et que, dans ce cas, il existe $\mathrm{C}' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{M}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{-1} & \mathrm{C}' \\ \hline 0 & \mathrm{B}^{-1} \end{array}\right)$

Exercice. 28

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ On suppose A inversible. Montrer que $\mathrm{rgM} = \mathrm{rgA} + \mathrm{rgB}$. Le résultat reste-t-il valable si A n'est pas inversible ?

Exercice. 29

Résoudre les systèmes :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & -4 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 17 \\ 5x & - & 3y & + & 8z & = & -10 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ -x & + & 6y & - & 11z & = & -3 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & z & = & -2 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ -2x & + & 4y & - & 5z & = & -10 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 5z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & 7z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right.$

Exercice. 30

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et où m est un paramètre réel.

Fin