Chapitre

Applications linéaires

1 Généralités

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définition

Définition.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est un **homorphisme d'espaces vectoriels** ou plus simplement une **application linéaire** si elle respecte les lois associées, c'est à dire si:

$$\forall\, x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y);$$
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

Remarques.

-
$$\begin{aligned} f \text{ est linéaire } &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y) \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) \end{aligned}$$

- Pour toute application linéaire $f : E \to F$, on a $f(0_E) = 0_F$.

Exemples.

- Id_E est linéaire. Plus généralement, toute homothétie, c'est à dire toute application de la forme $\lambda \cdot Id_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, est linéaire.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$ est linéaire.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 2y + z)$ est linéaire.
- $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}),\ F = \mathcal{C}^1(I, R),\ a \in I$. Alors :
  - la dérivation $D : F \to E, f \to f'$ est linéaire ;
  - l'application $P : E \to F, f \to \int_a^x f(t)dt$ est linéaire.

  On notera de plus que $D \circ P = Id_E$ alors que $P \circ D \neq Id_F$.

Exemples.

- Les translations $t_a : x \in E \to x + a \in E$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_E$.
- $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto ax + b$ n'est pas linéaire.
- Les applications $x \mapsto x^2, \cos, \ln, \exp, \ldots$ ne sont pas linéaires.

Vocabulaire. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On dit que :

- f est un **endomorphisme** si $E = F$;
- f est un **isomorphisme** si elle est linéaire bijective ;
- f est un **automorphisme** si c'est un endomorphisme bijectif.
- f est une forme linéaire si $F = \mathbb{K}$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Lorsque $E = F$, on notera $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Lorsque $F = \mathbb{K}$, on notera $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires de E, aussi appelé dual de E.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 1

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Preuve.

$\square$

Propriété 2

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors la composée $g \circ f : E \to G$ est linéaire.

Preuve.

$\square$

Propriété 3

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors :

(1) $h \mapsto g \circ h$ est linaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$;

(2) $h \mapsto h \circ f$ est linaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$.

Preuve.

$\square$

Remarque. Dans $\mathcal{L}(E)$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_E et satisfait $\lambda \cdot (f \circ g) = f \circ (\lambda \cdot g) = (\lambda \cdot f) \circ g$. On dit alors que $\mathcal{L}(E)$ muni de $+$ et $\circ$ est une algèbre, non intègre et non commutative (résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Remarque. Pour tout $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut donc définir le polynôme d'endomorphisme $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = a_0 f^0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$$

où $f^0 = Id_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ...

Propriété 4

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent, i.e. $f \circ g = g \circ f$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k;$$

$$f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}.$$

Remarque. Les homothéties λId_E commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.3 Image et noyau

Propriété 5

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

(1) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E') = \{y \in F | \exists x \in E', y = f(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

(2) Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F') = \{x \in E | f(x) \in F'\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.

□

Définition.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle :

- image de f le sous-espace vectoriel noté $Im(f)$ de F défini par $Im(f) = f(E)$. Ainsi,

$$\forall y \in F,\ y \in Im(f) \Leftrightarrow \exists x \in E, y = f(x).$$

- noyau de f le sous-espace vectoriel noté $Ker(f)$ de E défini par $Ker(f) = f^{-1}(\{0_E\})$. Ainsi,

$$\forall x \in E,\ x \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F.$$

Propriété 6

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(1) f est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$;

(2) f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$.

Preuve.

□

Exemples. Déterminer les noyaux, images, et déduire éventuellement l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$;
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 2y + z)$;
- $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $F = \mathcal{C}^1(I, R)$, $a \in I$ et :
  - la dérivation $D : F \to E, f \to f'$;
  - l'application $P : E \to F, f \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Remarque. L'équivalence suivante est intéressante à retenir en pratique : si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad Im(f) \subset Ker(g).$$

2 Isomorphismes

2.1 Definitions

Rappel. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Rappelons que :

- f est un isomorphisme si f est bijective ;
- f est un automorphisme si f est bijective et $E = F$.

Propriété 7

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes.

(1) $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ est un isomorphisme ;

(2) L'inverse f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Preuve.

□

Définition.

On appelle groupe linéaire de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exemple d'isomorphisme en analyse. Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, et considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Alors :

- $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$;
- Pour tout réel t_0, l'application $T_0 : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^2, y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$ puisqu'elle est linéaire et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité de la solution d'un problème de Cauchy).

2.2 Isomorphismes et bases

Propriété 8

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Notons $\mathcal{F} = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$.

(1) f est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre dans F ;

(2) f est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice dans F ;

(3) f est bijective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de F.

Preuve.

(1) Supposons que f est injective et montrons que $\mathcal{F}$ est libre : soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0_F.$$

Par linéarité de f, on en déduit que $f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0_F$. Puisque f est injective, on a donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_F$. Enfin, puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, on a donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi $\mathcal{F}$ est libre dans F.

Réciproquement supposons que $\mathcal{F}$ est libre dans F et montrons que f est injective. Soit pour cela $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

D'où $0_F = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0_F$. Enfin puisque $\mathcal{F}$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et donc que $x = 0_E$.

(2) Supposons que f est surjective, et montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice dans F. Soit pour cela $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

D'où $y = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$. Ainsi $\mathcal{F}$ est bien génératrice dans F.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est génératrice dans F et montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Puisque $\mathcal{F}$ est génératrice dans F, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$y = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$$

Posons alors $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$. On a $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = y$, et f est bien surjective.

(3) C'est une conséquence directe des deux points précédents.

$\square$

Remarque. Puisque $f : E \to Im(f)$ est surjective, on déduit de la propriété précédente que $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $Im(f)$. Ainsi, on a :

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \cdots, f(e_n)).$$

Propriété 9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même dimension finie**, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

$$f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Preuve. On a clairement (1) $\Rightarrow$ (2) et (1) $\Rightarrow$ (3).
Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1). Supposons donc f injective, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Par la proposition précédente, $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F de cardinal $n = \dim(F)$. C'est donc une base de F. Ainsi f transforme une base en une base, elle est donc bijective par la proposition précédente.
Montrons que (3) $\Rightarrow$ (1). Supposons f surjective. soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Par la proposition précédente, $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F de cardinal $n = \dim(F)$. C'est donc une base de F. Ainsi f transforme une base en une base, elle est donc bijective par la proposition précédente. $\square$

Remarque. Pour montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective, il suffit de montrer que f est injectif (en montrant par exemple que $Ker(f) = \{0_E\}$) ou que f est surjectif (en montrant $Im(f) = F$).

Exemple. Soient $x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ par :

$$\varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)).$$

Alors :

- φ est linéaire ;
- φ est bijective ;
- l'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'est autre que la base des polynômes de Lagrange $(L_0, \cdots, L_n)$ associés à $x_0, \cdots, x_n$.

Propriété 10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même dimension finie**, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors on a l'équivalence entre :

(1) f est un isomorphisme de E sur F ;

(2) f a un inverse à gauche, c'est à dire $\exists g \in \mathcal{L}(F, E)$, $g \circ f = Id_E$;

(3) f a un inverse à droite, c'est à dire $\exists h \in \mathcal{L}(F, E)$, $f \circ h = Id_F$;

De plus, l'inverse à gauche g et l'inverse à droite h coïncident nécessairement avec f^{-1}.

Preuve. On a déjà (1) $\Rightarrow$ (2) et (1) $\Rightarrow$ (3), puisque si f est bijective, alors $g = f^{-1}$ est linéaire et convient.
Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1). Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$, $g \circ f = Id_E$. On sait alors que f est injective. Par la proposition précédente, f est donc bijective puisque $\dim(E) = \dim(F)$. On montre de même (3) $\Rightarrow$ (1).
Enfin en composant $g \circ f = Id_E$ et $f \circ h = Id_F$ à droite et à gauche par f^{-1}, on a bien $g = h = f^{-1}$.
$\square$

Remarque. Ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas les espaces E et F de même dimension finie : la dérivation D par exemple a un inverse à droite ($D \circ P = Id_E$), mais on a $P \circ D \neq Id_F$. En particulier, D n'est pas un isomorphisme.

2.3 Espaces isomorphes

Propriété 11

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit la i-ième application coordonnée $\varphi_i : E \to \mathbb{K}$ par :

$$\varphi_i(x) = \text{ i-ème coordonnée de } x \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

L'application φ est une forme linéaire.

Preuve. Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + \ldots y_ne_n$ des vecteurs de E. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + \mu y = (\lambda_1 x_1 + \mu y_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n x_n + \mu y_n)e_n$, et donc pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\varphi_i(\lambda x + \mu y) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y).$$

Ainsi φ est linéaire. Comme de plus $\varphi : E \to \mathbb{K}$, c'est bien une forme linéaire. $\square$

Remarque. On a pour tout $x \in E$, $x = \sum_i \varphi_i(x) e_i$. En particulier, on notera que :

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$

Propriété 12

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. L'application $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

est un isomorphisme. On dit que E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Preuve. On montre que $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ est linéaire par linéarité des applications φ_i. De plus on a :

$$\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow \varphi_i(x) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow x = 0_E.$$

Donc $Ker(\varphi) = \{0_E\}$ et φ est injective. Comme enfin $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$ par hypothèse, on peut conclure que φ est un isomorphisme. □

Définition.

On dit que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme f entre E et F. On note alors $E \simeq F$.

Remarque. La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels (elle est réflexive, symétrique et transitive).

Propriété 13

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Un espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et $\dim(F) = n$.
En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Preuve. Supposons que F est isomorphe à E, il existe donc un isomorphisme $f : E \to F$. E est de dimension finie n, notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F par une proposition précédente. Ainsi F est de dimension finie $n = \dim(E)$.
Réciproquement, supposons que F est de dimension finie $n = \dim E$. D'après la proposition précédente, on a $F \simeq \mathbb{K}^n$ et $E \simeq \mathbb{K}^n$. Par symétrie et transitivité, on a bien $E \simeq F$. □

Remarque. Ainsi, si on considère l'ensemble des espaces vectoriels de dimension finie, les classes d'équivalences pour la relation $\simeq$ sont paramétrées par $\mathbb{N}$.

▶ *Pour montrer que E est de dimension finie n, on dispose de deux méthodes :*

- *exhiber une base de n vecteurs ;*
- *exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension n.*

Exemple. L'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{K})$ de dimension 2, puisque l'application $T_0 : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^2, y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$ définit un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$.

Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites u satisfaisant $(a, b, c \in \mathbb{K}, a \neq 0)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0. \tag{$*$}$$

- $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
- Considérons $\Psi : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^2$ définie par :

$$\forall u \in \mathcal{S}, \quad \Psi(u) = (u_0, u_1).$$

  – Ψ est une application linéaire ;
  – Ψ est bijective : en effet, une suite u satisfaisant $(*)$ est uniquement déterminée par la donnée de ces premiers termes $(u_0, u_1) \in \mathbb{K}^2$.

On a donc montré la propriété suivante :

Propriété 14

L'espace $\mathcal{S}$ des suites satisfaisant $(*)$ est de dimension 2.

Traitons le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $b^2 - 4ac \neq 0$.

- Déterminons toutes les suites géométriques satisfaisant $(*)$.
- Décrire explicitement l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites satisfaisant $(*)$.

On retrouve ainsi (partiellement) le résultat suivant :

Propriété 15 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas complexe))

Soient $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors: $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.

3 Modes de définition d'une application linéaire

3.1 Utilisation d'une base

Propriété 16

On considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F avec $\dim(E) = n$.
Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, $(v_1, \cdots v_n)$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$f(e_1) = v_1, \quad f(e_2) = v_2, \quad \ldots \quad, \quad f(e_n) = v_n.$$

Preuve. On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : Supposons qu'une telle application linéaire $f : E \to F$ existe. On a alors pour tout $x \in E$, $x = \sum_i x_i e_i$

$$f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$$

  Ainsi on a $f = \varphi_1 e_1 + \cdots + \varphi_n e_n$, où φ_i est la i-ème application coordonnée.

- Synthèse : Montrons que l'application précédente est linéaire et satisfait $f(e_i) = v_i$ pour tout i. Le deuxième point est évident, on montre le premier : soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \varphi_1(\lambda x + \mu y)e_1 + \cdots + \varphi_n(\lambda x + \mu y)e_n \\ &= \lambda\left(\varphi_1(x)e_1 + \cdots + \varphi_n(x)e_n\right) + \mu\left(\varphi_1(y)e_1 + \cdots + \varphi_n(y)e_n\right) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

□

Conséquences.

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Propriété 17

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Preuve. On note $n = \dim(E)$ et on fixe $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Considérons l'application :

$$\varphi : \mathcal{L}(E, F) \to F^n, \quad f \mapsto (f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

L'application φ est bijective grâce à la propriété précédente. On vérifie qu'elle est de plus linéaire sans difficulté. C'est donc un isomorphisme, et on peut conclure que :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(F^n) = n \dim(F) = \dim(E) \times \dim(F).$$

□

Remarque. Soit E un espace vectoriel. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E. On l'appelle **le dual de** E. On a ainsi $\dim(E^*) = n$.

Exercice. Considérons $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ les applications coordonnées correspondantes. Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^*, appelée la **base duale** de la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

3.2 Utilisation d'espaces supplémentaires

Propriété 18

On considère deux espaces vectoriels $E = E_1 \oplus E_2$ et F.
Pour tout couple (f_1, f_2) d'applications linéaires $f_1 : E_1 \to F$ et $f_2 : E_2 \to F$, alors il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ définie par :

$$\forall x_1 \in E_1, \forall x_2 \in E_2, \quad f(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

Preuve. Puisque pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$, on définit bien une application en posant $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Cette application est de plus uniquement déterminée par f_1 et f_2. Reste à montrer la linéarité de f. Soit pour cela $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, et $x, y \in \mathbb{E}$. Il existe $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ tels que

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad y = y_1 + y_2.$$

Alors $\lambda x + \mu y = \underbrace{(\lambda x_1 + \mu y_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(\lambda x_2 + \mu y_2)}_{\in E_2}$, et donc :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + f_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= \lambda(f_1(x_1) + f_2(x_2)) + \mu(f_1(y_1) + f_2(y_2)) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

□

4 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

4.1 Projecteurs

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On appelle **projection sur** F **parallèlement à** G l'unique application linéaire $p : E \to F$ telle que :

$$\forall y \in F, p(y) = y \quad \text{et} \quad \forall z \in G, p(z) = 0_E.$$

Ainsi pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$, et on a $p(x) = y$.

Remarque. L'existence et l'unicité d'une telle application linéaire p est donnée par la propriété précédente (avec $f_1 : F \to E, y \mapsto y$ et $f_2 : G \to E, z \mapsto 0_E$.

Propriété 19

(1) $p \circ p = p$;

(2) $Ker(p) = G$ et $Im(p) = F = Inv(p) = Ker(p - Id_E)$.

Preuve.

(1) Soit $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tels que $x = y + z$. Alors :

$$p \circ p(x) = p(y) = y = p(x).$$

(2) Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tels que $x = y + z$. Alors :

$$x \in Ker(p) \Leftrightarrow p(x) = 0_E \Leftrightarrow y = 0_E \Leftrightarrow x = z \in G.$$

Ainsi on a bien $Ker(p) = G$.
Soit $y \in F$, alors $p(y) = y$ et $y \in Inv(p)$, et donc $F \subset Inv(p)$.
Si maintenant $y \in Inv(p)$, alors $p(y) = y$ et donc $y \in Im(p)$. Ainsi $Inv(p) \subset Im(p)$.
Enfin soit $y \in Im(p)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x) \in F$. Ainsi on a montré que :

$$F \subset Inv(p) \subset Im(p) \subset F$$

et donc $F = Inv(p) = Im(p)$.

□

Propriété 20

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ p = p.$$

Plus précisément, on a $E = Im(p) \oplus Ker(p)$ et p est la projection sur $Im(p)$ dans la direction de $Ker(p)$.

Preuve. On a déjà montré l'implication $\Rightarrow$. Montrons la réciproque. Pour cela, commençons par montrer que $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.

- Analyse. Soit $x \in E$, on cherche $(y, z) \in Ker(p) \times Im(p)$ tel que $x = y + z$.
  Puisque $z \in Im(p)$, il existe $t \in E$ tel que $z = p(t)$. On a alors en composant par p :

  $$p(x) = p(y) + p(z) = p(z) = p \circ p(t) = p(t) = z.$$

  Ainsi $z = p(x)$ et $y = x - p(x)$

- Synthèse : Soit $x \in E$, posons $z = p(x)$ et $y = x - p(x)$. Montrons que :

  $$x = y + z, \quad y \in Ker(p), \quad z \in Im(p).$$

  Tout est clair, sauf peut-être $y \in Ker(p)$:

  $$p(y) = p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = 0_E.$$

Ainsi on a bien $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.
Soit $x \in E$, on a $x = \underbrace{p(x)}_{\in Im(p)} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in Ker(p)}$ Alors si q est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$, on a $q(x) = p(x)$. Ainsi $q = p$, c'est à dire p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$. □

Exemple. Identifier l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-9x + 6y, -15x + 10y, -5x + 3y + z)$.

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = F \oplus G$. Soit :

- p la projection sur F parallèlement à G ;
- q la projection sur G parallèlement à F.

On dit que p et q sont des **projecteurs associés**.

Propriété 21

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

(1) $p + q = Id_E$;

(2) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Preuve. Soit $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$

(1) $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = y + z = x$, donc $p + q = Id_E$;

(2) $p \circ q(x) = p(z) = 0_E$. De même, on a $q \circ p(x) = q(y) = 0_E$.

$\square$

Exercice. On considère deux projecteurs f et g d'un espace E.

(i) Montrer que $s = f + g$ est un projecteur si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} s \text{ est un projecteur } &\Leftrightarrow s \circ s = s \\ &\Leftrightarrow (f+g) \circ (f+g) = f + g \\ &\Leftrightarrow f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2 = f + g \\ &\Leftrightarrow f \circ g + g \circ f = 0. \end{aligned}$$

Alors en composant à gauche et à droite par g, on obtient :

$$g \circ f \circ g + g \circ f = 0 \text{ et } f \circ g + g \circ f \circ g = 0.$$

D'où $f \circ g = g \circ f$, et en reportant dans les égalités $f \circ g + g \circ f = 0$, on a bien $f \circ g = g \circ f = 0$.
Réciproquement, si $f \circ g = g \circ f = 0$, alors $f \circ g + g \circ f = 0$ et s est un projecteur.

(ii) Montrer qu'alors $Im(s) = Im(f) + Im(g)$ et $Ker(s) = Ker(f) \cap Ker(g)$.

On montre $Im(s) = Im(f) + Im(g)$ par double inclusion :

- $\subset$ Soit $y \in Im(s)$, $\exists x \in E : s(x) = y = f(x) + g(x)$. Ainsi $y \in Im(f) + Im(g)$.
- $\supset$ Soit $y \in Im(f) + Im(g)$, alors $\exists x_1, x_2 \in E : y = f(x_1) + g(x_2)$. Prenons alors $x = f(x_1) + g(x_2)$. On a :

$$s(f(x_1) + g(x_2)) = f \circ f(x_1) + f \circ g(x_2) + g \circ f(x_1) + g \circ g(x_2) = f(x_1) + g(x_2) = y.$$

Donc $y \in Im(s)$.

On montre $Ker(s) = Ker(f) \cap Ker(g)$ par double inclusion :

- $\supset$ Soit $x \in Ker(f) \cap Ker(g)$, alors $f(x) = g(x) = 0$, et donc $s(x) = f(x) + g(x) = 0$ et $x \in Ker(s)$.
- $\subset$ Soit $x \in Ker(s)$, alors $s(x) = f(x) + g(x) = 0$. En composant à gauche par f, on obtient :

$$f \circ f(x) + f \circ g(x) = f(x) = 0.$$

Donc $x \in Ker(f)$. De même $x \in Ker(g)$.

4.2 Symétries

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On appelle **symétrie par rapport à F dans la direction de G** l'unique application linéaire $s : E \to F$ telle que :

$$\forall y \in F, s(y) = y \quad \text{et} \quad \forall z \in G, s(z) = -z.$$

Ainsi pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$, et on a $s(x) = y - z = 2y - x$.

Remarque. On a donc $s = p - q = 2p - Id_E$ où p et q sont les projecteurs associés à la somme direct $E = F \oplus G$.

Propriété 22

(1) $s \circ s = Id_E$. En particulier s est un automorphisme de E, et $s^{-1} = s$;

(2) $F = Inv(s) = Ker(s - Id_E)$;

(3) $G = Ker(s + Id_E)$

Preuve.

(1) On compose :

$$s \circ s = (p - q) \circ (p - q) = p \circ p - p \circ q - q \circ p + q \circ q = p + q = Id_E.$$

(2) Soit $x \in F$, on a $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et donc $s(x) = x$. Ainsi $x \in Inv(s)$.

Si $x \in Inv(s)$, alors $s(x) = x$ soit encore $(s - Id_E)(x) = 0_E$ et donc $x \in Ker(s - Id_E)$.

Soit $x \in Ker(s - Id_E)$, $\exists!(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. On a $s(x) = x$, d'où $y - z = y + z$, et donc par unicité de la décomposition dans une somme direct, $z = 0_E$. Ainsi $x = y \in F$.

On a ainsi montré que $F \subset Inv(s) \subset Ker(s - Id_E) \subset F$ et donc $F = Inv(s) = Ker(s - Id_E)$.

(3) Soit $x \in G$, on a $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ et donc $s(x) = -x$ et $(s + Id_E)(x) = 0_E$. Ainsi $x \in Ker(s + Id_E)$.

Réciproquement, soit $x \in Ker(s + Id_E)$. $\exists!(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. On a $s(x) = -x$, d'où $y - z = -y - z$, et donc par unicité de la décomposition dans une somme direct, $y = 0_E$. Ainsi $x = z \in G$.

Finalement on a bien montré que $G = Ker(s + Id_E)$.

□

Propriété 23

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$s \text{ est une symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad s \circ s = Id_E.$$

Plus précisément, $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $Ker(s - Id_E)$ dans la direction de $Ker(s + Id_E)$.

Preuve. On a déjà montré l'implication $\Rightarrow$. Montrons la réciproque. Pour cela, posons $p = \dfrac{s + Id_E}{2}$. On a :

$$p \circ p = \frac{(s + Id_E) \circ (s + Id_E)}{4} = \frac{s \circ s + s + s + Id_E}{4} = \frac{s + Id_E}{2} = p.$$

Donc p est un projecteur, sur $F = Ker(p - Id_E)$ parallèlement à $G = Ker(p)$. En particulier on a :

$$E = F \oplus G$$

et $s = 2p - Id_E$. Donc s est bien la symétrie par rapport à $F = Ker(\frac{s-Id_E}{2}) = Ker(s - Id_E)$ dans la direction de $G = Ker(\frac{s+Id_E}{2}) = Ker(s + Id_E)$. $\square$

Exercice. On considère l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À tout élément $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe l'élément $T(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

T est clairement un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T \circ T(f)(x) = f(-(-x)) = f(x).$$

Donc $T \circ T = Id_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et T est la symétrie par rapport à $\mathcal{P} = Ker(T - Id_E)$ parallèlement à $\mathcal{I} = Ker(T + Id_E)$. Or :

$$f \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) \Leftrightarrow ft \text{ est paire.}$$

De même $f \in \mathcal{I} \Leftrightarrow f$ est impaire. Ainsi on retrouve de cette manière que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

5 Rang d'une application linéaire

5.1 Généralités

Définition.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que E ou F est de dimension finie. On définit le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ par :

$$rg(f) = \dim Im(f).$$

Remarque. $Im(f)$ est bien de dimension finie et on a :

$$rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F)).$$

En effet,

- si $\dim(F) < +\infty$, alors comme $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, $Im(f)$ est de dimension finie et $rg(f) = \dim Im(f) \leq \dim(F)$.
- si $\dim(E) < +\infty$, et si on note $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, alors on a vu que :

  $$Im(f) = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

  Ainsi le rang de f est égal au rang de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$, et donc $rg(f) \leq n = \dim(E)$.

Exercice. On considère deux endomorphismes f, g d'un espace E de dimension finie.

(i) Établir que $rg(g+f) \leq rg(g) + rg(f)$ et $|rg(g) - rg(f)| \leq rg(g+f)$.

On a $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$, donc $rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$.
En utilisant l'inégalité précédente, on obtient :

$$rg(g) = rg((f+g) + (-f)) \leq rg(f+g) + rg(-f) = rg(f+g) + rg(f).$$

De même, $rg(f) \leq rg(f+g) + rg(g)$. D'où le résultat.

(ii) Montrer que $rg(g \circ f) \leq \min(rg(g), rg(f))$.

D'abord, $Im(g \circ f) \subset Im(g)$, donc $rg(g \circ f) \leq rg(g)$.
D'autre part, on a $f : E \to Im(f)$. Considérons alors la restriction $\tilde{g}$ de g à $Im(f)$: $\tilde{g} : Im(f) \to E$. On a $g \circ f = \tilde{g} \circ f$. Par ce qu'on a fait précédemment,

$$rg(g \circ f) = rg(\tilde{g} \circ f) \leq rg(\tilde{g}) \leq \dim(Im(f)) = rg(f).$$

Propriété 24

Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $u \in \mathcal{L}(G, E)$, $v \in \mathcal{L}(F, H)$ sont des isomorphismes, alors :

$$rg(f) = rg(f \circ u) = rg(v \circ f).$$

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (g_1, \cdots, g_n)$ une base de G, alors $(u(g_1), \cdots, u(g_n))$ est une base de E, et donc :

$$Im(f) = Vect(f \circ u(g_1), \cdots, f \circ u(g_n)) = Vect(f \circ u).$$

D'où en prenant la dimension, $rg(f) = rg(f \circ u)$. □

5.2 Théorème du rang

Théorème 25 (du rang)

Soit E de dimension finie, F quelconque, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors tout supplémentaire de $Ker(f)$ est isomorphe à $Im(f)$.

Preuve. Soit S un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E, de sorte que $E = Ker(f) \oplus S$. Considérons alors :

$$\tilde{f} : S \to Im(f), x \to f(x)$$

la restriction de f à S vu comme application à valeurs dans $Im(f)$. Montrons que $\tilde{f}$ définit un isomorphisme de S sur $Im(f)$:

- $\tilde{f}$ est surjective : en effet pour tout $y \in Im(f)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On décompose alors x dans la somme directs $E = Ker(f) \oplus S$:

$$\exists (x_1, x_2) \in Ker(f) \times S, x = x_1 + x_2.$$

  En composant par f, on obtient : $y = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = \tilde{f}(x_2)$. Donc $\tilde{f}$ est bien surjective.

- $\tilde{f}$ est injective : soit pour cela $x \in S$ tel que $\tilde{f}(x) = 0_F$. Alors $f(x) = 0_F$ et donc $x \in S \cap Ker(f) = \{0_E\}$. Donc $x = 0_E$ et $\tilde{f}$ est bien injective.

□

Comme conséquence importante, on a la propriété suivante :

Propriété 26

Soit E de dimension finie, F quelconque, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$\dim(E) = rg(f) + \dim Ker(f).$$

Preuve. Comme E est de dimension finie, on en déduit que $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont de dimensions finies. De plus si S est un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E, on a avec le point précédent :

$$\dim(E) = \dim S + \dim Ker(f) = \dim Im(f) + \dim Ker(f) = rg(f) + \dim Ker(f).$$

□

Remarque. Attention, il s'agit d'une égalité de dimension ! En général, on n'a pas $E = Im(f) \oplus Ker(f)$.

Exercice. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer $rg(g) + rg(f)$ lorsque $g + f$ est bijectif et $g \circ f = 0$.

D'après un résultat démontré précédemment, on a $rg(f+g) \leq rg(f)+rg(g)$. Comme $g+f$ est bijectif, on en déduit :

$$\dim(E) = rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g).$$

Maintenant on a $g \circ f = 0$, alors $Ker(f) \subset Im(g)$, et donc

$$rg(g) \geq \dim Ker(f) = \dim(E) - rg(f).$$

Ainsi on a montré $rg(f) + rg(g) = \dim E$.

6 Équations linaires

Définition.

On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :

- $f : E \to F$ une application linéaire ;
- $b \in F$ appelé second membre de l'équation ;
- $x \in E$ un vecteur inconnu.

On appelle **équation homogène associée** à $f(x) = b$ l'équation linéaire $f(x) = 0_F$.

Propriété 27

(1) L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $f(x) = 0_E$ est $Ker(f)$.

(2) L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est non vide si et seulement si $b \in Im(f)$ et on a alors :

$$\mathcal{S} = x_0 + Ker(f)$$

où x_0 est une solution particulière de $f(x) = b$.

Preuve. Le premier point est évident. Montrons le deuxième point. Clairement $\mathcal{S}\neg\emptyset \Leftrightarrow b \in Im(f)$.
Si $b \in Im(f)$, alors il existe $x_0 \in E$ (solution particulière) tel que $f(x_0) = b$.
Dès lors, on a :

$$x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f(x) = b = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0_E \Leftrightarrow x - x_0 \in Ker(f) \Leftrightarrow x \in x_0 + Ker(f).$$

□

Remarque. Si f est bijective, l'équation linéaire $f(x) = b$ admet une unique solution.

Exemples.

- Un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

  est une équation linéaire $f(X) = B$ avec $f : (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p, \cdots, a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p) \in \mathbb{K}^n$ et $B = (b_1, \cdots, b_n)$.

- Les droites, les plans de l'espaces sont caractérisées par une équation linéaire.

- Toute équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' + a(t)y = b(t)$ peut être interprétée comme une équation linéaire $f(y) = b(t)$ avec $f : y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mapsto y' + ay \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.