

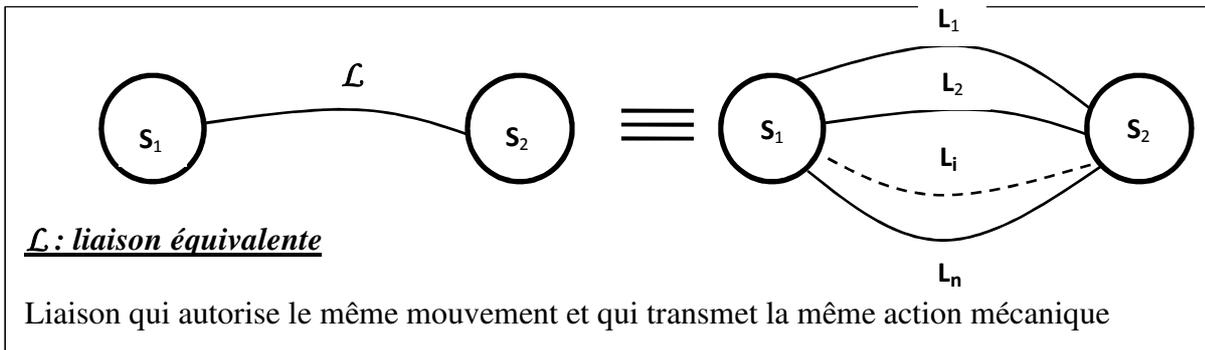
Préparation au concours en SII

4^{ème} partie : ASSOCIATIONS DE LIAISONS EN // ET EN SERIE

& CHAINES DES SOLIDES : Hyperstatisme et mobilité

1- liaisons en parallèles :

a- Liaison équivalente :



- Etude statique :

On applique le principe fondamental de la statique à S_2 :

$$n \text{ liaisons } L_i : \sum_{i=1}^n \{ \tau_i(s_1 \rightarrow s_2) \} + \{ \text{Ext} \rightarrow s_2 \} = \{ 0 \}$$

$$\text{liaison équivalente } \mathcal{L} : \{ \tau(s_1 \rightarrow s_2) \} + \{ \text{Ext} \rightarrow s_2 \} = \{ 0 \}$$

d'où :

.....

- Etude cinématique :

$$\forall A, \quad \vec{V}_{(A \in S_1 / S_2)} \text{ et } \vec{\Omega}_{(S_1 / S_2)} \text{ sont identiques } \forall \{ v(s_1 / s_2) \}$$

d'où :

.....

NB : On peut aussi obtenir le torseur cinématique de L à partir du torseur statique (liaison parfaite).

b- Mobilité :

On définit le degré de mobilité (ou mobilité cinématique) par :

.....

Nc^* :

c- Degré d'hyperstatisme :

Le degré d'hyperstatisme h est déduit de la relation suivante :

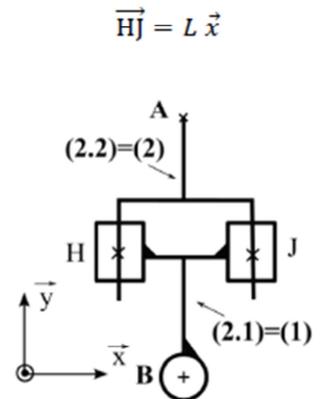
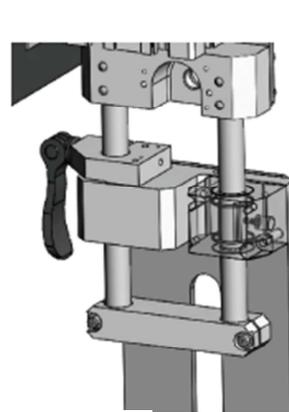
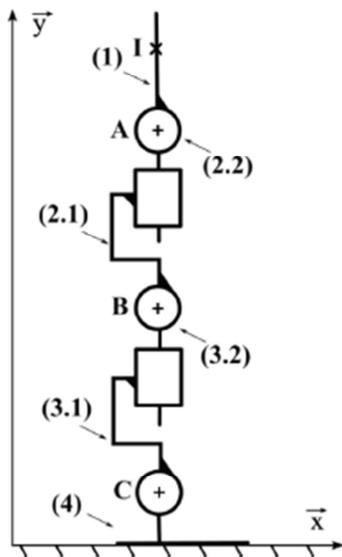
Ns :

.....

fs :

d- Applications (à faire sur cahier d'exercices)

- **Concours E3A 2019 :**



détail de la liaison glissière entre les solides (2.1) noté (1) et (2.2) noté (2).

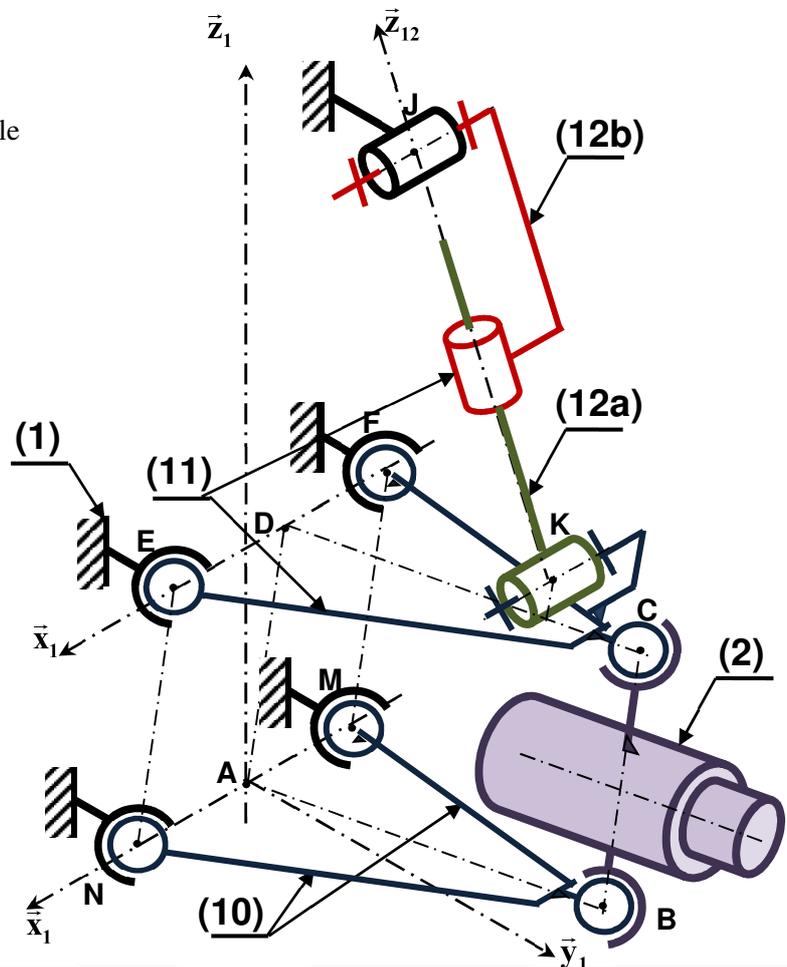
$$\vec{HJ} = L \vec{x}$$

- Q1- dresser le graphe des liaisons entre (1) et (2).
- Q2- exprimer le torseur d'AM associé à chaque liaison
- Q3- démontrer par calcul que la liaison équivalente aux deux liaisons est glissière.
- Q4- déterminer le degré d'hyperstatisme.
- Q5- y-a-t-il des contraintes géométriques à respecter pour que le mécanisme réel puisse être assemblé correctement ? si oui lesquelles ?

- **CNC 2011 :**

- 1- Quelle est sans calcul, la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle entre le triangle inférieur (10) et le châssis (1),
- 2- Retrouver par calcul le torseur Statique de la liaison équivalente
- 3- quel est son degré de mobilité
- 4- quel est son degré d'hyperstatisme

on donne :
 $\vec{MN} = a \vec{x}_1$



- **CNC 2015 :**

L'objectif de cette partie est de modéliser la liaison équivalente entre le berceau et la bobine.

Lors de la dépose de la bobine sur le berceau, sa mise en position sur ce dernier est réalisée grâce à une surface plane verticale et une forme en vé (Voir figures 15, 16 et 17).

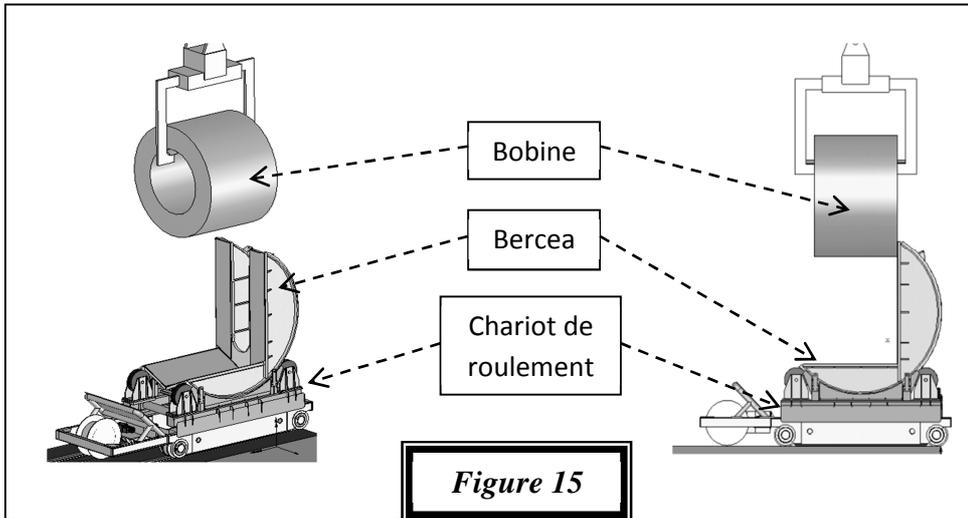
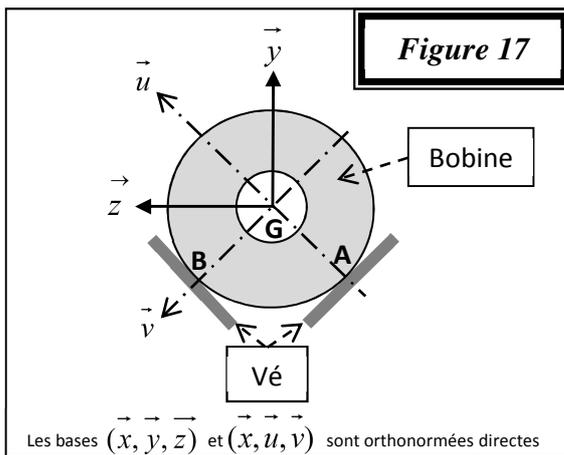


Figure 15



Les bases $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v})$ sont orthonormées directes

Figure 17

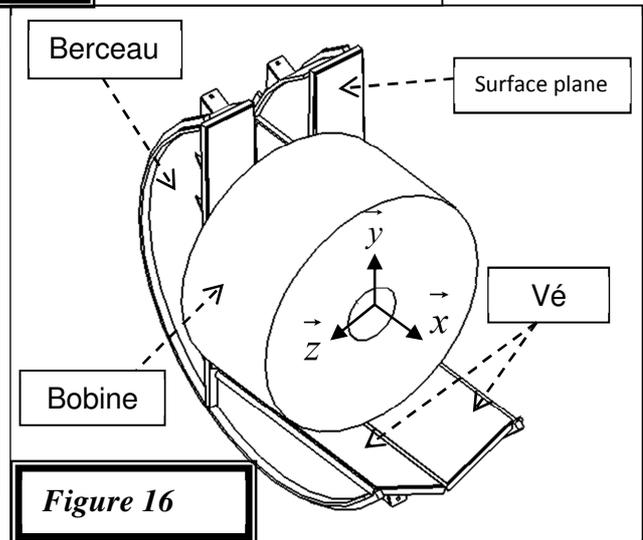
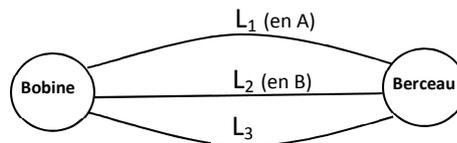


Figure 16

Pour simplifier, les deux surfaces constituant

le vé seront supposées perpendiculaires : (A, \vec{u}) et (B, \vec{v}) sont normales aux contacts entre la bobine et le berceau en A et B respectivement.

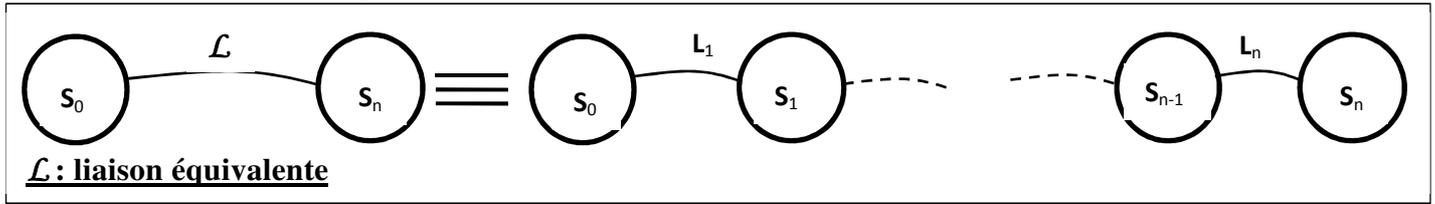
1 : Spécifier, en justifiant, la nature et les caractéristiques géométriques des liaisons du schéma de structure suivant.



2 : Par une étude statique, identifier la liaison équivalente entre la bobine et le berceau, et évaluer sa mobilité cinématique. (Si nécessaire, réduire les torseurs au centre de gravité G de la bobine).

2- Associations de liaisons en serie : (chaine ouverte)

a- Liaison équivalente :



- *Etude statique :*

- On applique le P.F.S. à S_0 : $\{\text{Ext} \rightarrow s_0\} + \{s_1 \rightarrow s_0\} = \{0\} \Rightarrow \{\text{Ext} \rightarrow s_0\} = \{s_0 \rightarrow s_1\}$

- On applique le P.F.S. à $\{S_0, S_1, \dots, S_{i-1}\}$: $\{\text{Ext} \rightarrow s_0\} + \{s_i \rightarrow s_{i-1}\} = \{0\} \Rightarrow \{\text{Ext} \rightarrow s_0\} = \{s_{i-1} \rightarrow s_i\}$

- On applique le P.F.S. à S_0 : pour le cas de la liaison équivalente :

$$\{\text{Ext} \rightarrow s_0\} + \{s_n \rightarrow s_0\} = \{0\} \Rightarrow \{\text{Ext} \rightarrow s_0\} = \{s_0 \rightarrow s_n\}$$

d'où :

.....

- *Etude cinématique :*

composition des mouvements: $\{v_{s_n / s_0}\} = \{v_{s_n / s_{n-1}}\} + \dots + \{v_{s_1 / s_0}\}$

d'où :

.....

NB : On peut aussi obtenir le torseur cinématique de L à partir du torseur statique (liaison parfaite).

b- *Mobilité :*

✓ On définit le degré de mobilité (ou mobilité cinématique) par :

$m = \dots$

$N_c : \dots$

✓ On définit le degré de mobilité utile par :

$m_u = \dots$

$N_c^* : \dots$

✓ On définit le degré de mobilité interne par : $m = m_u + m_i$

m_i : mobilité interne :



	Liaisons en parallèles	Liaisons en série
Etude statique	$\{\tau_e\} = \sum_{i=1}^n \{\tau_i\}$	$\{\tau_e\} = \{\tau_i\}, \forall i$
Etude cinématique	$\{v_e\} = \{v_i\}, \forall i$	$\{v_e\} = \sum_{i=1}^n \{v_i\}$
mobilité	$m = N_c^*$	$m = N_c, m_u = N_c^*, m = m_u + m_i$
hyperstaticité	$h = N_s - r_s$	$h = 0$

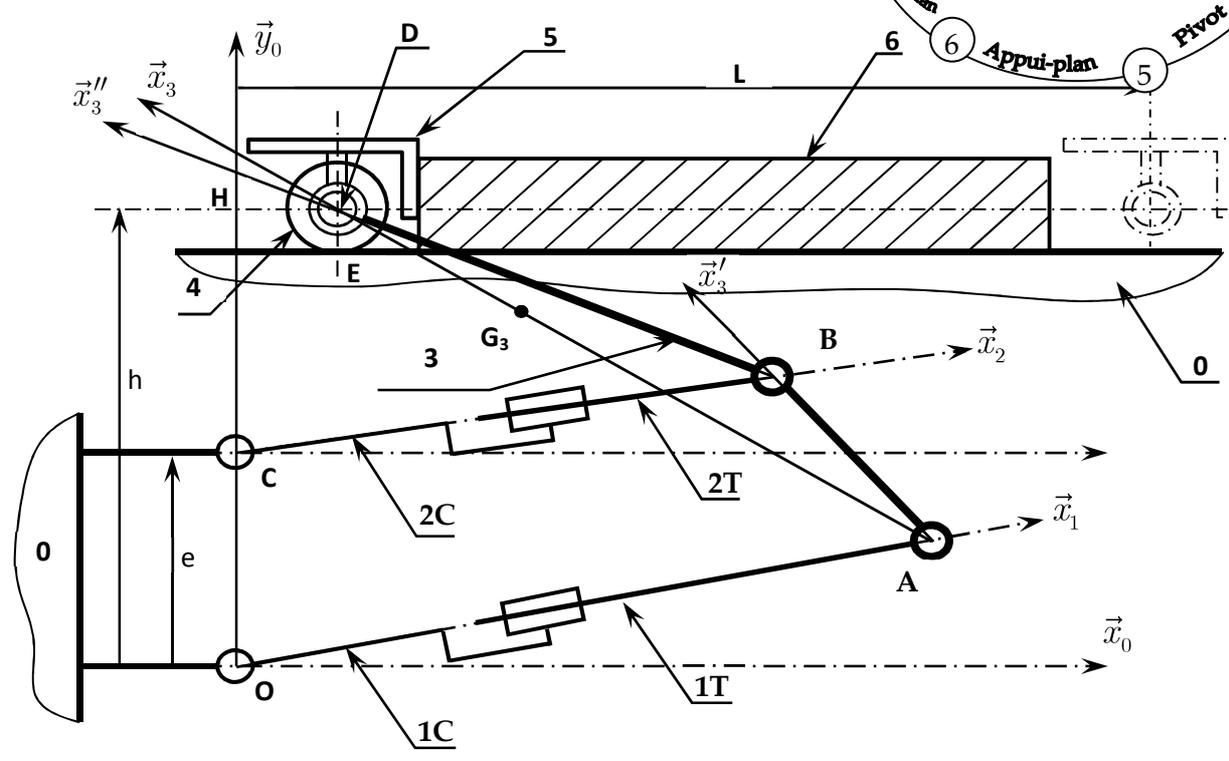
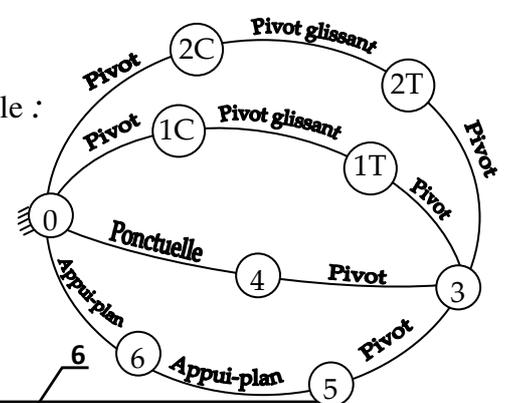
A retenir

Lieux géométriques de conservation de forme des torseurs :

<u>Liaisons</u>	<u>Lieux géométrique</u>
<i>Pivot, pivot glissant, hélicoidale</i>	<i>En tout point de l'axe</i>
<i>rotule , inéaire annulairel , rotule à doight</i>	<i>Au centre de la liaison</i>
<i>Appui plan, glissière</i>	<i>En tout point de l'espace</i>
<i>linéaire rectiligne, ponctueel</i>	<i>En tout point de la normale</i>

c- Applications : (à faire sur cahier d'exercices)

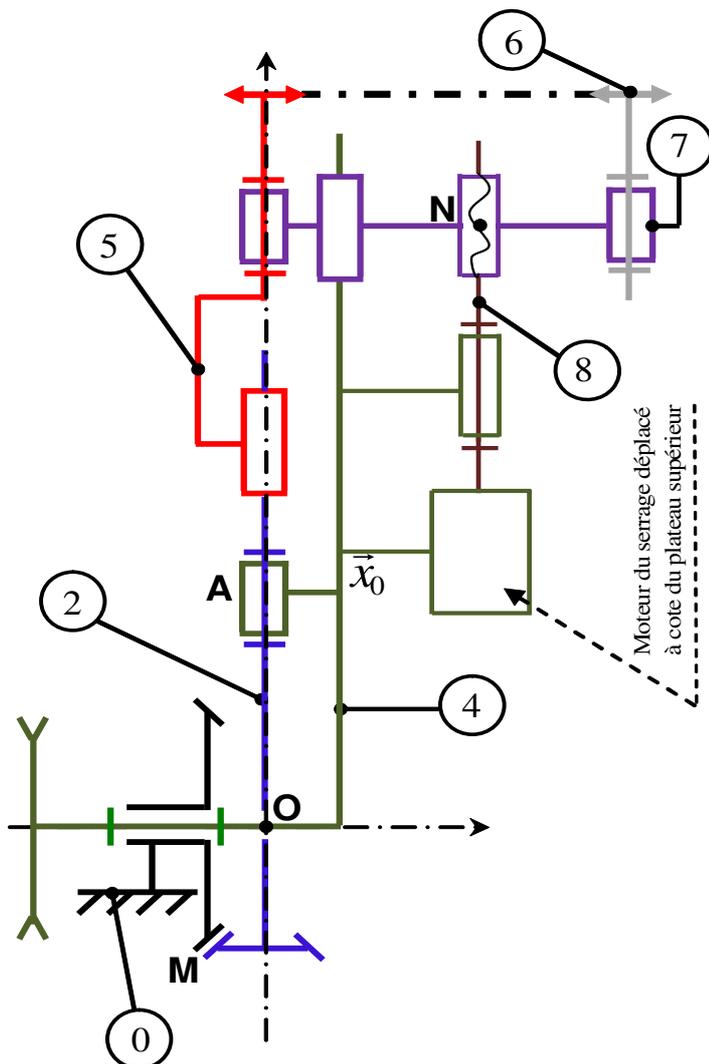
- **CNC** On donne ci-contre le Graphe de structure du modèle :



L'objectif de cette étude est d'analyser la structure mécanique de la table dans la phase où les deux vérins sont en action. Dans cette étude toutes les liaisons sont supposées parfaites.

- a- Donner le nom et les torseurs statique et cinématique de la liaison équivalente de la chaîne en série : (0, 4, 3).
- b- Déterminer le degré de mobilité, la mobilité utile et la mobilité interne de la chaîne.

- ADAPTE DU CONCOURS CNC 2019 :



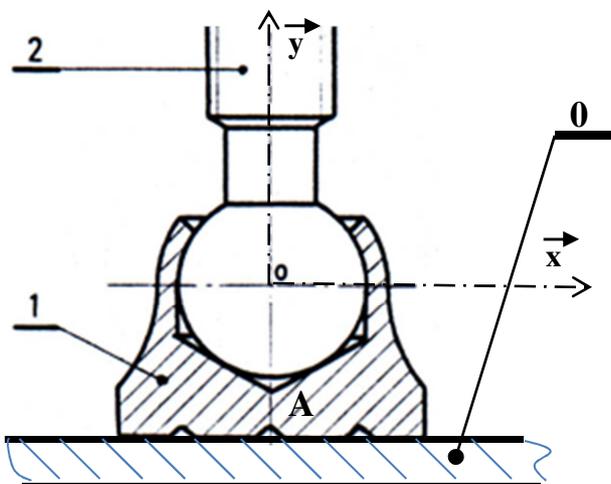
On considère la chaîne de solides 4-2-5 :

a- donner les torseurs cinématique et les noms des liaisons : L_{42} et L_{25}

b- Déterminer par calcul la liaison équivalente entre (4) et (5) aux deux liaisons en série L_{42} et L_{25} :

c- Donner le degré de mobilité de la liaison équivalente

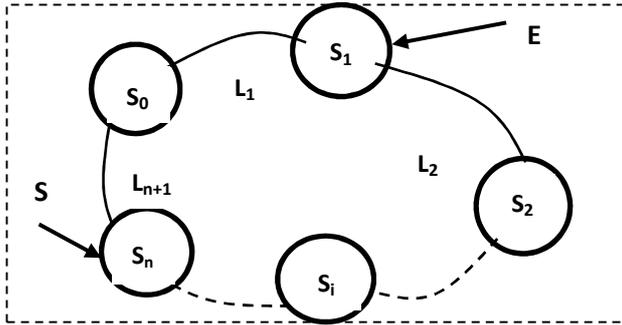
- APPUI REGLABLE : Etude de la chaîne 0—1—2 :



- a- Tracer le graphe des liaisons
- b- Trouver la liaison équivalente entre 0 et 2 par une étude cinématique.
- c- Trouver la liaison équivalente entre 0 et 2 par une étude statique.
- d- Déterminer le degré de mobilité, la mobilité utile et la mobilité interne de la chaîne.

3- Chaîne continue fermée :

3-1- graphe des liaisons :



n pièces + le bâti $S_0 \implies n + 1$ liaisons

E : représente les actions mécaniques de l'extérieur sur l'entrée.

S : représente les actions mécaniques de l'extérieur sur la sortie.

3-2- Etude statique :

Les $n+1$ liaisons introduisent N_s inconnues statiques. On applique le **P.F.S.** aux n pièces sauf au bâti \implies système de $6n$ équations à N_s inconnues de rang r_s ($r_s \leq 6$) en fonction des efforts extérieurs et des paramètres de position.

On appelle degré d'hyperstaticité du mécanisme : $h = N_s - r_s$

NB : - r_s est difficile à déterminer quand n est grand.

- $h=0$: système isostatique (on peut déterminer toutes les inconnues)
- $h>0$: système hyperstatique (h : nombre d' inconnues hyperstatiques)

3-2- Etude cinématique :

Les $n+1$ liaisons introduisent N_c inconnues cinématiques et la fermeture cinématique permet d'écrire **6** équations de rang r_c ($r_c \leq 6$) :

$$\{v_{S_1 / S_2}\} + \{v_{S_2 / S_3}\} + \dots + \{v_{S_n / S_0}\} + \{v_{S_0 / S_1}\} = \{0\}$$

La mobilité m du mécanisme représente le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes nécessaires pour calculer toutes les autres .

D'où : $m = N_c - r_c$ avec : $m = m_u + m_i$

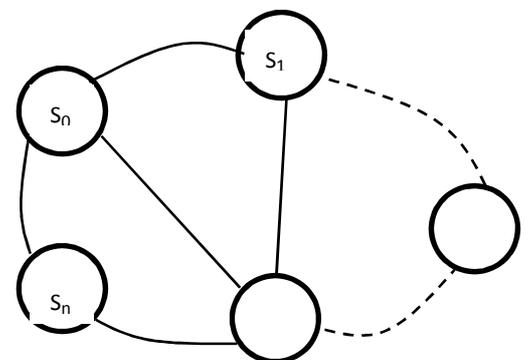
m_u : mobilité utile

m_i : mobilité interne : nombre de mouvements qui n'entraînent aucun mouvement des autres pièces c'est-à-dire le nombre de degrés de libertés qui existent quand **S_n** est fixe par rapport à **S_0**

4- Chaîne complexe :

4-1- Graphe de structure :

Le graphe de structure fait apparaître plusieurs chaînes continues fermées imbriquées avec n pièces (sans le bâti) et l liaisons.



4-2- Nombre cyclomatique du graphe :

C'est le nombre de cycles indépendants γ dans le graphe :

$$\gamma = l - n$$

4-3- Etude statique :

C'est la même étude que pour une seule chaîne fermée :

$$h = N_s - r_s$$

$$m = 6n - r_s \quad \text{D'où :}$$

$$h = N_s + m - 6n$$

:

4-4- Etude cinématique :

On écrit les fermetures cinématiques pour les γ cycles indépendants

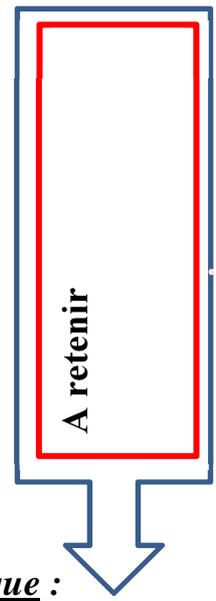
$\implies 6\gamma$ équations scalaires de rang r_c :

$$m = N_c - r_c$$

$$h = 6\gamma - r_c$$

D'où :

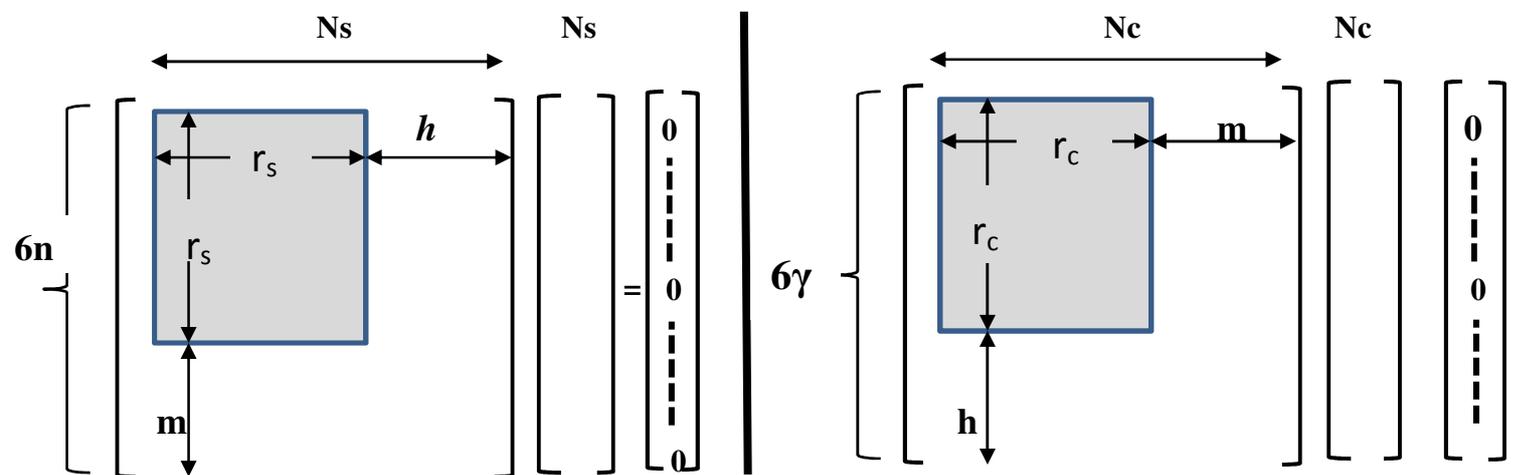
$$h = 6\gamma + m - N_c$$



5- Conclusion :

Etude statique :

Etude cinématique :



Applications :

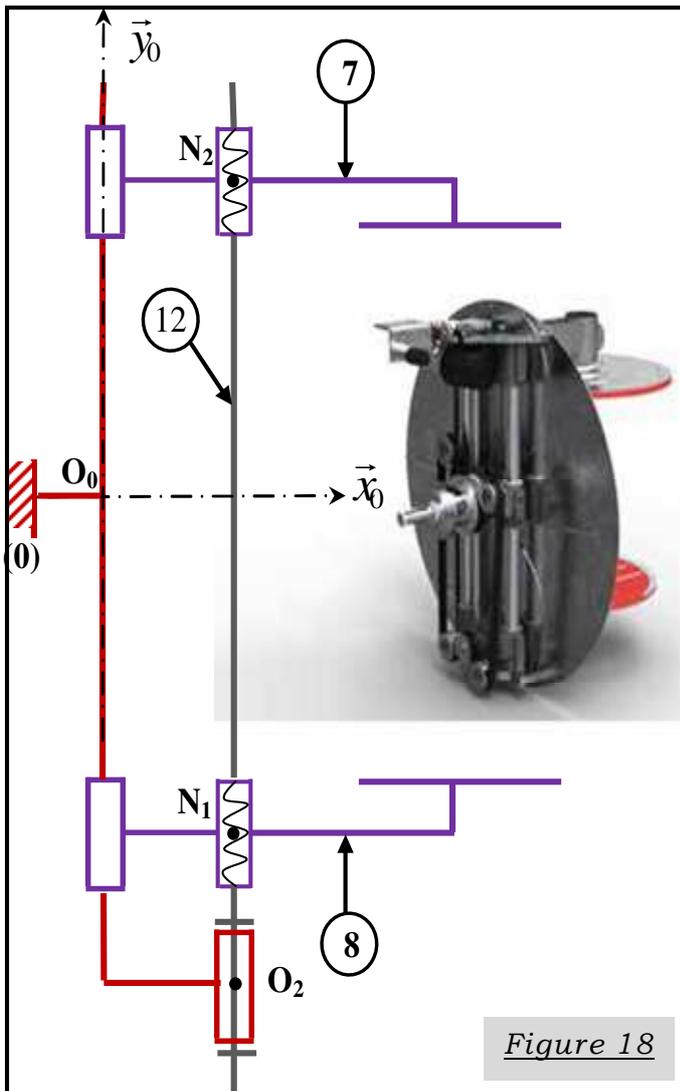
Etude de l'hyperstatisme du système de serrage

Objectif : valider la solution retenue pour le guidage en translation du système de serrage.

Le schéma cinématique partiel du système de serrage (**figure 18**) est représenté ci-dessous :

L'étude se fera dans la phase de serrage du pot et consiste à déterminer et justifier l'hyperstaticité du mécanisme.

Le système de serrage simplifié est constitué des éléments suivants :



- **Colonne de guidage liée au bâti 0** : repère lié : $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- **Vis 12** : en liaison pivot parfaite d'axe (O_2, \vec{y}_0) avec la colonne (0).
- **Tête supérieure 7** : en liaison glissière parfaite de direction \vec{y}_0 avec la colonne (0) et en liaison hélicoïdale, à droite et de pas p d'axe (N_2, \vec{y}_0) avec la vis (12).
- **Tête inférieure 8** : en liaison glissière parfaite de direction \vec{y}_0 avec la colonne (0) et en liaison hélicoïdale, à gauche et de pas p d'axe (N_1, \vec{y}_0) avec la vis (12).

Questions :

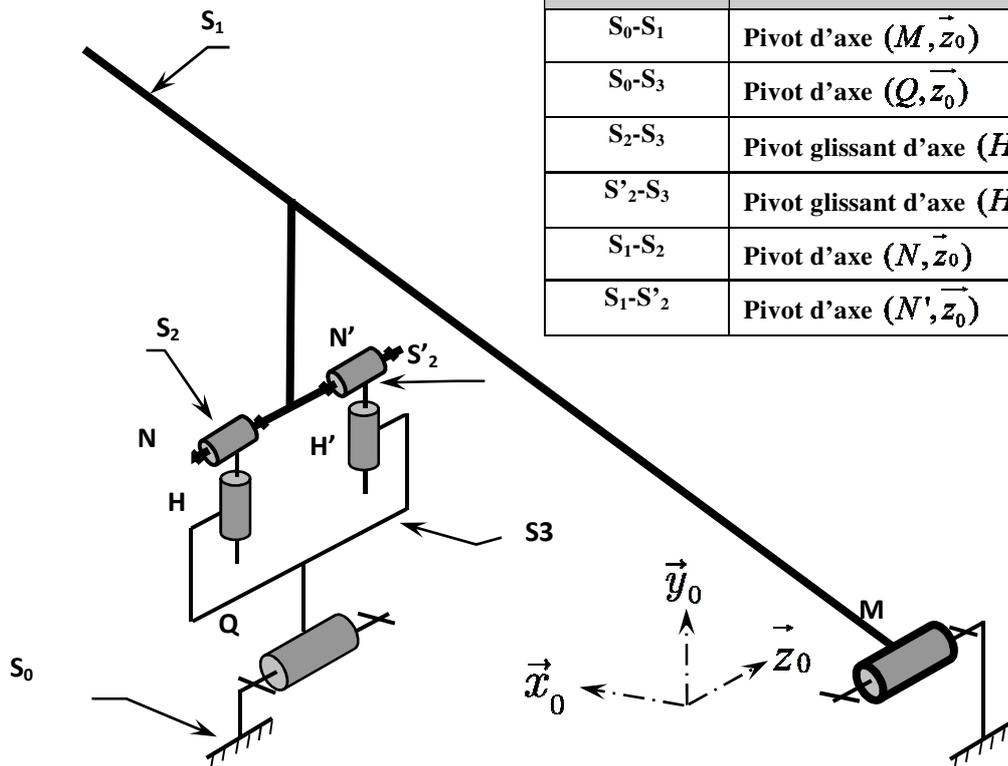
- Tracer le graphe de liaisons du mécanisme
- Donner en le justifiant, sa mobilité utile et interne.
- En appliquant la formule de mobilité, déterminer son degré d'hyperstaticité h_1
- Proposer une nouvelle solution permettant de rendre le degré d'hyperstaticité : $h_2 = 2$.
- Justifier pourquoi le constructeur a opté pour la première solution.

-CNC2009 :

Etude d'hyperstatisme du mécanisme de guidage :

Solides liés	Nature de la liaison
S ₀ -S ₁	Pivot d'axe (M, \vec{z}_0)
S ₀ -S ₃	Pivot d'axe (Q, \vec{z}_0)
S ₂ -S ₃	Pivot glissant d'axe (H, \vec{y}_0)
S' ₂ -S ₃	Pivot glissant d'axe (H', \vec{y}_0)
S ₁ -S ₂	Pivot d'axe (N, \vec{z}_0)
S ₁ -S' ₂	Pivot d'axe (N', \vec{z}_0)

Figure 2



- 1- Dresser le schéma de structure du mécanisme de guidage.
- 2- Sachant que : $m_u=1$, Evaluer le degré d'hyperstatisme h .
- 3- Après avoir remplacé la liaison en N par sphérique (rotule) et celle en N' par sphère cylindre (linéaire annulaire), réévaluer le degré d'hyperstatisme.
- 4- Quel est l'avantage d'une telle solution ?

- CNC 2012 : Hyperstatisme (document annexe 2)

L'objectif de cette partie est de choisir l'une des deux solutions technologiques proposées. Hypothèse : toutes les liaisons sont parfaites.

Etude de la solution 1 : (document annexe 2, figure 1)

- 1- Donner la liaison équivalente entre S2 et S1.
- 2- Donner le degré de mobilité « m » du système. **Préciser** ces mobilités.
- 3- En déduire le degré d'hyperstatisme « h » du système.

Etude de la solution 2 : (document annexe 2, figure 2)

- 1- Donner le degré de mobilité « m » du système. **Préciser** ces mobilités.
- 2- En déduire le degré d'hyperstatisme « h » du système.
- 3- Le constructeur a choisi la solution 2, pourquoi ?

DOCUMENT ANNEXE 2

Figure :1 (Solution 1)

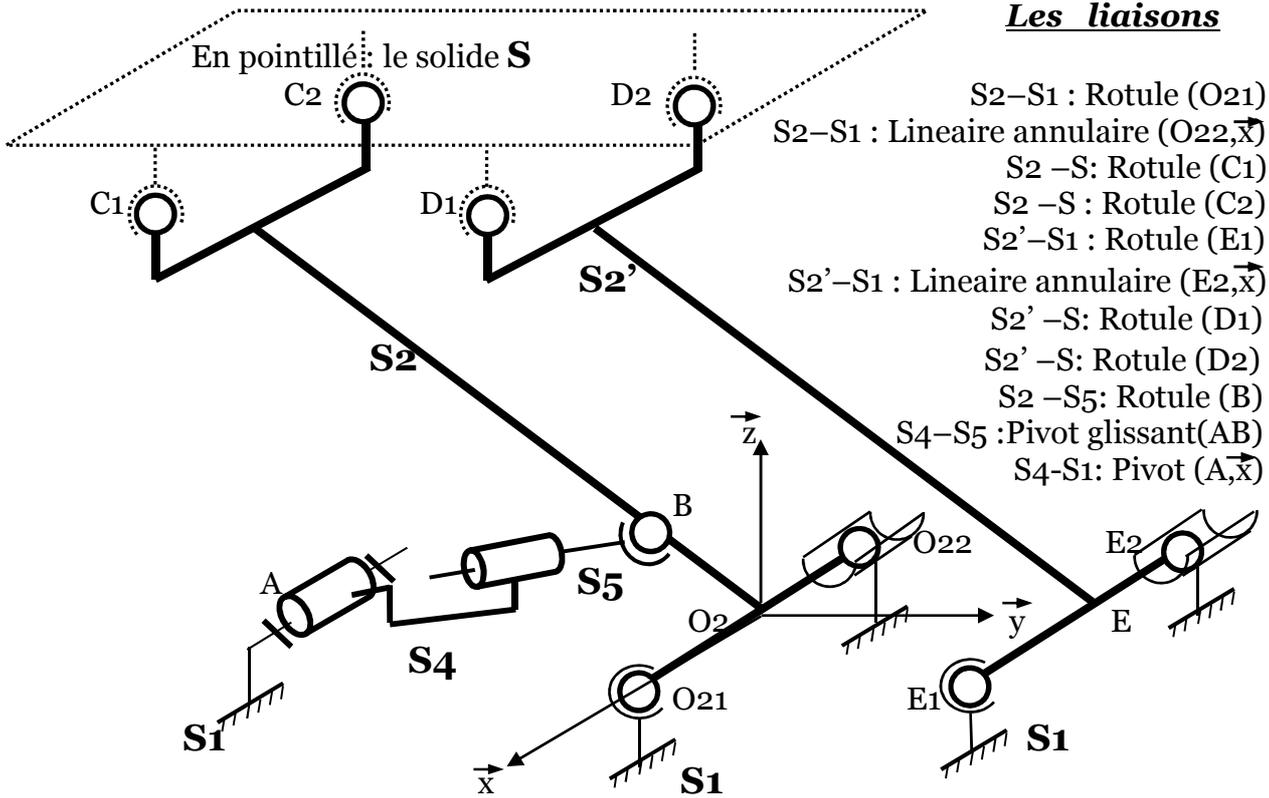
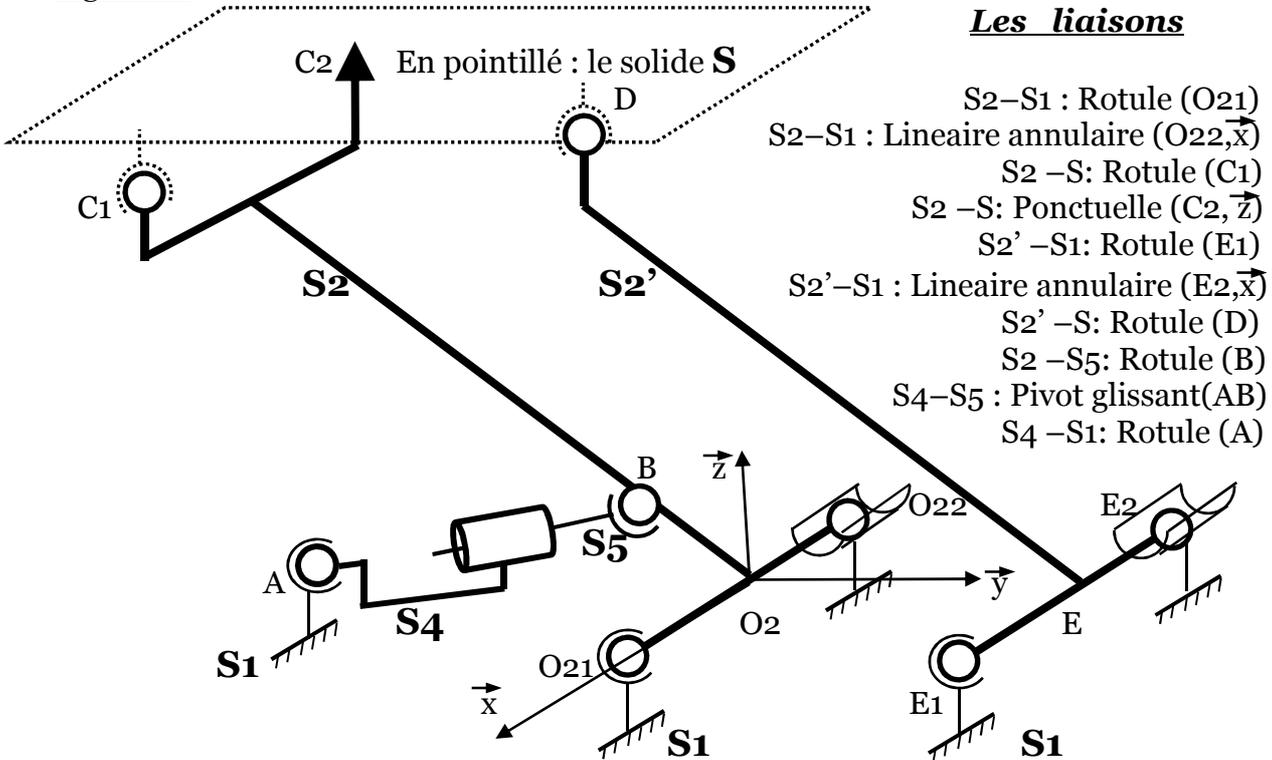


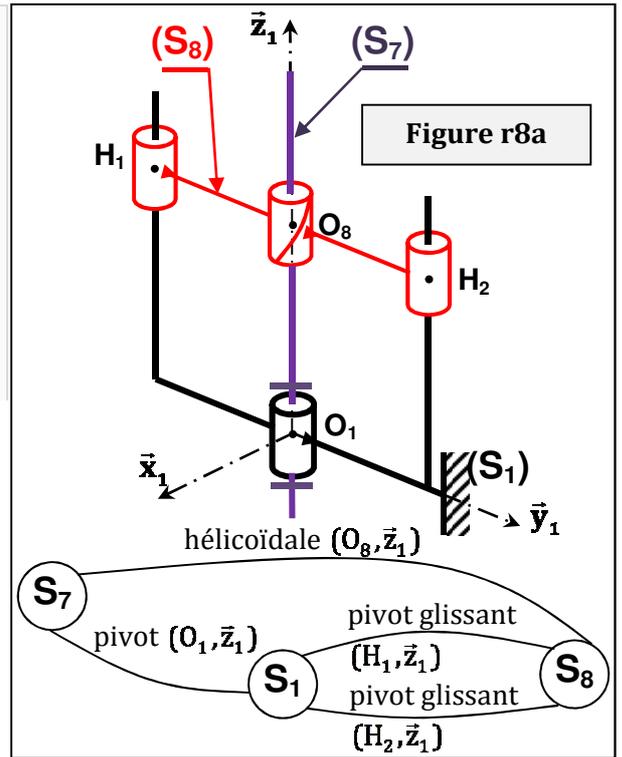
Figure : 2 (Solution 2)



➤ **Question préliminaire:**

Le mécanisme est représenté dans un premier temps par le schéma cinématique de la **figure r8a** ci-contre. On rappelle que **(S₇)** est entraîné en mouvement par la poulie (39).

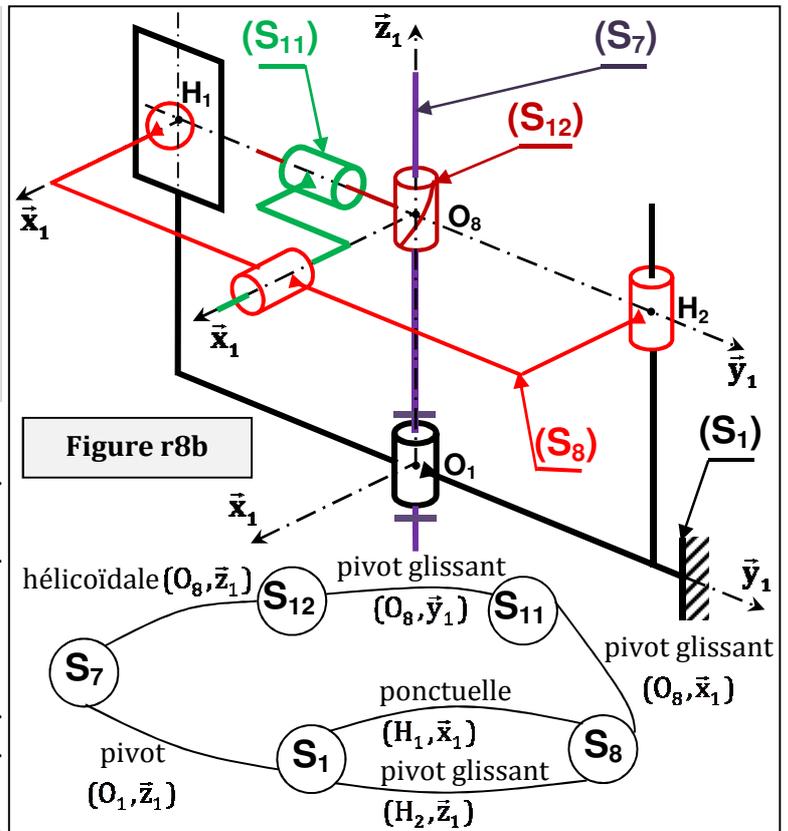
- a) Quelle est sans aucun calcul, la liaison équivalente $L_{\text{éq18}}$ aux deux liaisons en // entre **(S₁)** et **(S₈)**.
- b) Déterminer le degré d'hyperstatisme noté h_{18} de la liaison équivalente $L_{\text{éq18}}$.
- c) Déterminer le degré d'hyperstatisme noté h de tout le système. Conclure.



- a) $L_{\text{éq18}} =$
- b)
- c)

On envisage maintenant de modifier le mécanisme par l'utilisation d'un écrou flottant (**S₁₂**), cette solution (**figure r8b**) oblige l'ajout de 2 solides et 2 liaisons. De plus on a décidé de modifier la liaison en H_1 .

- d) Pourquoi a-t-on modifié la liaison en H_1 ?
- e) Evaluer à nouveau h pour tout le système. Conclure.
- f) Pourquoi le constructeur n'a-t-il pas choisi cette deuxième solution ?



- d)
- e)
- f)