PSI Calcul différentiel

Année scolaire 2016/2017

▶ Exercice 1 (CNC - Maths 1 - Session 2014 - PSI)

On considère la fonction de deux variables $F : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(1,1) = 0 \quad et \quad F(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{(1-xy)} \quad si \quad (x,y) \neq (1,1)$$

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $(1-x)(1-y) \leq (1-\sqrt{xy})^2$.
2. Montrer que F est continue sur $[0,1]^2$.
3. En déduire que F est bornée sur $[0,1]^2$ et atteint ses bornes.
4. Déterminer la borne inférieure de F sur $[0,1]^2$; en quels points de $[0,1]^2$ cette borne est-elle atteinte ?
5. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,1[^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
6. Montrer que F admet un unique point critique (x_0,y_0) dans l'ouvert $]0,1[^2$ et le préciser.
7. Calculer $F(x_0,y_0)$ et justifier que que $F(x_0,y_0) = sup\left\{F(x,y)\,\middle|\,(x,y) \in [0,1]^2\right\}$.

▶ Exercice 2 (CNC - Maths 1 - Session 2009 - PSI)

Soit φ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$; on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1. (a) Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de g en fonction de φ'.
   (c) Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction de φ' et φ''.
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$\left(1+t^2\right)x'' + 2tx' = t. \tag{1}$$
3. On veut déterminer les fonction φ pour lequelles g vérifie l'équation aux dérivées partielles
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3}. \tag{2}$$
   (a) Montrer que si g vérifie (2) alors φ vérifie l'équation différentielle (1).
   (b) En déduire l'expression de φ puis celle de g.
   (c) Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement des solutions de (2).

▶ Exercice 3 (CNC - Maths 1 - Session 2006-PSI)

1. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$; montrer que $\frac{\partial h}{\partial v} = 0$ si et seulement s'il existe une fonction h_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple (u,v) de $\mathbb{R}^2$, $h(u,v) = h_1(u)$.
2. Soit $\Phi : (u,v) \mapsto (ue^v, e^{-v})$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
   (b) Pour tout $(x,y) \in \Omega$, exprimer $\Phi^{-1}(x,y)$ et justifier que Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall (x,y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

   On pose $f^* = f \circ \Phi$.

   (a) Justifier que la fonction f^* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f^*}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f^*}{\partial v}$ de f^*.

   (b) En déduire la forme de la fonction f^* puis donner celle de f.

4. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall (x,y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ax + by,$$

   où a et b sont des réels.

   (a) Trouver une fonction g, linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = ax + by,$$

   (b) En déduire qu'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = F(xy) + ax - by.$$