I. Satellites de télécommunication (d'après Concours Mines-Ponts MP 2007)

I.1. Dans le référentiel géocentrique R_G considéré comme galiléen, le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre : $\overrightarrow{F_{T/S}} = -\dfrac{GM_TM_S}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_r}$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au satellite dans R_G s'écrit alors : $M_S\overrightarrow{a_S} = -\dfrac{GM_TM_S}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_r}$

Le satellite est en mouvement circulaire de rayon (R_T+ h) à la vitesse angulaire $\dot\theta$.

On a dans ce cas : $\overrightarrow{a_S} = -(R_T+h)\dot\theta^2\overrightarrow{u_r} + (R_T+h)\ddot\theta\overrightarrow{u_\theta}$ avec $v = (R_T+h)\dot\theta$.

La projection du P.F.D. sur $\overrightarrow{u_r}$ donne : $(R_T+h)\dot\theta^2 = \dfrac{v^2}{R_T+h} = \dfrac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ soit $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T+h}}}$.

La projection de P.F.D. sur $\overrightarrow{u_\theta}$ donne $\ddot\theta = 0$ soit $\dot\theta = cste$. La vitesse $v = (R_T+h)\dot\theta$ est donc constante. On peut alors écrire : $v = \dfrac{2\pi(R_T+h)}{T} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T+h}}$ soit $\boxed{\dfrac{T^2}{(R_T+h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}}$.

I.2. $E_C = \dfrac{1}{2}M_Sv^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{GM_TM_S}{(R_T+h)}$; $E_P = -\dfrac{GM_TM_S}{R_T+h}$. On a donc : $E_P = -2E_C$ soit $\boxed{E_P + 2E_C = 0}$.

I.3. $[\alpha] = \dfrac{[f_a]}{[M_S][v]^2} = \dfrac{N}{kg.m^2.s^{-2}} = \dfrac{kg.m.s^{-2}}{kg.m^2.s^{-2}} = m^{-1}$

En supposant que $E_P = -2E_C$, l'énergie mécanique s'écrit alors $E_m = E_p + E_c = \dfrac{E_p}{2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{GM_TM_S}{R_T+h}$

D'après le théorème de l'énergie mécanique : $\dfrac{dE_m}{dt} = P_{\text{forces non conservatives}} = P_{\vec{fa}} = \vec{f_a}.\vec{v} = -\alpha M_Sv^3$

Avec $\dfrac{dE_m}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{GM_TM_S}{(R_T+h)^2}\dfrac{dh}{dt}$

On en déduit donc l'équation différentielle vérifiée par h : $\boxed{\dfrac{dh}{\sqrt{R_T+h}} = -2\alpha\sqrt{G.M_T}dt}$

I.4. D'après l'équation précédente : $dh = -2\alpha\sqrt{G.M_T}\sqrt{R_T+h}dt$

Sur une période, en considérant que h varie peu ($h \approx h_0$ = 800km) : $\Delta h = -2\alpha\sqrt{G.M_T}\sqrt{R_T+h_0}\times T$

d'où $\alpha = \dfrac{\Delta h}{-2\sqrt{G.M_T}\sqrt{R_T+h_0}}\dfrac{1}{T}$ avec $T = 2\pi\dfrac{(R_T+h_0)^{\frac{3}{2}}}{(GM_T)^{\frac{1}{2}}}$

donc : $\boxed{\alpha = -\dfrac{\Delta h}{4\pi(R_T+h_0)^2}}$ avec Δh = -1m d'où : $\boxed{\alpha = 1{,}535\ 10^{-15}\ m^{-1}}$.

L'orbite initiale à l'altitude h_0 = 800km a une période $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{GM_T}(R_T+h)^3}$ = 6068 secondes.

En 10 ans il y a 86400x365x10 secondes. Il y a donc 51971 orbites.
Si on admet que la perte d'altitude est proportionnelle au temps, pour dix ans :
$\Delta h_{10\ ans} = \Delta h \times 51971 = 1m \times 51971$ $\boxed{\Delta h_{10\ ans} \approx 52\,km}$.

La solution exacte de l'équation différentielle est :

$$t = -\frac{1}{2\alpha\sqrt{GM_T}}\int_{R_T+h_0}^{R_T+h}\frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{GM_T}}\left(\sqrt{R_T+h_0}-\sqrt{R_T+h}\right)$$

$$\Delta h_{10\text{ ans}} = h_0 - h = h_0 - \left[-R_T + \left(\sqrt{R_T+h_0}-\alpha t\sqrt{GM_T}\right)^2\right] = h_0 + R_T - \left(\sqrt{R_T+h_0} - \frac{\Delta h}{2\sqrt{R_T+h_0}}\frac{t}{T}\right)^2$$

$$\Delta h_{10\text{ ans}} = \frac{\Delta h}{\sqrt{R_T+h_0}}\frac{t}{T} - \frac{\Delta h^2 t^2}{4\left(R_T+h_0\right)T^2} = \underline{51{,}92\,\text{km}}$$

Il est logique de trouver des résultats voisins, la variation relative de distance au centre de la Terre étant petite.

On peut trouver paradoxal que, malgré le freinage par l'air, la vitesse croît ; elle croît à cause de l'attraction terrestre, dont le travail, positif, l'emporte sur celui, négatif, de la force de freinage.

II. Dynamique de molécules diatomiques (ATS, 2003)

II.1. Point matériel fictif A

II.1.1. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié. Le référentiel héliocentrique est le meilleur référentiel galiléen identifiable expérimentalement.

II.1.2. Le principe des actions réciproques appliqué aux forces d'interaction s'exerçant entre A_1 et A_2 s'écrit : $\boxed{\vec{F_2} = -\vec{F_1}}$.

II.1.3. Par définition du barycentre G du système A_1 (m_1) et A_2 (m_2) : $\left(m_1+m_2\right)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}$

soit : $\boxed{\left(m_1+m_2\right)\vec{r_G} = m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}$

.

II.1.4. En dérivant l'expression précédente dans ***R***, on obtient : $\left(m_1+m_2\right)\overrightarrow{v_G} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{p_G} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}}$.

Théorème de la quantité de mouvement appliqué au système isolé (A_1+A_2) : $\left(\frac{d\overrightarrow{p_G}}{dt}\right)_R = \vec{0}$

On en déduit donc : $\overrightarrow{p_G} = \left(m_1+m_2\right)\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cst}$: G est animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans ***R***.

I1.5. Par définition du barycentre : $m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$
On a de plus : $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{A_2G} + \overrightarrow{GA_1}$

$\boxed{\overrightarrow{GA_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}}$ et $\boxed{\overrightarrow{GA_2} = \frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec{r}}$

II.1.6. P.F.D. appliqué à M_1 dans ***R*** galiléen : $m_1\left(\frac{d^2\overrightarrow{OA_1}}{dt^2}\right)_R = \vec{F_1}$ **(1)**

P.F.D. appliqué à M_2 dans ***R*** galiléen : $m_2\left(\frac{d^2\overrightarrow{OA_2}}{dt^2}\right)_R = \vec{F_2} = -\vec{F_1}$ **(2)**

$\frac{(1)}{m_1} - \frac{(2)}{m_2}$ donne : $\left(\frac{d^2\overrightarrow{A_2A_1}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{F_1} = \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\vec{F_1}$ soit $\boxed{\mu\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_R = \vec{F_1} = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{u_r}}$

II.1.7. Le moment cinétique du système dans $\boldsymbol{R_G}$ s'écrit :

$$\left(\left(\overrightarrow{L_G}\right)_{syst}\right)_{R_G} = \overrightarrow{GA_1} \wedge m_1\left(\frac{d\overrightarrow{GA_1}}{dt}\right)_{R_G} + \overrightarrow{GA_2} \wedge m_2\left(\frac{d\overrightarrow{GA_2}}{dt}\right)_{R_G}$$

$$= m_1\left(\frac{m_2}{m_2+m_1}\right)^2 \vec{r} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{R_G} + m_2\left(\frac{-m_1}{m_2+m_1}\right)^2 \vec{r} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{R_G} = \mu\vec{r} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{R_G} = \mu\overrightarrow{GA} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{GA}}{dt}\right)_{R_G}$$

On a donc bien : $\boxed{\left(\left(\overrightarrow{L_G}\right)_{syst}\right)_{R_G} = \left(\left(\overrightarrow{L_G}\right)_A\right)_{R_G}}$

II.1.8. On montre de la même façon que $\boxed{\left(\left(E_C\right)_{syst}\right)_{R_G} = \left(\left(E_C\right)_A\right)_{R_G}}$

II.2. Approximation de l'énergie potentielle d'interaction V(r)

II.2.1. Lorsque $r = r_e$, l'énergie potentielle d'interaction du système est minimale. Le point fictif A est donc en équilibre stable.

II.2.2. Le développement limité au second ordre de V(r) pour r proche de r_e s'écrit :

$$V(r) = V(r_0) + (r - r_e)\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=r_e} + \frac{(r-r_e)^2}{2}\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_e}$$

avec : $V(r_0) = -V_0$; $\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=r_e} = 0$ car V(r) extrémal en r_e ; $\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_e} = k > 0$ car V(r) minimum en r_e.

k s'exprime en $J.m^{-2}$ soit en $kg.s^{-2}$.

II.2.3. $\boxed{\vec{F_1} = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{u_r} = -k(r - r_e)\overrightarrow{u_r}}$.

II.3. Vibration et rotation de la molécule A_1A_2

II.3.1. Dans $\boldsymbol{R_G}$, le point fictif A est soumis à une force

- centrale (dirigée dans la direction GA avec G fixe dans $\boldsymbol{R_G}$) donc $\boxed{\overrightarrow{L_{G/R_G}}(A) = \vec{L} = \overrightarrow{cst}}$
- conservative (associée à l'énergie potentielle V(r)) donc $\boxed{E_m = cste}$

D'autre part : $\vec{L} = \mu\overrightarrow{GA} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{GA}}{dt}\right)_{R_G} = \mu\overrightarrow{GA} \wedge \left(\overrightarrow{v_A}\right)_{R_G}$.

Le vecteur vitesse de A est constamment orthogonal à la direction fixe définie par $\vec{L}$. Le mouvement de A dans $\boldsymbol{R_G}$ a donc lieu dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}$ passant par G.

II.3.2. $\vec{r} = r\overrightarrow{u_r}$ donc $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$; **III.3.3.** $\vec{L} = \mu\vec{r} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{R_G} = \mu r^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_Z}$

II.3.4. $E_m = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 - V_0 + \frac{1}{2}k(r - r_e)^2$

Or $L = \left\|\vec{L}\right\| = \mu r^2\dot{\theta}$, donc $\boxed{E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} - V_0 + \frac{1}{2}k(r - r_e)^2}$.

II.3.5. Si L = 0, alors $\vec{L} = \mu\overrightarrow{GA} \wedge \left(\overrightarrow{v_A}\right)_{R_G} = \vec{0} = \overrightarrow{cst}$.

$\overrightarrow{GA}$ et $\left(\overrightarrow{v_A}\right)_{R_G}$ sont donc constamment colinéaires. Le mouvement de A dans $\boldsymbol{R_G}$ est donc rectiligne.

L'énergie mécanique E_m de A est constante et L est nulle. La dérivée de l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps donne : $0 = \mu\dot{r}\ddot{r} + k\left(r - r_e\right)\dot{r}$ soit $\boxed{\ddot{r} + \frac{k}{\mu}r = \frac{k}{\mu}r_e}$.

C'est l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}}$.

Donc : $r(t) = r_e + B\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$. Soit $\boxed{\vec{r}(t) = \left(r_e + \left(C - r_e\right)\cos(\omega_0 t)\right)\overrightarrow{u_r}}$ en tenant compte des C.I.

II.3.6. $E_m = E_C + V(r) = \text{cste}$. Dans le cas d'un mouvement uniforme, l'énergie cinétique est constante. La dérivée de E_m par rapport au temps donne alors : $0 = k\left(r - r_e\right)\dot{r}$.

On a donc :

- $r = r_e$: dans ce cas, A est en équilibre, il n'y a pas de mouvement
- ou $\dot{r} = 0$, c'est-à-dire r = GA constant donc A en mouvement circulaire de centre G

P.F.D. appliqué à A dans $\boldsymbol{R_G}$: $\mu\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_R = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{u_r} = -k\left(r - r_e\right)\overrightarrow{u_r}$

Le mouvement étant circulaire et uniforme : $-\mu\Omega^2 R\overrightarrow{u_r} = -k\left(R - r_e\right)\overrightarrow{u_r}$, d'où : $\boxed{R = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}r_e}$

II.3.7.1. $\omega_0 = 3{,}16.10^{14}\ s^{-1}$ soit une longueur d'onde λ_0 = 6 µm : proche infrarouge

II.3.7.2. $L = \mu R^2\Omega \simeq \mu r_e^2\Omega$ donc $\Omega = 10^{13}\ s^{-1}$ soit λ = 188 µm : infrarouge lointain, micro-ondes.

III. Mécanique en référentiel non galiléen (CCP TSI 2007)

III.1. Première partie : la tige OA est dans le plan horizontal

III.1.1. Le référentiel lié à la tige étant en rotation dans le référentiel galiléen du laboratoire, il est non galiléen. Il faut donc prendre en compte des forces d'inertie dans le bilan des forces appliquées à l'anneau.

Bilan des forces :

- poids : $\vec{P} = -mg\overrightarrow{e_Z}$
- Le contact entre l'anneau et la tige étant sans frottement, la réaction est normale à la tige. Elle a donc des composantes selon $\overrightarrow{e_Z}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$: $\vec{R} = R_Z\overrightarrow{e_Z} + R_\theta\overrightarrow{e_\theta}$
- Force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\left(\overrightarrow{a_{MC}}\right)_{Rlabo}$ avec M_C point fixe de la tige coïncidant avec l'anneau à l'instant t. Ce point décrit dans le référentiel du laboratoire un cercle de rayon r à la vitesse angulaire constante ω. Son accélération s'écrit donc : $\left(\overrightarrow{a_{MC}}\right)_{Rlabo} = -r\omega^2\overrightarrow{e_r}$.

  D'où : $\overrightarrow{F_{ie}} = mr\omega^2\overrightarrow{e_r}$ dirigée vers + $\overrightarrow{e_r}$ (force centrifuge)
- Force d'inertie de Coriolis : $\overrightarrow{F_{iC}} = -2m\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rtige}$.

M décrit dans le référentiel de la tige un mouvement rectiligne dans la direction $\overrightarrow{e_r}$ donc : $\left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rtige} = \dot{r}\overrightarrow{e_r}$

D'où : $\overrightarrow{F_{iC}} = -2m\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rtige} = -2m\omega\overrightarrow{e_Z} \wedge \dot{r}\overrightarrow{e_r} = -2m\omega\dot{r}\overrightarrow{e_\theta}$

III.1.2. M décrit dans le référentiel de la tige un mouvement rectiligne selon $\overrightarrow{e_r}$ donc : $\left(\overrightarrow{a_M}\right)_{Rtige} = \ddot{r}\overrightarrow{e_r}$

Le PFD, appliqué dans le référentiel lié à la tige et projeté sur $\overrightarrow{e_r}$, donne : $m\ddot{r} = mr\omega^2$

On obtient donc l'équation différentielle : $\boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$

III.1.3. La solution de cette équation est de la forme : $r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ d'où $\dot{r}(t) = \omega\left(Ae^{\omega t} - Be^{-\omega t}\right)$

Les constantes d'intégration A et B sont obtenues à l'aide des conditions initiales :

$$\left.\begin{array}{l} r(0) = A + B = r_0 \\ \dot{r}(t) = \omega(A - B) = 0 \end{array}\right\} A = B = \frac{r_0}{2} \text{ d'où : } r(t) = \frac{r_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \text{ soit } \boxed{r(t) = r_0 ch(\omega t)}$$

III.1.4. L''anneau quitte la tige lorsque r = L soit $\boxed{\tau = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}\left(\frac{L}{r_0}\right)}$

III.1.5. Dans le référentiel lié à la tige, la vitesse de l'anneau à l'instant t vaut $\vec{v} = \dot{r}(t)\overrightarrow{e_r} = r_0\omega sh(\omega t)\overrightarrow{e_r}$

L'anneau quitte la tige à l'instant τ : $\overrightarrow{v_f} = r_0\omega sh(\omega\tau)\overrightarrow{e_r} = r_0\omega\sqrt{ch^2(\omega\tau) - 1}\overrightarrow{e_r} = r_0\omega\sqrt{\left(\frac{L}{r_0}\right)^2 - 1}\overrightarrow{e_r}$

Soit : $\boxed{\overrightarrow{v_f} = \omega\sqrt{L^2 - r_o{}^2}\overrightarrow{e_r}}$

III.1.6. D'après la loi de composition des vitesses : $\left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rlabo} = \left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rtige} + \overrightarrow{v_e} = \left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rtige} + \left(\overrightarrow{v_{MC}}\right)_{Rlabo}$

Le point coïncidant décrit dans le référentiel du laboratoire un mouvement circulaire uniforme de rayon r à la vitesse angulaire ω donc $\left(\overrightarrow{v_{MC}}\right)_{Rlabo} = r\omega\overrightarrow{e_\theta}$

D'où : $\overrightarrow{v'_f} = \overrightarrow{v_f} + L\omega\overrightarrow{e_\theta}$ soit $\boxed{\overrightarrow{v'_f} = \omega\sqrt{L^2 - r_o{}^2}\overrightarrow{e_r} + L\omega\overrightarrow{e_\theta}}$

III.2. Deuxième partie : la tige fait un angle α quelconque avec l'axe Δ

III.2.1. Bilan des forces appliquées sur l'anneau dans le référentiel de la tige :

- Poids : $\vec{P} = -mg\overrightarrow{e_Z}$
- Réaction perpendiculaire à $\overrightarrow{e_T}$
- Force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\left(\overrightarrow{a_{MC}}\right)_{Rlabo}$ avec M_C point fixe de la tige coïncidant avec l'anneau à l'instant t. Ce point décrit dans le référentiel du laboratoire un cercle de rayon rsinα à la vitesse angulaire constante ω. Son accélération s'écrit donc : $\left(\overrightarrow{a_{MC}}\right)_{Rlabo} = -r\sin\alpha\,\omega^2\overrightarrow{e_r}$.
- D'où : $\overrightarrow{F_{ie}} = mr\sin\alpha\,\omega^2\overrightarrow{e_r}$ dirigée vers + $\overrightarrow{e_r}$ (force centrifuge)

- Force d'inertie de Coriolis : $\overrightarrow{F_{iC}} = -2m\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rtige}$.

  M décrit dans le référentiel de la tige un mouvement rectiligne dans la direction $\overrightarrow{e_T}$ donc : $\left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rtige} = \dot{r}\overrightarrow{e_T}$

  D'où : $\overrightarrow{F_{iC}} = -2m\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{v_M}\right)_{Rtige} = -2m\omega\overrightarrow{e_Z} \wedge \dot{r}\overrightarrow{e_T} = -2m\omega\dot{r}\sin\alpha\overrightarrow{e_\theta}$

III.2.2. M décrit dans le référentiel de la tige un mouvement rectiligne selon $\overrightarrow{e_T}$ donc : $\left(\overrightarrow{a_M}\right)_{Rtige} = \ddot{r}\overrightarrow{e_T}$

Le PFD, appliqué dans le référentiel lié à la tige et projeté sur $\overrightarrow{e_T}$, donne : $m\ddot{r} = -mg\cos\alpha + mr\sin^2\alpha\omega^2$

On obtient donc l'équation différentielle : $\boxed{\ddot{r} - \sin^2\alpha\omega^2 r = -g\cos\alpha}$

III.2.3. Le second membre étant constant, la solution particulière de l'EASM est une constante : $r_1 = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$

La solution générale de l'ESSM est de la forme $r_2(t) = Ae^{\omega\sin\alpha t} + Be^{-\omega\sin\alpha t}$

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc : $r(t) = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + Ae^{\omega\sin\alpha t} + Be^{-\omega\sin\alpha t}$

D'où $\dot{r}(t) = \omega\sin\alpha\left(Ae^{\omega\sin\alpha t} - Be^{-\omega\sin\alpha t}\right)$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine les expressions de A et B :

$$\left.\begin{aligned} r(0) &= \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + A + B = r_0 \\ \dot{r}(0) &= \omega\sin\alpha(A - B) = 0 \end{aligned}\right\} \quad A = B = r_0 - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \text{ d'où } \boxed{r(t) = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \left(r_0 - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right)\mathrm{ch}(\omega\sin\alpha t)}$$

III.2.4. L'anneau est en équilibre sur la tige lorsque son accélération est nulle soit pour $\boxed{\ddot{r}(t) = 0}$

Or : $\ddot{r}(t) = -\left(r_0 - \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right)(\omega\sin\alpha)^2\,\mathrm{ch}(\omega\sin\alpha t)$.

L'équilibre est donc réalisé à l'instant t tel que $\mathrm{ch}(\omega\sin\alpha t) = 0$ d'où $\boxed{r_{eq} = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}}$

Il ne peut exister une position d'équilibre sur l'anneau que si $r_{éq} < L$ soit $\boxed{\omega > \sqrt{\dfrac{g\cos\alpha}{L\sin^2\alpha}} = \omega_0}$

III.2.5. Les deux forces qui interviennent dans l'équation du mouvement de l'anneau sur la tige sont le poids et la force d'inertie d'entraînement.

La projection du poids sur $\overrightarrow{e_T}$ est constante : $\vec{P}.\overrightarrow{e_T} = -mg\cos\alpha$

Par contre celle de $\overrightarrow{F_{ie}}$ ne l'est pas : $\overrightarrow{F_{ie}}.\overrightarrow{e_T} = +mr(t)\sin^2\alpha\omega^2$

A l'équilibre ces deux composantes se compensent.

Si on écarte légèrement l'anneau de sa position d'équilibre :

- si $r > r_{éq}$ $\overrightarrow{F_{ie}}.\overrightarrow{e_T}$ augmente, l'anneau s'éloigne de l'équilibre
- si $r < réq$ $\overrightarrow{F_{ie}}.\overrightarrow{e_T}$ diminue, l'anneau s'éloigne de l'équilibre

<u>L'équilibre est donc instable</u>