Devoir surveillé $N^{\circ}5$
Durée $3\ h$

- **La qualité de la rédaction et de présentation , la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies**.

Sujet I

Soit α un réel on pose $f_{\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha}}$

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^{\alpha}}$
2. On note D_{α} domaine de définition de f_{α}
   (a) Montrer que $]-1,1[\subset D_{\alpha} \subset [-1,1]$
   (b) Déterminer D_{α} selon les valeurs de α
   (c) Pour quoi f_{α} est de classe C^{∞} sur $]-1,1[$ donner l'expression de $f_{\alpha}^{(p)}$ pour tout p$\in \mathbb{N}$ sous forme d'une série entière
3. Calculer $f_0(x), f_1(x), f_{-1}(x), f_{-2}(x)$ pour tout x$\in]-1,1[$
4. Monter que$\forall x \in]-1,1[\ \ x f'_{\alpha+1}(x) = f_{\alpha}(x)$
5. .Etude à gauche en 1
   (a) Pour quelles valeurs de α f_{α} est continue à gauche en 1?
   (b) Si $1\notin D_{\alpha}$ montrer que $\lim_{x\to 1^-} f_{\alpha}(x) = +\infty$
   (c) Pour quelles valeurs de α f_{α} est dérivable à gauche en 1?
6. ..Etude à droite en -1
   (a) Pour quelles valeurs de α f_{α} est continue à droite en -1?
   (b) Pour quelles valeurs de α f_{α} est dérivable à droite en -1?

Solution

1. pose $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \to 1$ selon la régle de d'alembert R=1
2. .
   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^{\alpha}}$ conerge absolument selon la définition de R $si\ |x| < 1$ et diverge grossièrement $si\ |x| > 1$ aivsi $]-1,1[\subset D_{\alpha} \subset [-1,1]$

(b) Si $\alpha > 1$ Les série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CVA donc $D_\alpha = [-1,1]$

Si $\alpha < 0$ Les série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $DV\ G$ donc $D_\alpha =]-1,1[$

Si$0 < \alpha \leq 1$ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ DV et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ Cv (CSSA) donc $D_\alpha = [-1,1[$

(c) f_α est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1donc elle est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ de plus $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[$ $f_\alpha^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} \frac{x^{n-p}}{n^\alpha} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} \frac{x^n}{n^{\alpha+p}}$

3. $f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$

$f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

$f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$

$f_{-2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) + nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$

$f_{-2}(x) = x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)'' + x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

4. $\forall x \in]-1,1[$ $xf'_{\alpha+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{n^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = f_\alpha(x)$

5. Etude à gauche en 1

(a) Si $\alpha \leq 1$ f_α n'est pas définie en 1

Si $\alpha > 1$ f_α est définie en 1 on a et $f_\alpha(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

$\forall x \in]0,1[$ $\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ donc la série CVN donc CVU sur $]0,1[$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ d'aprés le théorème de double limite $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = f_\alpha(1)$

$\boxed{f_\alpha \text{ est continue à gauche en } 1 \Longleftrightarrow \alpha > 1}$

(b) $1 \notin D_\alpha$ donc $\alpha \leq 1$ .On a f_α est croissante sur d'aprés le théorème de la limite monotone elle admet une limite ℓ finie ou $+\infty$

Si ℓ finie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{n} \frac{x^k}{k^\alpha} \leq f_\alpha(x)$

On fait tendre x vers 1^- on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \ell < +\infty$

Ainsi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV absurde d'où $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$

(c) D'abord on doit avoir f_α est continue à gauche en 1 donc $\alpha > 1$
On a $\forall x \in]-1,1[\quad xf'_\alpha(x) = f_{\alpha-1}(x)$
f_α est dérivable en $1^- \Leftrightarrow f_{\alpha-1}$ est continue à gauche en $1 \Longleftrightarrow \alpha > 2$
$\boxed{f_\alpha \text{ est dérivable en } 1^- \Longleftrightarrow \alpha > 2}$

6. Etude à droite en -1

(a) Si $\alpha \leq 0 \quad f_\alpha$ n'est pas définie en -1
Si $\alpha > 0$ f_α est définie en -1 on a et $f_\alpha(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$
$\forall x \in]-,1,0[\quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(-x)^n}{n^\alpha}$ est une série qui nérifie le critère spécial donc CV et
$\forall x \in]-,1,0[\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(-x)^k}{k^\alpha} \right| \leq \left| \frac{x^n+1}{(n+)^\alpha} \right| \leq \frac{1}{(n+)^\alpha}$
$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(-x)^n}{n^\alpha}$ est CVU sur $]-,1,0[$
$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^n}{n^\alpha} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ d'aprés le théorème de double limite $\lim_{x\to -1^+} f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = f_\alpha(-1)$
$\boxed{f_\alpha \text{ est continue à gauche en } 1 \Longleftrightarrow \alpha > 0}$

(b) D'abord on doit avoir f_α est continue à droite en -1 donc $\alpha > 0$
On a $\forall x \in]-1,1[\quad xf'_\alpha(x) = f_{\alpha-1}(x)$
f_α est dérivable en $(-1)^+ \Leftrightarrow f_{\alpha-1}$ est continue en $-1 \Longleftrightarrow \alpha - 1 > 0$
$\boxed{f_\alpha \text{ est dérivable en } (-1)^+ \Longleftrightarrow \alpha > 1}$

Sujet II

PartieI

On se propose de déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$
a valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de $(\mathcal{E}) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$

1. Montrer que l'application $\Phi : U \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(u; v) \to (u, uv)$ est C^2sur U
   Soit f fonction de classe C^2 sur U solution de $(\mathcal{E})$, on pose $g = fo\Phi$
2. Justifier que g est de classe C^2 sur U
3. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonctions de celles de g
4. Déduire que: $\forall (u, v) \in U \quad \frac{\partial^2 g}{\partial^2 u}(u, v) = 0$
5. Endéduire les solutions de $(\mathcal{E})$

Solution

1. $(u; v) \to (u, uv)$ est C^2 ses composantes sont polynômiales
2. $g = fo\Phi$ est C^2 comme composée de deux fonctions C^2

3. $g(u,v) = fo\Phi((u,v)) = f(x,y)$ avec $x = u$ et $y = uv$

On utilise la régle de la chaine

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

$$-\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)}$$

4. Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R},)$ solution de $(\mathcal{E})$ $\quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

On a $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - 2y\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) + \dfrac{2y}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}(x,y)$

$2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-2y}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) + 2y\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) - 2\dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$

$y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$

$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = u^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0$

Ainsi $\forall (u,v) \in U \quad \frac{\partial^2 g}{\partial^2 u}(u,v) = 0$

5. Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R},)$ solution de $(\mathcal{E})$ $\quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

D'prés ce qui précèdeen posant $g(u,v) = f(x,y)$ avec $x = u$ et $y = uv$

$\forall (u,v) \in U \quad \frac{\partial^2 g}{\partial^2 u}(u,v) = 0$ donc $\forall (u,v) \in U \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \varphi(v)$ où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R},)$ ainsi$\forall (u,v) \in U \quad g(u,v) = u\int \varphi(v)\,dv + \psi(v)$ où $\psi \in C^1(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R},)$ainsi$\forall (u,v) \in U \quad g(u,v) = u\phi(v) + \psi(v)$ *où* $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R},)$ et $\psi \in C^2(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R},)$

Donc $f(x,y) = x\phi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ *où* φ et $\psi \in C^2(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R},)$

On vérifie facilement que toute fonction de ce type est solution de $(\mathcal{E})$

$$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{E}) \textit{ sont} \text{ de type } f(x,y) = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) \textit{ où } \varphi \text{ et } \psi \in C^2(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R},)}$$

PartieII

U étant un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$

- On appelle laplacien de $f \in C^2(U, \mathbb{C})$ la fonction notée $\Delta(f)$ définie sur U par

$$\forall (x,y) \in U \quad \Delta(f)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

- $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ est dite harmonique sur U si son laplacien est nul sur U

$$\forall (x,y) \in U \quad \Delta(f)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

1. Déterminer les foctions u$\in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telles que la fonction $h(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 0\}$ soit harmonique
2. Déterminer les fonctions $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que la fonction $k(x,y) = u\left(\frac{y}{x}\right)$ définie sur $B = \mathbb{R}^2 - \{(0,y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$ soit harmonique
3. Soit $r > 0$.On note $D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq r^2\}, C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 = r^2\}$
   Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ harmonique ,pour $p \in \mathbb{N}^*$ on considère
   f_p:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,$(x,y) \to f(x,y) + \dfrac{x^2+y^2}{p}$
   (a) Justifier l'existence de $(a_p, b_p) \in D_r \ / \ f_p(a_p,b_p) = \sup\limits_{(x,y)\in D_r} f_p(x,y)$
   (b) Démontrer que si $(a_p, b_p) \in \overset{o}{D_r} \quad \dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p,b_p) \leq 0$ et $\dfrac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p,b_p) \leq 0$
   (c) Déduire en calculant le laplacien de f_p que $(a_p,b_p) \in C_r$
   (d) Montrer qu 'il existe $(a,b) \in C_r \quad f(a,b) = \sup\limits_{(x,y)\in D_r} f(x,y)$
   (e) Déduire que deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ harmoniques qui coincident sur C_r coincident sur D_r

Solution

1. Soit u$\in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telle que la fonction $h(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ définie sur Ω est harmonique

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}u"\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}u"\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in U \quad \Delta(f)(x,y) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) \\ &= u"\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}u'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

$\forall (x,y) \in U \ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad avec\ r > 0et\ \theta \in]-\pi,\pi[,r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\forall r > 0\ u^{"}(r) - \frac{1}{r}u'(r) = 0\ donc\ \forall r > 0\ u(r) = \alpha \ln r + \beta \qquad \alpha\ \beta$ réels

On vérifie facilement que toute fonction u de ce type $(x,y) \to u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ $u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ est de classe $C^2 sur\ \Omega$ est harmonique

Les fonctions u $\in C^2(\mathbb{R}^{*+},\mathbb{R})$ telles que $(x,y) \to u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ est de classe $C^2 sur\ \Omega$ et harmonique sont $u(r) = \alpha \ln r + \beta \qquad \alpha\ \beta$ réels

2. Soit $v \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telles que la fonction $k(x,y) = v\left(\frac{y}{x}\right)$ définie sur B soit harmonique

$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}v'\left(\frac{y}{x}\right), \frac{\partial^2 k}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{2y}{x^3}v\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}v"\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}v'\left(\frac{y}{x}\right), \frac{\partial^2 k}{\partial^2 y}(x,y) = \frac{1}{x^2}v"\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\forall (x,y) \in B \ \ \Delta(f)(x,y) = \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}(x,y)$$
$$= -\frac{2y}{x^3}v\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}v"\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}v"\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists (x,y) \in B\ t = \frac{y}{x}$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}\ \ u^{"}(t) - \frac{2t}{1+t^2}v'(t) = 0\ donc\ \forall t \in \mathbb{R}\ \ v(t) = \alpha \arctan t + \beta$

$\alpha\ \beta$ réels

On vérifie facilement que toute fonction v de ce type la fonction

$(x,y) \to v\left(\frac{y}{x}\right)$ est de classe $C^2 sur\ B$ est harmonique

Les fonctions v $\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $(x,y) \to v\left(\frac{y}{x}\right)$ est de classe $C^2 sur\ B$ et harmonique sont $v(t) = \alpha \arctan t + \beta$, $\alpha\ \beta$ réels

3. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ harmonique ,pour $p \in \mathbb{N}^*$ on considère

f_p:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,$(x,y) \to f(x,y) + \frac{x^2+y^2}{p}$

f_p est continue sur le copmact D_r fermé et borné en dimension finie ainsi f_p est bornée etatteint ses bornes d'où $\exists (a_p,b_p) \in D_r\ /\ f_p(a_p,b_p) = \sup\limits_{(x,y)\in D_r} f_p(x,y)$

4. On suppose que $(a_p,b_p) \in \overset{o}{D_r}$ donc (a_p,b_p) est point critique

Ainsi $\frac{\partial f_p}{\partial x}_p(a,b) = \frac{\partial f_p}{\partial x}_p(a,b) = 0$

.On applique la fourmule de taylor à l'ordre 2 à la fonction

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$x, \to f_p(x,b)$.φ admet un maximum relatif en a

$\varphi(a_p+h) - \varphi(a) = \frac{1}{2}\varphi"(a) + o(h^2) \leq 0$ ainsi $\varphi"(a) \leq 0$

On a $\varphi"(a) = \frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(x,y) \leq 0$

De même on considérant $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$y, \to f_p(a,y)$ on obtient $\frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(x,y) \leq 0$

5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Delta(f_p)(x,y) = \dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(x,y) = \Delta(f)(x,y) + \dfrac{2}{p} = \dfrac{2}{p}$ car f est harmonique

   si $(a_p, b_p) \in \overset{o}{D}_r$ selon 4 $\Delta(f_p)(x,y) = \dfrac{2}{p} \leq 0$ absurde

   Ainsi $(a_p, b_p) \in C_r$

6. C_r est compact (*fermé et borné en dimension finie*) $(a_p, b_p) \in C_r^{\mathbb{N}^*}$

   donc on peut en extraire une suite $\left(a_{\psi(p)}, b_{\psi(p)}\right)$ qui converge vers $(a,b) \in C_r$

   $f_{\psi(p)}\left(a_{\psi(p)}, b_{\psi(p)}\right) = f\left(a_{\psi(p)}, b_{\psi(p)}\right) + \dfrac{a_{\psi(p)}^2 + b_{\psi(p)}^2}{p} = f\left(a_{\psi(p)}, b_{\psi(p)}\right) + \dfrac{r^2}{\psi(p)}$

   $\underset{p\to+\infty}{lim} f_{\psi(p)}\left(a_{\psi(p)}, b_{\psi(p)}\right) = \underset{p\to+\infty}{lim}\left(f\left(a_{\psi(p)}, b_{\psi(p)}\right) + \dfrac{r^2}{\psi(p)}\right) = f(a,b)$ car f est continue

   On a $f_{\psi(p)}\left(a_{\psi(p)}, b_{\psi(p)}\right) = \underset{(x,y)\in D_r}{\sup} f_{\psi(p)}(x,y)$ ainsi $f(a,b) = \underset{p\to+\infty}{lim} f_{\psi(p)}\left(a_{\psi(p)}, b_{\psi(p)}\right) = \underset{p\to+\infty}{lim} \underset{(x,y)\in D_r}{\sup} f_{\psi(p)}(x,y)$
   $\underset{(x,y)\in D_r}{\sup} f(x,y)$

   Car $\underset{p\to+\infty}{lim} f_p(x,y) = f(x,y)$

7. Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ harmoniques qui coincident sur C_r coincident sur D_r

   On a $h = f - g$ harmonique nulle sur C_r

   $(x,y) \in D_r \quad h(x,y) \leq \underset{(x,y)\in D_r}{\sup} h(x,y) = h(a,b) = 0 /\ (a,b) \in C_r$

   de nême $(x,y) \in D_r \quad -h(x,y) \leq \underset{(x,y)\in D_r}{\sup} -h(x,y) = -h(c,d) = 0 /\ (c,d) \in C_r$

   Ainsi $h = f - g = .0$ d'où f et g coincident sur D_r

Sujet III

PartieI

1. (1)Enoncer le théorème de convergence dominée (2)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(nx)}{1+x^{2n}} dx.$

2. (1)Enoncer le théorème d'intégration des séries de fonctions.

   (2)Montrer que la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n (\ln x)^2$ est intégrable sur $]0,1]$et calculer son intégral $u_n = \int_0^1 x^n (\ln x)^2\, dx$

   (3)Déduire une expression de $\int_0^1 \dfrac{(\ln x)^2}{x+1} dx$ sous forme d'une série

3. .(1)Enoncer le théorème de Leibniz.

   (2)Monter que la fonction $F : x \to \int_0^\pi \ln(1 + x^2 \cos^2 t)\, dt$ est de classe C^1
   sur $\mathbb{R}$

   (3)Calculer $F\prime(x)$ puis déduire $F(x)$ pour tout x réel

Solution

1. (1)Enoncer le théorème de convergence dominée voir cours

   (2)On pose $f_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{1+x^{2n}}$

   On a f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+ \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(nx)}{1+x^{2n}} = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si x=0} \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si x} \in]0,1[\\ \dfrac{\pi}{4} \text{ si x=1} \\ 0 \text{ si x}]1,+\infty[\end{cases}$$

   $$\forall x \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \left|\frac{\arctan(nx)}{1+x^{2n}}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^2} = \varphi(x)$$

   On a $\begin{cases} f_n \text{est continue sur } \mathbb{R}^+ \\ (f_n) \text{ CVS sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers f qui est contine par morceaux sur } \mathbb{R}^+ \\ \varphi\ {}_n\text{est continue intégrable sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$

   D'aprés le théorème de convergence dominée $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(nx)}{1+x^{2n}}dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx = \dfrac{\pi}{2}[\arctan x]_0^1 = \dfrac{\pi}{8}$

2. (1)Enoncer le théorème d'intégration des séries de fonctions. voir cours

   (2) f_n est continue sur $]0,1]$et $x^n(\ln x)^2 \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

   Ainsi f_n est intégrable sur $]0,1]$,On intégre par parties

   $u_n = \int_0^1 x^n(\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^2\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)\,dx$

   $\int_0^1 x^n(\ln x)\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\right]_0^1$

   Ainsi $u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^2\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{2}{(n+1)^3}$

   (3) $\forall x \in]0,1[\ \dfrac{(\ln x)^2}{x+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n(\ln x)^2$ (DSE)

   On pose $g_n = (-1)^n f_n$

   On a g_n est continue, intégrable sur $]0,1]$, $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ CVS sur $]0,1]$ vers g avec $g(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x+1}$ continue sur $]0,1]$, $\sum\limits_{n\geq 0}\int_0^1 \left|(-1)^n x^n(\ln x)^2\right| dx$ Cv d'aprés e théorème d'intégration des séries de fonctions

   $$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{x+1}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n(\ln x)^2 dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$$

PartieII

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{(1+t^2)}dt.$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^+$
2. Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$

3. Déterminer $\underset{x\to+\infty}{lim} F(x)$.

4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et démontrer que $F\prime(x) = -\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.\right)$

5. Montrer que $F\prime$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ calculer $\int_0^{+\infty} F\prime(x)\,dx$

6. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Solution

1. On considère $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x,t) \to \dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}$

   f est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$

   $\forall x < 0 \quad \dfrac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}\right)$

   ,t$\to \dfrac{1}{t}$ est non intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $t \to \dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}$ aussi

   $\forall x \geq 0 \quad \left|\dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

   ,t$\to \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $t \to \dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}$ aussi

   F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$

2. f est continue sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ et $\forall\,(x,t)\in(\mathbb{R}^+)^2 \quad \left|\dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

   ,t$\to \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc F est continxue sur $[0,+\infty[$

3. $\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \underset{x\to+\infty}{lim} f(x,,t)$=0 et $\forall\,(x,t)\in(\mathbb{R}^+)^2 \quad \left|\dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$,

   t$\to \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. D'aprés le théorème de convergence dominée $\underset{x\to+\infty}{lim} F(x) = 0$

4. $f : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x,t) \to \dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$

   $\forall\,(x,t)\in(\mathbb{R}^+)^2 \quad \left|\dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

   ,t$\to \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $t \to \dfrac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}$ aussi

   On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-x\left(1+t^2\right)}$ $\forall a > 0, \forall x \geq a, \forall t \in \mathbb{R}^+ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{at^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)$ donc t$\to e^{at^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

D'aprés le théorème de leibniz F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et démontrer que $\forall x > 0 \quad F\prime(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-x\left(1+t^2\right)} dt == -e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ on pose $u = t\sqrt{x}$

$\forall x > 0 \quad F\prime(x) = -\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

Ainsi $C^2 = \dfrac{\pi}{2}$

5. On pose C=$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ donc $\forall x > 0 \quad F\prime(x) = \dfrac{Ce^{-x}}{\sqrt{x}}$

   $F\prime(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$,t$\rightarrow \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc F' aussi

   $F\prime(x) \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$,t$\rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$donc F' aussi

   Ainsi F'est intégrable sur $]0,+\infty[$

6. $\int_0^{+\infty} F\prime d\,(x)\,x = -\int_0^{+\infty} \dfrac{Ce^{-x}}{\sqrt{x}}$ on pose $v = \sqrt{x}$ donc $\int_0^{+\infty} F\prime d\,(x)\,x = -2C \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = -2C^2$

7. $\int_0^{+\infty} F\prime d\,(x)\,x = -2C^2 = [F\,(x)]_0^{+\infty} = \underset{x\rightarrow+\infty}{lim} F(x) - F(0) = 0 - \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2} dt = -\dfrac{\pi}{2}$

   Ainsi $C^2 = \dfrac{\pi}{4}$ or C>0 *donc* C=$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$