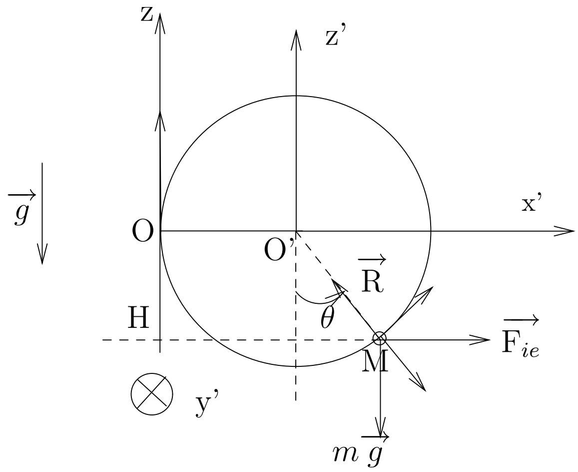
Correction du devoir surveillé n°1

Problème n°1

A.1.1/0,5 Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la perle dans le référentiel non galiléen lié au cercle s'écrit :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{F}}_{ie} + \overrightarrow{\mathrm{F}}_{i\mathrm{C}} + \overrightarrow{\mathrm{R}} + m\overrightarrow{g}$$

Même si ce n'est pas demandé, il faut faire un dessin et y représenter les forces :



En fait, la réaction comporte aussi une composante perpendiculaire au plan qui annule la force de Coriolis.

A.1.2/1,5 Pour un référentiel en rotation uniforme,

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}$$

où H est le projeté orthogonal sur l'axe de rotation. $\overrightarrow{\mathrm{HM}} = a(1+\sin\theta)\overrightarrow{e_{x'}}$

d'où $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}}_{ie} = m\omega^2 a(1+\sin\theta)\overrightarrow{e_{x'}}}$$

A.1.3/1

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{i\mathrm{C}} = -2m\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v}$$

Or $\overrightarrow{\omega}$ et $\overrightarrow{v}$ appartiennent au plan $\mathrm{O}, \overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{z'}}$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}}_{i\mathrm{C}} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{e_{y'}}}$$

et $$\boxed{\|\mathrm{F}_{i\mathrm{C}}\| = 2m\omega\cos\theta v}$$

A.1.4/1 La réaction et nulle selon $\overrightarrow{e_\theta}$; en projetant, après un dessin (!), on obtient :

$$ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta$$

de la forme

$$\boxed{a\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = f(\theta) = -g\sin\theta + \omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

A.2.1/0,5 Par définition, $\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{O'}}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{O'M}}\wedge m\overrightarrow{v}$. Comme les deux vecteurs sont dans le plan de la feuille, le moment cinétique y est perpendiculaire et donc selon $\overrightarrow{e_{y'}}$. Sa norme est :

$$\boxed{\mathrm{L}_{\mathrm{O'}}(\mathrm{M}) = ma^2\dot{\theta}}$$

A.2.2/1 Soit O' un point fixe de R′ référentiel non galiléen et M un point matériel de vitesse $\overrightarrow{v'}$ dans R'.

$$\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{O'}} = \overrightarrow{\mathrm{O'M}} \wedge m\overrightarrow{v'}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{O'}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{O'M}} \wedge m\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{\mathrm{O'M}} \wedge (\overrightarrow{\mathrm{F}} + \overrightarrow{\mathrm{F}_e} + \overrightarrow{\mathrm{F}_c})$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit de la même manière en rajoutant les moments des pseudo forces.

A.2.3/1,5 Le moment de la réaction est nul. Il reste à calculer :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_{\mathrm{O'}}(m\overrightarrow{g}) = mga\sin\theta\overrightarrow{e_{y'}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathscr{M}}_{\mathrm{O'}}(\overrightarrow{\mathrm{F}_{ie}}) = -m\omega^2a^2(1+\sin\theta)\cos\theta\overrightarrow{e_{y'}}$$

Or,

$$\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{O'}}(\mathrm{M}) = -ma^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_{y'}}$$

d'où

$$\boxed{a\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = f(\theta) = -g\sin\theta + \omega^2a(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

A.3.1/1,5 Il faut calculer le travail élémentaire :

$$\delta\mathrm{W} = \overrightarrow{\mathrm{F}_{ie}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = dx'\overrightarrow{e_{x'}}$$

$$\delta\mathrm{W} = m\omega^2(x'+a)\mathrm{d}x' = -\mathrm{d} - (\frac{1}{2}m\omega^2(x'+a)^2)$$

soit

$$\boxed{\mathrm{U}_1(x') = -\frac{1}{2}m\omega^2(x'+a)^2 + \mathrm{C^{te}}}$$

Or,

$$x' = a\sin\theta$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{U}_1(\theta) = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2\left((1+\sin\theta)^2 - 1\right)}$$

A.3.2/1 Il faut calculer le travail élémentaire :

$$\delta\mathrm{W} = m\overrightarrow{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = dz'\overrightarrow{e_{z'}}$$

$$\delta\mathrm{W} = -\mathrm{d}(mgz')$$

soit

$$\boxed{\mathrm{U}_1(z') = mgz' + \mathrm{C^{te}}}$$

Or,

$$z' = -a\cos\theta$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{U}_2(\theta) = -mga(\cos\theta - 1)}$$

A.3.3/0,5 $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}}_c$ sont perpendiculaires au mouvement donc ne travaillent pas. Leur énergie potentielle associée est donc constante (choisie nulle ici).

A.3.4/1 Toutes les forces non conservatives ne travaillent pas : l'énergie mécanique se conserve donc et

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{E}_c + \mathrm{E}_p = \mathrm{C}^{\text{te}} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \mathrm{U}_1(\theta) + \mathrm{U}_2(\theta)}$$

En dérivant cette relation par rapport à t, il vient :

$$ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - ma^2\omega^2\dot{\theta}\cos\theta(1+\sin\theta) + mga\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

En simplifiant par $ma\dot{\theta}$, on retrouve la relation

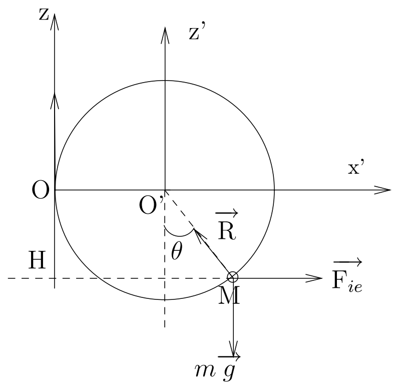
$$\boxed{a\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta + \omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

B.1/0,5 A l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$ et donc $f(\theta) = 0$.

soit $$\boxed{a\omega^2(1+\sin\theta) = g\tan\theta}$$

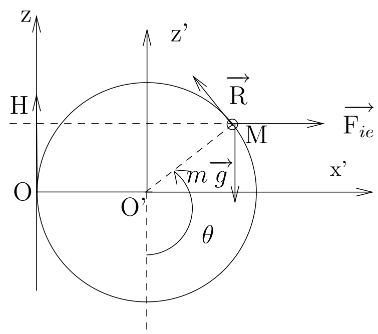
B.2/1,5 Il faut faire un dessin ! On y voit clairement que les situtations $\theta \in [\pi/2;\pi]$ et $\theta \in [3\pi/2;2\pi]$ ne peuvent correspondre à des positions d'équilibre puisque la réaction est nécessairement perpendiculaire au cercle.

$\theta \in [0;\pi/2]$



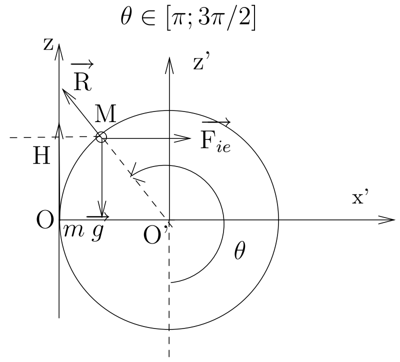
Equilibre possible

$\theta \in [\pi/2;\pi]$



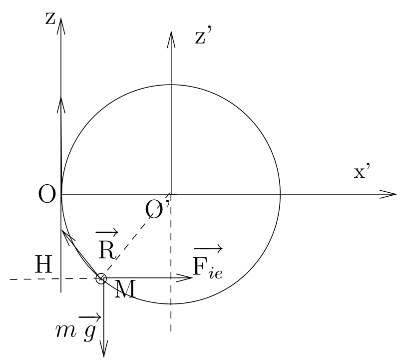
Equilibre impossible

$\theta \in [\pi;3\pi/2]$



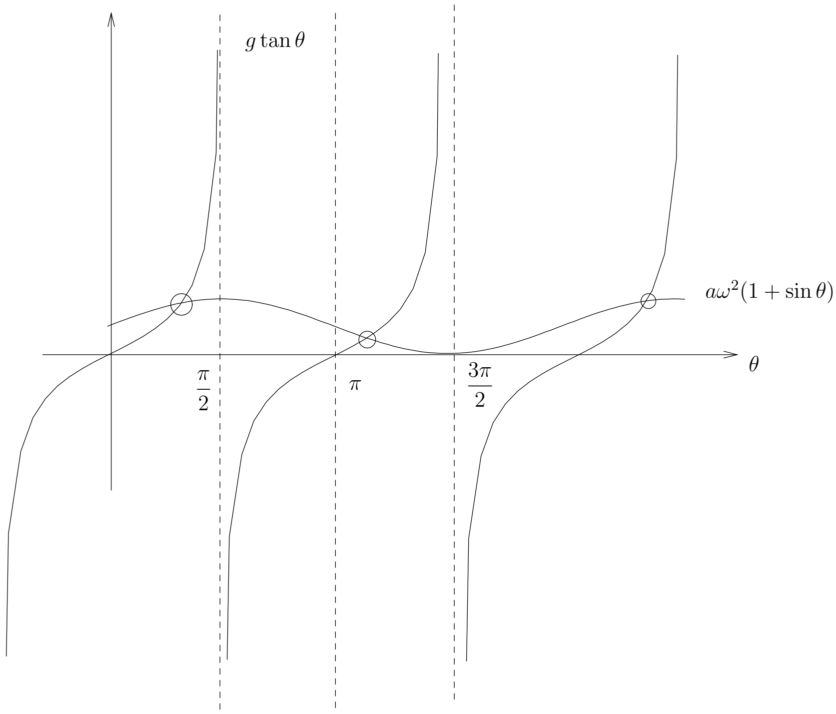
Equilibre possible

$\theta \in [3\pi/2;2\pi]$



Equilibre impossible

B.3/2 Il faut encore faire un dessin. On représente les fonctions $a\omega^2(1+\sin\theta =$ et $g\tan\theta$. Les points d'intersection sont effectivement dans les intervalles $[0;\pi/2]$ et $[\pi;3\pi/2]$.



B.4/3

— a)

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g\tan\theta_0}{a(1+\sin\theta_0)}} = 4,4 \text{ rad.s}^{-1}}$$

— b) Il suffit d'effectuer un developpement limité :

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

Il vient alors :

$$\boxed{a\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) = 0}$$

— c)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = a\omega^2(-\sin\theta + \cos 2\theta) - g\cos\theta$$

d'où
$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = -8,6 \text{ m.s}^{-2}}$$

L'équation est donc de la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \theta_0) = 0$$

c'est-à-dire que l'équilibre est stable. On pouvait s'y attendre puisque $\theta_0 \in [0; \pi/2]$.

Problème n°2

A.1/1,5 Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la terre s'écrit dans $\mathrm{R_K}$ galiléen :

$$\mathrm{M_T}\,\overrightarrow{a} = -\frac{\mathrm{GM_TM_S}}{\mathrm{R}^3}\overrightarrow{\mathrm{ST}} = -\mathrm{M_T}\omega^2\overrightarrow{\mathrm{ST}}$$

d'où $$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{\mathrm{GM_S}}{\mathrm{R}^3}}\quad \text{et}\quad \mathrm{T_A}=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{GM_S}}}}$$

A.2/1

$$\boxed{\mathrm{M_S}=\frac{\mathrm{R}^3\times 4\pi^2}{\mathrm{GT_A^2}}=2,0.10^{30}\ \mathrm{kg}}$$

B.1/1,5 (R') est en rotation uniforme par rapport à ($\mathrm{R_K}$) galiléen donc (R') est non galiléen. A l'équilibre :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{T}\to p}+\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{S}\to\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{F}}_e=\overrightarrow{0}$$

A l'équilibre la force de Coriolis est nulle puisque $\overrightarrow{v}'=\overrightarrow{0}$.

La force d'entraînement est $\overrightarrow{\mathrm{F}}_e=m\omega^2(\mathrm{R}-d)\overrightarrow{e_x}$.

$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{T}\to p}$ est la force gravitationnelle exercée par T sur P :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{T}\to p}=\frac{\mathrm{G}m\mathrm{M_T}}{d^2}\overrightarrow{e_x}$$

$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{S}\to p}$ est la force gravitationnelle exercée par S sur P :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{S}\to p}=-\frac{\mathrm{G}m\mathrm{M_S}}{(\mathrm{R}-d)^2}\overrightarrow{e_x}$$

B.2/1 A l'équilibre :

$$m\omega^2(\mathrm{R}-d)+\frac{\mathrm{G}m\mathrm{M_T}}{d^2}-\frac{\mathrm{G}m\mathrm{M_S}}{(\mathrm{R}-d)^2}=0$$

Or, $$\omega^2=\frac{\mathrm{GM_S}}{\mathrm{R}^3}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{M_S}\frac{\mathrm{R}-d}{\mathrm{R}^3}+\frac{\mathrm{M_T}}{d^2}-\frac{\mathrm{M_S}}{(\mathrm{R}-d)^2}=0}$$

B.3/2,5 $\varepsilon=\dfrac{d}{\mathrm{R}}\ll 1$

$$\frac{\mathrm{M_S}}{\mathrm{R}^2}(1-\varepsilon)+\frac{\mathrm{M_T}}{d^2}-\frac{\mathrm{M_S}}{\mathrm{R}^2}\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}=0$$

On fait un DL à l'ordre 1 :

$$\frac{\mathrm{M_S}}{\mathrm{R}^2}(1-\varepsilon-(1+2\varepsilon))+\frac{\mathrm{M_T}}{d^2}=0$$

soit $$3\varepsilon\frac{\mathrm{M_S}}{\mathrm{R}^2}=\frac{\mathrm{M_T}}{d^2}$$

d'où $$\boxed{d=\mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{M_T}}{3\mathrm{M_S}}\right)^{1/3}}$$

On vérifie que $d/\mathrm{R}\approx 0,01\ll 1$.

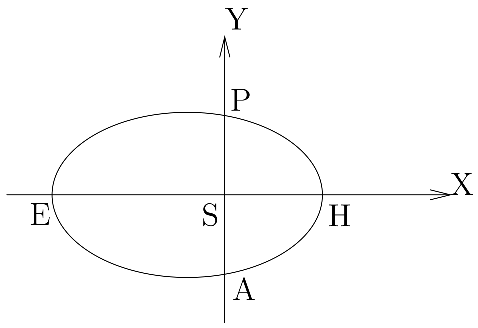
B.4/0,5

Application numérique : $$\boxed{d=1,5.10^9\ \mathrm{m}}$$

C.1/0,5 $\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}) = \overrightarrow{\mathrm{ST}} \wedge m\overrightarrow{v}$

Or $\overrightarrow{\mathscr{M}}_{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = \overrightarrow{\mathrm{ST}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{S}\to\mathrm{T}} = \overrightarrow{0}$ car la force gravitationnelle est centrale. $\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T})$ est constant donc $\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ est perpendiculaire à un vecteur constant donc $\overrightarrow{\mathrm{ST}} \in$ plan (SXY) de normale $\overrightarrow{\mathrm{L}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T})$.

C.2/1 L'orbite terrestre est une ellipse de foyer S :



C.3/1 La démonstration de la loi des aires a été faite en cours de sup et dans le poly de révisions distribué. S'y réferrer si besoin est. On trouve que l'aire balayée pendant Δt est $\Delta \mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{2}\Delta t$.

C.4/1,5

$$\mathrm{A_H} = \frac{ab}{4}(\pi - 4e) \quad \text{et} \quad \mathrm{A_H} = \frac{\mathrm{C}}{2}\mathrm{T_H}$$

Or,

$$\mathrm{A} = \pi ab = \frac{\mathrm{C}}{2}\mathrm{T_A}$$

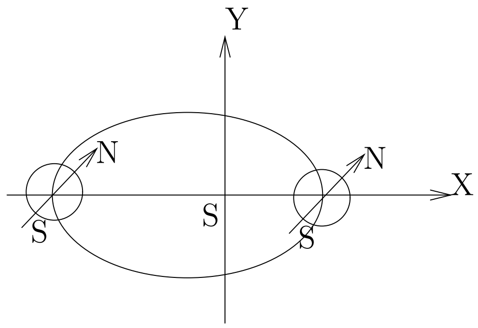
soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{A_H}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{T_H}}{\mathrm{T_A}} \quad \text{et} \quad \mathrm{T_H} = \frac{\pi - 4e}{4\pi}\mathrm{T_A}}$$

C.5/1

$$\frac{1}{4} - \frac{e}{\pi} = \frac{\mathrm{T_H}}{\mathrm{T_A}} \quad \text{d'où} \quad e = \pi\left(\frac{1}{4} - \frac{\mathrm{T_H}}{\mathrm{T_A}}\right) = 0,016$$

C.6/1



Au périhélie, été dans le sud et hiver dans le nord.
A l'aphélie : hiver dans le sud et été dans le nord.
On constate que les saisons sont plus marquées dans le sud.