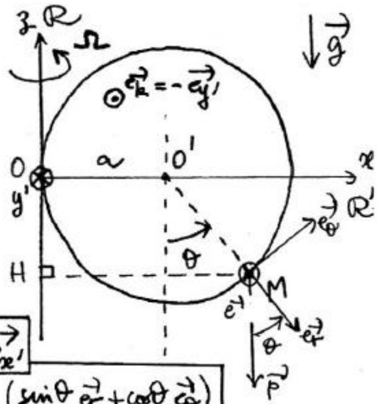


I

$\{M, m\}$ étudié ds le référentiel R' qui est non galiléen puisqu'en rotation autour de Oz ds R.

M est soumise : • à son poids $\vec P = m\vec g = mg(\cos\theta\, \vec{e_r} - \sin\theta\, \vec{e_\theta})$

• à la réact° du cerceau $\vec R \perp \vec{e_\theta}$ car $\vec R \perp \vec v_{M/R'}$ puisqu'il n'y a pas de frottem^t et que $\vec v_{M/R'} = a\dot\theta\, \vec{e_\theta}$

• à la force d'inertie d'entraînement

2) $\boxed{\vec F_{ie} = -m\vec a_e(M) = -m\,\vec a_{M^*/R} = +m\Omega^2\, \vec{HM} = m\Omega^2(a + a\sin\theta)\,\vec{e_{x'}}}$

$\rightarrow \boxed{\vec F_{ie} = m\Omega^2(a + a\sin\theta)\,(\sin\theta\, \vec{e_r} + \cos\theta\, \vec{e_\theta})}$

• à la f^{ce} d'inertie de Coriolis :

3) $\vec F_c = -m\vec a_c(M) = -m\,2\vec\Omega_{R'/R} \times \vec v_{M/R'} = -2m \begin{vmatrix} -\Omega\cos\theta \\ \Omega\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ a\dot\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_k})} = \boxed{-2ma\dot\theta\,\Omega\cos\theta\, \vec{e_{y'}}}$

car $\vec{e_k} \equiv -\vec{e_{y'}}$ ⚠

1) PFD dans R' : $\boxed{m\vec a_{M/R'} = \vec P + \vec R + \vec F_{ie} + \vec F_c}$

4) $\rightarrow$ $m \begin{vmatrix} \cancel{\ddot r} - a\dot\theta^2 \\ a\ddot\theta + 2\cancel{\dot r}\dot\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_k})} = \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_r \\ 0 \\ R_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m\Omega^2(a + a\sin\theta)\sin\theta \\ m\Omega^2(a + a\sin\theta)\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2ma\dot\theta\,\Omega\cos\theta \end{vmatrix}$

$\rightarrow$ Projection selon $\vec{e_\theta}$: $\boxed{a\ddot\theta = -g\sin\theta + \Omega^2 a(1 + \sin\theta)\cos\theta}$

5) $\rightarrow$ Projection selon $\vec{e_r}$: $R_r = -ma\dot\theta^2 - mg\cos\theta - m\Omega^2 a(1 + \sin\theta)\sin\theta$

Projection selon $\vec{e_{y'}} = -\vec{e_k}$: $R_{y'} = 2ma\dot\theta\,\Omega\cos\theta$

II

1) $\boxed{\vec L_{O'/R'}(M) \equiv \vec{O'M} \times m\,\vec v_{M/R'} = a\,\vec{e_r} \times ma\dot\theta\,\vec{e_\theta} = ma^2\dot\theta\,\vec{e_k}}$

2) $\boxed{\underbrace{\left(\frac{d\vec L_{O'/R'}(M)}{dt}\right)_{R'}}_{ma^2\ddot\theta\,\vec{e_k}} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec P) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec R)}_{\vec{O'M} \times \vec R \,//\, \vec{e_\theta}} + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec F_{ie}) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec F_c)}_{\vec{O'M} \times \vec F_c \,//\, \vec{e_\theta}}}$

nécessairement les moments de ces 2 f^{ces} se compensent

3) $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec P) = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_k})} \times \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = -mag\sin\theta\, \vec{e_k}$

$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec F_{ie}) = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m\Omega^2 a(1 + \sin\theta)\sin\theta \\ m\Omega^2 a(1 + \sin\theta)\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} = m\Omega^2 a^2(1 + \sin\theta)\cos\theta$

le théorème du M^t Cinétique donne en projection selon $\vec{e_k}$:

$$ma^2\ddot{\theta} = -mag\sin\theta + m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)\cos\theta$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{a\ddot{\theta} = -g\sin\theta + \Omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta}$ On obtient bien la m̂ équation qu'en [II] 4)

4) Explicitons $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F_c}) = \vec{0}$ comme on l'a démontré en 3)

$$\begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} R_r \\ 0 \\ R_k + 2ma\dot{\theta}\Omega\cos\theta \end{vmatrix} = \vec{0} \iff \boxed{R_{y'} = -R_k = 2ma\dot{\theta}\cos\theta\,\Omega}$$

Mais on ne peut tirer aucun renseignement sur R_r avec cette méthode.

[III]

1) $\vec{F_{ie}} = m\Omega^2(a + a\sin\theta)(\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta})$

$d\vec{O'M} = a\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

$\hookrightarrow$ $\delta W(\vec{F_{ie}}) = \vec{F_{ie}}\cdot d\vec{O'M} = m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta = +m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)\,d\sin\theta$

$$\delta W(\vec{F_{ie}}) = -d\left[-\frac{m\Omega^2a^2}{2}(1+\sin\theta)^2\right] = -d\,\mathcal{E}_{pie}$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_{pie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 HM^2 + cte = -\frac{1}{2}m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)^2 + cte}$

2) $\mathcal{E}_{pg} = mgz + cte = -mg\,a\cos\theta + cte$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_{pg} = mga(1-\cos\theta)}$ (cte choisie pour avoir $\mathcal{E}_{pg} = 0$ pour $\theta = 0$).

3) La force de Coriolis et la réact° du cerceau ne travaillant pas, on peut dire qu'elle dérivent d'une énergie potentielle cte $\delta W = 0 = -d\mathcal{E}_p' = -d\,\underline{\underline{cte}}$

4) $\hookrightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_p(M) = \mathcal{E}_{pie} + \mathcal{E}_{pg}}$ et $\boxed{d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0 \text{ soit } \mathcal{E}_{m/\mathcal{R}'} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_{k/\mathcal{R}'} = cte}$

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pie} + \mathcal{E}_{pg} = -\frac{1}{2}m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)^2 + cte + mga(1-\cos\theta)$$

on veut $\mathcal{E}_p = 0$ pour $\theta = 0$ d'où $cte = \frac{1}{2}m\Omega^2a^2$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{E}_p(\theta) = -\frac{1}{2}m\Omega^2a^2(1+\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}m\Omega^2a^2 + mga(1-\cos\theta)$

$$\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = -\frac{1}{2}m\Omega^2a^2\sin\theta(2+\sin\theta) + mga(1-\cos\theta)}$$

5) $\hookrightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_m = -m\Omega^2a^2\sin\theta\left(1+\frac{\sin\theta}{2}\right) + mga(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2}$

$\frac{d}{dt}\downarrow$ $0 = -m\Omega^2a^2\cos\theta(1+\sin\theta)\cancel{\dot{\theta}} + mga\cancel{\dot{\theta}}\sin\theta + ma^2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta}$

$\hookrightarrow$ $\boxed{a\ddot{\theta} = -g\sin\theta + \Omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta}$ on retrouve bien l'expression de [III] 4)

(*)

1) A' l'équilibre relatif ds $\mathcal{R}'$, $\theta =$ cte soit $\begin{cases}\dot\theta = 0\\ \ddot\theta = 0\end{cases}$ alors (*) donne : $-g\sin\theta_e + \Omega^2 a(1+\sin\theta_e)\cos\theta_e = 0$ 3/

soit $\boxed{\tan\theta_e = \frac{\Omega^2 a}{g}(1+\sin\theta_e)} \Leftrightarrow g\tan\theta_e = \Omega^2 a(1+\sin\theta_e)$

2) Traçons sur un même graphe les fonctions $\begin{cases} g\tan\theta_e \text{ et} \\ \Omega^2 a(1+\sin\theta_e)\end{cases}$

Les intersections des deux courbes correspond aux solutions cherchées.

→ 2 positions d'équilibre : $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

3) On veut que $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$; la vitesse angulaire correspondante est :

$$\Omega_1^2 = \frac{g}{a}\,\frac{\tan\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}} \longrightarrow \boxed{\Omega_1 = \sqrt{\frac{g\tan\frac{\pi}{6}}{a(1+\sin\frac{\pi}{6})}} = \sqrt{\frac{g\ \sqrt{3}}{a(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}}}$$

4) Pour savoir si une position d'équilibre est stable il faut chercher le signe de $\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_e}$.

$$E_p(\theta) = -m\Omega^2 a^2 \sin\theta\left(1+\frac{\sin\theta}{2}\right) + mga(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -m\Omega^2 a^2\cos\theta(1+\sin\theta) + mga\sin\theta = ma\left[-\cos\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{g}{\Omega^2 a}\sin\theta\right]\Omega^2 a$$

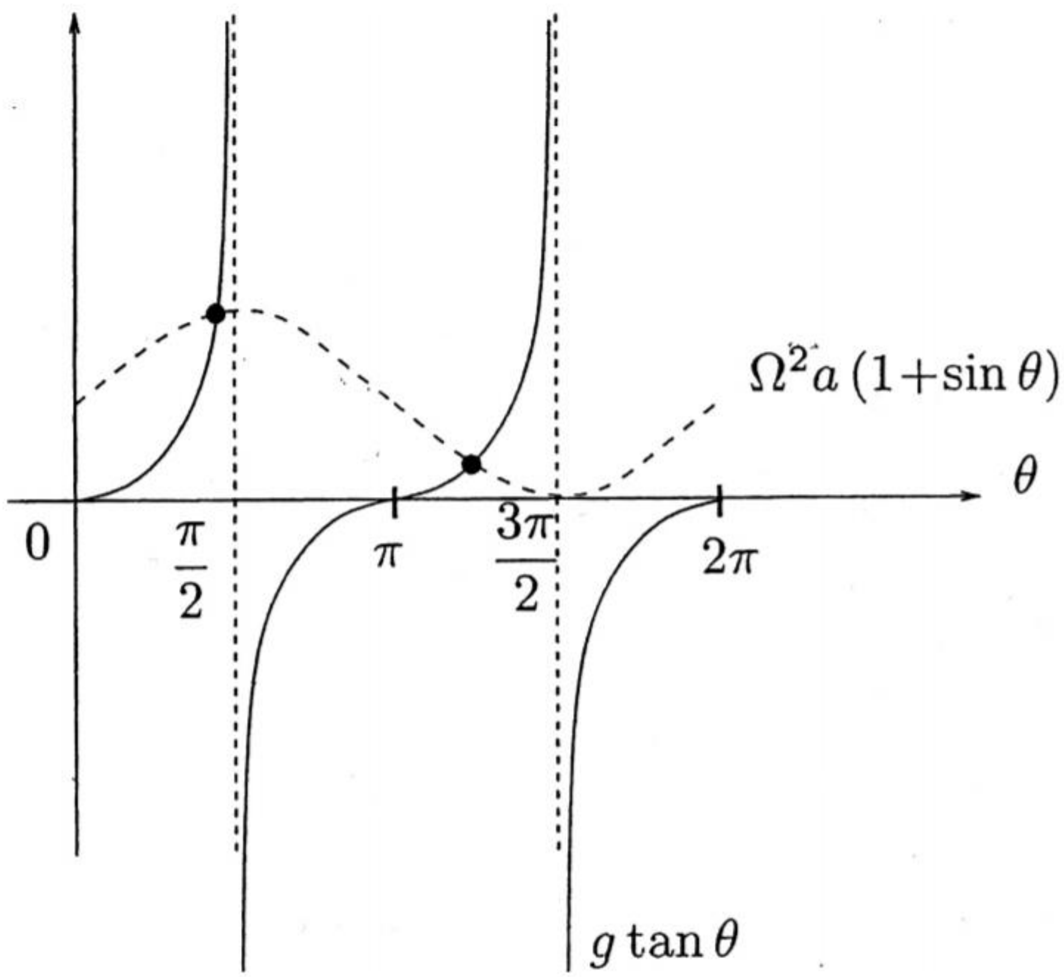
$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ma\left[\sin\theta - \cos 2\theta + \frac{g}{\Omega^2 a}\cos\theta\right]\Omega^2 a$$

Pour $\theta = \theta_1$ $\quad \frac{g}{\Omega^2 a} = \frac{1+\sin\theta_1}{\sin\theta_1}\cos\theta_1$ $\quad$ cf 3°)

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ma^2\Omega^2\frac{1}{\sin\theta_1}\left[\sin^2\theta_1 - \sin\theta_1\cos 2\theta_1 + (1+\sin\theta_1)\cos^2\theta_1\right]$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = ma^2\Omega^2\frac{1}{\sin\theta_1}\left[1 - \sin\theta_1(\cancel{\cos^2\theta_1} - \sin^2\theta_1) + \cancel{\sin\theta_1\cos^2\theta_1}\right]$$

$$\boxed{\frac{d^2E_p}{d\theta^2}} = ma^2\Omega^2\,\frac{1+\sin^3\theta_1}{\sin\theta_1}\ \underbrace{> 0}_{\text{pour } \theta_1 = \frac{\pi}{6}}$$ donc l'équilibre θ_1 est STABLE.


$\Omega^2 a\,(1+\sin\theta)$
θ
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$g\tan\theta$