Devoir surveillé
Durée 3 h

- **La qualité de la rédaction et de présentation , la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies**.

Exercice I

Soit α un réel on pose $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}x^{2n}}{n^\alpha}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n+1}x^{2n}}{n^\alpha}$
2. On note D_α domaine de définition de f_α
   (a) Déterminer D_α selon les valeurs de α
   (b) Pour quoi f_α est de classe C$^\infty$ sur $\overset{\circ}{D_\alpha}$ donner l'expression de $f_\alpha^{(p)}$ pour tout p$\in \mathbb{N}$ sous forme d'une série entière
3. Calculer $f_0(x), f_1(x), f_{-1}(x), f_{-2}(x)$ pour tout x$\in]-R, R[$
4. .Etude à gauche en R
   (a) Pour quelles valeurs de α f_α est continue à gauche en R?
   (b) Si $R \notin D_\alpha$ montrer que $\displaystyle\lim_{x\to R^-} f_\alpha(x) = +\infty$
   (c) Pour quelles valeurs de α f_α est dérivable à gauche en R?
   (d) .A t-on les mêmes résultats à droite en $-R$?

Solution

1. pose $u_n(x) = \dfrac{2^{2n+1}x^{2n}}{n^\alpha}$;
   Pou x$\neq 0$ $\left|\dfrac{u_{n+}(x)}{u_n(x)}\right| = 4x^2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 4x^2$selon la régle de d'alembert Si $|4x^2| < 1$ c'est à dire que $|x| < \frac{1}{2} \sum u_n(x)$ CVA
   Si $|4x^2| > 1$ c'est à dire que $|x| > \frac{1}{2} \sum u_n(x)$ DVG
   L rayon de cv est $\boxed{\text{R}=\frac{1}{2}}$
2. .
   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n+1}x^{2n}}{n^\alpha}$ conerge absolument selon la définition de R *si* $|x| < \frac{1}{2}$ et diverge grossièrement *si* $|x| > \frac{1}{2}$ aivsi $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\subset D_\alpha \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(b) Si $\alpha > 1$ $u_n\left(-\frac{1}{2}\right) = u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{n^\alpha}$

la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^\alpha}$, CVA donc $D_\alpha = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Si $\alpha \leq 1$ Les série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^\alpha}$, DV donc $D_\alpha =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

(c) f_α est la somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{2}$donc elle est de classe C^∞ sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ de plus $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ $f_\alpha^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{2n!}{(2n-p)!} \frac{x^{2n-p}}{n^\alpha}$

3. Rq $\forall x \in]-1, 1[$ h$(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, h'$(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$, h"$(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$

$$f_0(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (4x^2)^n = \frac{8x^2}{1-4x^2}$$

$$f_1(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4x^2)^n}{n} = -2\ln(1-4x^2)$$

$$f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(2x)^{2n} = 8x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(4x^2)^{n-1} = 8x^2 h\prime(4x^2) = \frac{8x^2}{(1-4x^2)^2}$$

$$f_{-2}(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(4x^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1)+n)(4x^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(4x^2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(4x^2)^n$$

$$f_{-2}(x) = 32x^4 h"(4x^2) + 8x^2 h\prime(4x^2) \frac{64x^4}{(1-4x^2)^3} + \frac{8x^2}{(1-4x^2)^2} = \frac{8x^2(4x^2+1)}{(1-4x^2)^3}$$

4. Etude à gauche en $\frac{1}{2}$

(a) Si $\alpha \leq 1$ f_α n'est pas définie en $\frac{1}{2}$

Si $\alpha > 1$ f_α est définie en $\frac{1}{2}$ on a et $f_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^\alpha}$

$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[$ $\left|\dfrac{2^{2n+1}x^{2n}}{n^\alpha}\right| \leq \dfrac{2}{n^\alpha}$

donc la série CVN donc CVU sur $]0, \frac{1}{2}[$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2^{2n+1}x^{2n}}{n^\alpha} = \frac{2}{n^\alpha}$ d'aprés le théorème de double limite $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^\alpha} = f_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{f_\alpha \text{ est continue à gauche en } \frac{1}{2} \iff \alpha > 1}$

(b) $\frac{1}{2} \notin D_\alpha$ donc $\alpha \leq 1$ .On a f_α est croissante sur d'aprés le théorème de la limite monotone elle admet une limite ℓ finie ou $+\infty$

Si ℓ finie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{x^k}{k^\alpha} \leq f_\alpha(x)$

On fait tendre x vers $\frac{1}{2}^-$ on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^* \displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{2}{k^\alpha} \leq \ell < +\infty$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^\alpha}$ CV absurde d'où $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f_\alpha(x) = +\infty$

(c) D'abord on doit avoir f_α est continue à gauche en $\frac{1}{2}$ donc $\alpha > 1$

On a $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\ \ x f'_\alpha(x) = 2 f_{\alpha-1}(x)$

f_α est dérivable en $\frac{1}{2}^-$ $\Leftrightarrow$ $f_{\alpha-1}$ est continue à gauche en $\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \alpha > 2$

$\boxed{f_\alpha \text{ est dérivable en } \frac{1}{2}^- \Longleftrightarrow \alpha > 2}$

(d) f_α est paire donc les mêmes résultats à droite en $-\frac{1}{2}$?

Exercice II

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ a valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = kf$
(utiliser les coordonnées polaires)

Solution

$U = \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$

Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ solution de $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = kf$

Soit $(x,y) \in U$ $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right.$ $r > 0, \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On pose $g(r,\theta) = f(x,y)$

L'application $\Phi : \Delta = \underset{(r,\theta)\to(r\cos\theta, r\cos\theta)}{\mathbb{R}^{+*}\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \to \mathbb{R}$ est C^1 car ses composantes le sont et $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ donc g $\in C^1(\Delta, \mathbb{R})$

$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

On a$\forall (x,y) \in U\ \ x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kf \Longrightarrow \forall (r,\theta) \in \Delta\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = k\ \ g(r,\theta)$

Donc $\exists \varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})\ \forall (r,\theta) \in \Delta\ \ g(r,\theta) = \varphi(r)e^{k\theta}$

Donc $\exists \varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})\ \ \forall (x,y) \in U\ \ = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}}$

Inversement Soit $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}} / \varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$

$f \in C^1(U, \mathbb{R})$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}} + k\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}} + k\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}}$

$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}} + k\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}}$
$-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}} + k\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}}$

$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = k\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}} + k\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}}$

$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{k}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}} = k\ f(x,y)$

Les fonctions $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^{+*}\right)$ solutions de $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = kf$
sont de la forme $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)e^{k\arctan\frac{y}{x}} / \varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$

Exercice III

On pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{(1+t^2)}dt., G(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$

1. Montrer que G admet une limite L finie en $+\infty$
2. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$
4. Déterminer $\underset{x\to+\infty}{lim} F(x)$ et $\underset{x\to-\infty}{lim} F(x)$.
5. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
6. En déduire que $F\prime(x) + \left((G(x))^2\right)' = 0$
7. Etablir que $F(x) + (G(x))^2 = \dfrac{\pi}{4}$
8. En déduire que $L = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du. = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

SOLUTION

On considère $f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}, (x,t) \to \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)}$

1. t$\to e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$

   G admet une limite $L = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}$ finie en $+\infty$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ la fontion $t \to \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)}$est continue sur $[0,1]$donc intégrable sur$[0,1]$ .F est bien définie sur $\mathbb{R}$

3. f est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ $\left|\dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{(1+t^2)}\right| \leq 1$

   ,t$\to$ 1 est intégrable sur $[0,1]$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$

4. $\forall t \in [0,1]$ $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x,,t)$=0 et $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ $\left|\dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{(1+t^2)}\right| \leq 1,$

   t$\to$ 1 est intégrable sur $[0,1]$. D'aprés le théorème de convergence dominée $\underset{x\to+\infty}{lim} F(x) = 0$

   Ou $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)}\right| \leq, e^{-x^2}$ donc $|F(x)| \leq, e^{-x^2}$ or $\underset{x\to\pm\infty}{lim} e^{-x^2} = 0$

   Donc $\underset{x\to\pm\infty}{lim} F(x) = 0$

5. $f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}, (x,t) \to \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)}$ est C^1 sur $\mathbb{R} \times [0,1]$

   $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ $\left|\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

   ,t$\to \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur [0,$+\infty$[donc $t \to \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)}$ aussi

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x\left(1+t^2\right)}$ $\forall\,[a,b] \subset \mathbb{R}^+, \forall x \in [a,b]\,, \forall t \in [0,1]\, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2be^{at^2}$ donc t$\rightarrow$ e^{at^2} est intégrable sur $[0,1][$

D'aprés le théorème de leibniz F est de classe C^1 sur [0,+∞[

par parité de F F est de classe C^1 sur$\mathbb{R}$

6. $\forall x \in \mathbb{R}$ $F\prime(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2\left(1+t^2\right)}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}dt$ on pose $u = tx$

   $\forall x \in \mathbb{R}$ $F\prime(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du$ donc $F\prime(x) + \left((G(x))^2\right)' = 0$

7. x$\rightarrow$ $F(x) + \left((G(x))^2\right)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F\prime(x) + \left((G(x))^2\right)' = 0$

   Donc $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) + \left((G(x))^2\right) = c$

   Quand x tend vers $+\infty$ L$^2 = c$

   On a $F(0) = \int_0^1 \dfrac{1}{(1+t^2)}dt = \frac{\pi}{4}$ $et\ G(0) = 0$ ainsi $c = \frac{\pi}{4}$

   Or L>0 donc $L = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du. = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice IV

$E = M_n(\mathbb{R})$: *on pose* $(A \mid B) = tr\left({}^tAB\right)$

1. Montrer que $(.\mid.)$ est produit scalaire sur E
2. Monrer que $\forall A \in E\ |tr(A)| \leq \sqrt{n}\sqrt{tr\left({}^tAA\right)}$ etudier le cas d'égalité
3. S_n désigne l'ensemble des matrices symétiques réelles A$_n$ *d*ésigne l'ensemble des matrices antisymétiques réelles
   (a) Montrer que S$_n, A_n$ sont supplémentaires orthogonaux dans E
   (b) Calcsuler$d(A, S_n)\,, d(A, A_n)$ $A \in E$
4. Soit $V = (v_{i,j}) \in E\ /\ v_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j-1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$

   On note$G = vect\left(V^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$
   (a) Calculer $V^p, p \in \mathbb{N}$ que l'on exprimera dans la base canonique de E
   (b) Calculer $(V^p \mid V^q)\,, p, q \in \mathbb{N}$
   (c) En déduire une base orthonormée de G
   (d) Soit A$\in E$;montrer que $d(A, G) = \sqrt{tr\left({}^tAA\right) - \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{\left(tr\left({}^tAV^k\right)\right)^2}{n-k}}$

Solution

1. Voir cours
2. $\forall A \in E\ |tr(A)| = |(A \mid I_n)| \leq \|A\|\,\|I_n\| = \sqrt{n}\sqrt{tr\left({}^tAA\right)}$ Inégalité de cauchy schwaryz avec égalité ssi (A, I_n) liée donc A=aI$_n$
3. S_n désigne l'ensemble des matrices symétiques réelles $\mathcal{A}_n$ *d*ésigne l'ensemble des matrices antisymétiques réelles

(a) $\forall A \in E$ A=$\underbrace{\frac{A+({}^tA)}{2}}_{S_n\in} + \underbrace{\frac{A-({}^tA)}{2}}_{\mathcal{A}_n\in}$ ainsi E=$S_n + \mathcal{A}_n$

Soit $(A,B) \in S_n \times \mathcal{A}_n$ .on a $(A \mid B) = (B \mid A)$dond $tr(AB) = -tr(BA) = -\ tr(AB)$ ainsi $(A \mid B) = \ tr(AB) = 0$

Ainsi $S_n \perp \mathcal{A}_n$ d'où E=$S_n \overset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{A}_n$

(b) Soit $A \in E$

$d(A,S_n) = \|A - p_{S_n}(A)\| = \left\| A - \frac{A+({}^tA)}{2} \right\| = \left\| \frac{A-({}^tA)}{2} \right\|$

$d(A,\mathcal{A}_n) = \|A - p_{\mathcal{A}_n}(A)\| = \left\| A - \frac{A-({}^tA)}{2} \right\| = \left\| \frac{A+({}^tA)}{2} \right\|$

(c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à V

$\beta_c = (e_1, ..., e_n)$, base canonique de $\mathbb{R}^n$

$\forall k \in \{1;2,...,n\}$ $\begin{cases} f(e_k) = e_{k-1} \text{ si k} \geq 2 \\ f(e_1) = 0 \end{cases}$

$\forall p \in \{1,2,...,n-1\}, \forall k \in \{1,2,...,n\}$ $\begin{cases} f\hat{}^p(e_k) = e_{k-p} \text{ si k} \geq p+1 \\ f(e_1) = 0 \quad \text{si k} \leq p \end{cases}$

$\forall p \geq n \quad f\hat{}^p = 0$

On a $V = \sum_{k=1}^{k=n-1} E_{k,k+1}$, , $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $V^p = \begin{cases} 0 & \text{si p} \geq \text{n} \\ \sum_{k=1}^{k=n-p} E_{k,k+p} & \text{si p} < \text{n} \end{cases}$

(d) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

1 ^{ier}cas Si p$\geq n$ ou $q \geq n$ $(V^p \mid V^q) = 0$

2 ^{ieme}cas Si p$\leq n-1$ ou $q \leq n\ -1$ $(V^p \mid V^q) = \left(\sum_{k=1}^{k=n-p} E_{k,k+p} \mid \sum_{k=1}^{k=n-q} E_{k,k+q} \right)$,

$(V^p \mid V^q) = Tr\left(\left(\sum_{k=1}^{k=n-p} {}^t(E_{k,k+p}) \right) \left(\sum_{k=1}^{k=n-q} E_{k,k+q} \right) \right)$

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n-p} {}^t(E_{k,k+p}) \right) \left(\sum_{k=1}^{k=n-q} E_{k,k+p} \right) = \sum_{k=1}^{k=n-p} \sum_{l=1}^{l=n-q} E_{k+p,k} E_{l,l+q}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n-p} \sum_{l=1}^{l=n-p} \delta_{k,l} E_{k+p,,l+q}$$

$(V^p \mid V^q) = \sum_{k=1}^{k=n-p} \sum_{l=1}^{l=n-p} \delta_{k,l} Tr(E_{k+p,,l+q}) \sum_{k=1}^{k=n-p} \sum_{l=1}^{l=n-p} \delta_{k,l} \delta_{k+p,,l+q} = \begin{cases} 0 & \text{si p} \neq q \\ n-p & \text{si p} = q \end{cases}$

$((V^p,{,}^q))_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est orthogonale

(e) $G = vect\left(V^k\right)_{k\in\mathbb{N}} = vect\left(V^k\right)_{1\leq k\leq n}$

$\left(V^k\right)_{0\leq k\leq n-1}$est une base orthogonale de G

$\forall k \in \{0;1,2,...,n-1\}$ on pose $R_k = \frac{V_k}{\sqrt{n-p}}$, $(\ R_k)_{1\leq k\leq n-1}$est une base orthonrmale de G

(f) Soit A$\in E$; $d(A,G) = \|A - p_G(A)\| \sqrt{tr({}^tAA) - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\left(tr\left({}^tAV^k\right)\right)^2}{n-k}}$

$$p_G(A) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (A \mid R_k) R_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(tr\left({}^t A R_k\right)\right) R_k$$

$$\|A\|^2 = \|A - p_G(A)\|^2 + \|p_G(A)\|^2 \quad [Pythagor]$$

$$\|p_G(A)\|^2 = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\left(tr\left({}^t A R_k\right)\right)\right)^2 = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\left(tr\left({}^t A V^k\right)\right)^2}{n-k}$$

$$\|A - p_G(A)\|^2 = tr\left({}^t A A\right) - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\left(tr\left({}^t A V^k\right)\right)^2}{n-k}$$

Ansi $d(A,G) = \sqrt{tr\left({}^t A A\right) - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\left(tr\left({}^t A V^k\right)\right)^2}{n-k}}$