Correction de quelques exercices

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $(H)\ (sint)x' - 2\cos(t)x = 0$
   $(L)\ \ x" + 4x' + 5x = cost.cht$

$\boxed{\text{Solution}}$

★ $(H)\ (sint)x' - 2\cos(t)x = 0$

1. Soit $\mathrm{I}_k =]k\pi, (k+1)\,\pi[, k \in \mathbb{Z}$
   →Résolution sur $\mathrm{I}_k, k \in \mathbb{Z}$
   Sur I_k s'écrit $\quad x' = 2\dfrac{\cos t}{sint}x$
   La solution générale de Sur I_k est t→ $\alpha_k e^{\ln\left(sint)^2\right)} = \alpha_k(sint)^2\ /\ \alpha_k \in \mathbb{R}$
   →Résolution sur $\mathrm{J}_k =]\,(k-1)\,\pi, (k+1)\,\pi[, k \in \mathbb{Z}$
   Soit f une solution de (H) sur J_k
   f est solution de (H) sur I_{k-1} et I_k
   $\exists\alpha_{k-1} \in \mathbb{R}\ /\forall x \in I_{k-1}\ f\,(x) = \alpha_{k-1}(sint)^2$
   $\exists\alpha_{21} \in \mathbb{R}\ /\forall x \in I_2$ f$(x) = \alpha_k(sint)^2$
   On a $\forall x \in J_k \quad (sint)x' - 2\cos(t)x = 0$ donc $f\,(0) = 0$
   f est continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to k\pi^+} f\,(x) = \lim\limits_{x\to k\pi^-} f\,(x) = f\,(0) = 0$
   $f$est dérivable en 0
   On a $\lim\limits_{x\to k\pi^+} \dfrac{f\,(x)}{x} =.0\ \lim\limits_{x\to k\pi^-} \dfrac{f\,(x)}{x} = 0$ ainsi $f\prime\,(0) = 0$
   Soit $\psi_{k-1} : J_k \to \mathbb{R}\ \ , t \to \begin{cases} (sint)^2 \text{ si t} \in I_{k-1} \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$ $, \psi_k : J_k \to \mathbb{R}\ \ , t \to \begin{cases} (sint)^2 \text{ si t} \in I_k \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$
   ψ_{k-1}, ψ_k sont solutions de (H) sur J_k
   Toute solution f de (H) sur J_k s'écrit
   $f = \alpha_{k-1}\psi_{k-1+}\alpha_k\psi_k\ \ /\ \ \alpha_{k-1}\ ,\alpha_k \in \mathbb{R}$ = ainsi $\mathrm{S}_{J_k}\,(H) = vect\,(\psi, \psi_k)$ sa dimension est 2
   $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ , t \to \begin{cases} (sint)^2 \text{ si t} \in I_k \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$ φ_k est solution de (H) sur $\mathbb{R}$
   $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre donc $\mathrm{S}_{J_k}\,(H)$ est de dimension infinie

★ $(L)\ \ x" + 4x' + 5x = cost.cht$

1. $(L)\ \ x" + 4x' + 5x = \dfrac{1}{4}\left(e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} + e^{(-1+i)t} + e^{(-1-i)t}\right)$
   $(H)\ \ x" + 4x' + 5x = 0$
   Equation différentielle linèaire scalaire de $2^{ième}$ordre à coefficients constants
   Equation caractéristique est $(\mathcal{E})\ r^2 + 4r + 5 = 0$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont $r_1 = -2+i, r_2 = -2-i$

$S_{\mathbb{R}}(H) = vect(\varphi,\psi), \varphi(t) = e^{-2t+it}, \psi(t) = e^{-2t-it}\sin t$

On cherche une solution particulière f de (L) Par la méthode de substitution

$(1+i), (1-i), (-1+i), (-1-i)$ ne sont pas racines de $(\mathcal{E})$

On ccherche des solutions de (L) sous forme de $Ce^{(1+i)t}$ de $x" + 4x' + 5x = \frac{1}{4}e^{(1+i)t}$ on trouve C=$\frac{3-2i}{156}$

On ccherche des solutions de (L) sous forme de $Ce^{(1-i)t}$ de

$x" + 4x' + 5x = \frac{1}{4}e^{(1-i)t}$ on trouve C=$\frac{3+2i}{156}$

On ccherche des solutions de (L) sous forme de $Ce^{(-1+i)t}$ de

$x" + 4x' + 5x = \frac{1}{4}e^{(-1+i)t}$ on trouve C=$\frac{1-2i}{20}$

On cherche des solutions de (L) sous forme $Ce^{(-1-i)t}$ de

$x" + 4x' + 5x = \frac{1}{4}e^{(-1-i)t}$ on trouve C=$\frac{1+2i}{20}$

$f\ (x) = \frac{3-2i}{156}e^{(1+i)t} + \frac{3+2i}{156}e^{(1-i)t} + \frac{1-2i}{20}e^{(-1+i)t} + \frac{1+2i}{20}e^{(-1-i)t}$

$f\ (x) = \frac{e^t}{156}(3\cos t + 2\sin, t) + \frac{e^t}{20}(\cos t + 2sint)$

La solution générale sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes est t$\rightarrow \alpha e^{-2t+it} + \beta e^{-2t-it} + \frac{e^t}{156}(3\cos t + 2\sin, t) + \frac{e^t}{20}(\cos t + 2sint)$,α et β complexes

La solution générale sur $\mathbb{R}$ à valeurs réels est t$\rightarrow \alpha e^{-2t}\cos t + \beta e^{-2}\sin t + \frac{e^t}{156}(3\cos t + 2\sin, t) + \frac{e^t}{20}(\cos t + 2sint)$

,α et β réels

Exercice 3

On considère l'équation différentielle : $x^2y\prime - y$ =0.

1. Résoudre cette équation sur les intervalles $]0,+\infty[]$ et $]-\infty,0[$.
2. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Solution

On considère l'équation différentielle $(H) : x^2y\prime - y$ =0.

1. Résoudre cette équation sur les intervalles $I_1 =]0,+\infty[]$ et $I_2 =]-\infty,0[$.

   Sur $I_k, k = 1$ ou 2 (H) s'écrit $y\prime = \frac{1}{x^2}y$

   Soit ω une primitive de x$\rightarrow \frac{1}{x^2}$ Sur I_k $\omega(x) = -\frac{1}{x}$

   La solution générale de Sur I_k est x$\rightarrow\rightarrow y(x) = \alpha_k e^{\omega(x)} = \alpha_k e^{-\frac{1}{x}}$ / $\alpha_k \in \mathbb{R}$

2. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$

Soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$ $f|_{I_k}$ est solution de (H) sur I_k

$\exists\alpha_1 \in \mathbb{R}$ $/\forall x \in I_1$ $f(x) = \alpha_1 e^{-\frac{1}{x}}$

$\exists\alpha_{21} \in \mathbb{R}$ $/\forall x \in I_2$ $f(x) = \alpha_2 e^{-\frac{1}{x}}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 f\prime(x) - f(x) = x0$ donc $f(0) = 0$

f est continue en 0 donc $\underset{x\to 0^+}{lim} f(x) = \underset{x\to 0^-}{lim} f(x) = f(0) = 0$

$\underset{x\to 0^+}{lim}\, e^{-\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty\infty$ ainsi $\alpha_1 = 0$

Donc $f(x)) = \begin{cases} 0 \text{ Si } & x \leq 0 \\ \alpha_2 e^{-\frac{1}{x}} & \text{si x>0} \end{cases}$,f est dérivable en 0

On a $\underset{x\to 0^+}{lim} \dfrac{f(x)}{x} =. \underset{x\to 0^+}{lim}\, \alpha_2 \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \underset{x\to +\infty}{lim}\, \alpha_2 X e^{-X} = 0$, $\underset{x\to 0^-}{lim} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ainsi $f\prime(0) = 0$

Soit $\varphi(x)) = \begin{cases} 0 \text{ Si } & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } & x > 0 \end{cases}$ φ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ et solution de

l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est vect(φ)

*Exercice*5

Résoude $(L) \begin{cases} x' = x + y + t \\ y' = -x + 2y + z - t^2 \\ z' = x + z + 1 \end{cases}$

Soit X=$\begin{pmatrix} x^x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (L) s'écrit $X; = AX + B(t)$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} L_3 \twoheadleftarrow L_3 + L_2,$

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 0 & X-2 & X-2 \end{vmatrix} C_2 \twoheadleftarrow C_2 - C_3$

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$

χ_A=$(X-2)\left((X-1)^2 + 1\right) = (X-2)(X-1-i)(X-1+i)$

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2, 1+i, 1-i\}$

$\mathrm{E}_2(A) = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\mathrm{E}_{1+i}(A) = vect \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\mathrm{E}_{1-i}(A) = vect \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution générale de (H)sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes est

$f:t\rightarrow \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}i\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma e^{(1-i)t}\begin{pmatrix}-i\\-1\\1\end{pmatrix},$

α ,β ,γ complexes

La solution générale de (H)sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles est

$f:t\rightarrow \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\beta e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t\\-+\cos t\\\cos t\end{pmatrix}+\gamma e^{t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\\\sin t\end{pmatrix}$, α ,β ,γ réels

Résolution de (L)

On cherche une solution particulięre f à valeurs réelles de (L) sous forme

$f:t\rightarrow \alpha(t)e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta(t)e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t\\-\cos t\\\cos t\end{pmatrix}+\gamma(i)e^{t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\\\sin t\end{pmatrix},$

α ,β ,γ foncions dérivables à valeurs réelles

$f\in S_{\mathbb{R}}(L)$ donc

$\alpha'(t)e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta'(t)e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t\\-\cos t\\\cos t\end{pmatrix}+\gamma'(t)e^{t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\\\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t^2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}\alpha'(t)e^{2t}-\beta'(t)e^{t}\sin t+\gamma'(t)e^{t}\cos t=t\\\alpha'(t)e^{2t}-\beta'(t)e^{t}\cos t-\beta'(t)e^{t}\sin t=t^2\\\alpha'(t)e^{2t}+\beta'(t)e^{t}\cos t+\beta'(t)e^{t}\sin t=1\end{cases}$ on résoud ce système

$$\begin{cases}\alpha'(t)=\dfrac{(1-t^2)e^{2t}}{2e^{4t}}\\\beta'(t)=\dfrac{\left((t-1)^2\sin t-(1-t^2)\cos t\right)e^{3t}}{2e^{4t}}\\\gamma'(t)=\dfrac{\left((1-t^2)\sin t-(t-1)^2\cos t\right)e^{3t}}{2e^{4t}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha'(t)=\dfrac{(t^2+1)e^{-2t}}{2}\\\beta'(t)=\dfrac{\left((t-1)^2\sin t-(1-t^2)\cos t\right)e^{-t}}{2}\\\gamma'(t)=\dfrac{\left((1-t^2)\sin t-(t-1)^2\cos t\right)e^{-t}}{2}\end{cases}$$

Trouver une prvimitive de α ,β ,γon trouve ainsi f

La solution générale de (H)sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles est

$f:t\rightarrow \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t\\-\cos t\\\cos t\end{pmatrix}+\gamma e^{t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\\\sin t\end{pmatrix}+f(t)$

α ,β ,γ réels

Exercice 6

Solution

---

1. Soit A la matrice A=$\begin{pmatrix}2&0&1\\1&-1&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$

   (a) $\chi_A=\begin{vmatrix}X-2&0&-1\\-1&X+1&1\\1&-2&X-2\end{vmatrix}C_1\twoheadleftarrow C_1+C_2-C_3$

   $\chi_A=\begin{vmatrix}X-1&0&-1\\X-1&X+1&1\\-X+1&-2&X-2\end{vmatrix}_1 L_2\twoheadleftarrow L_2-L_1, L_3\twoheadleftarrow L_3+L_1$

   $\chi_A=\begin{vmatrix}X-1&0&-1\\0&X+1&2\\0&-2&X-3\end{vmatrix}=(X-1)^3$

(b) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$

Selon cayley hamilton $\chi_A(A) = (A - I_3)^3 = 0$

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$exp(tA) = exp(t(B + I_3)) = exp(tB)exp(tI_3)$$

$$exp(tA) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tB)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tI_3)^n}{n!}\right) = e^t\left(\sum_{n=0}^{n=2} \frac{(tB)^n}{n!}\right)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$exp(tA) = e^t\left(I_3 + tB + \tfrac{t^2}{2}B^2\right)$$

$$I_3 + tB + \tfrac{t^2}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$exp(tA) = e^t\begin{pmatrix} 1+t & t^2 & t+t^2 \\ t & 1-2t+t^2 & -t+t^2 \\ -t & 2t-t^2 & 1+t-t^2 \end{pmatrix}$$

(c) $(H)\left\{\begin{array}{r} x' = 2x + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{array}\right.$, $(H)\ X\prime = AX$

La solution générale du système différentiel de (H) est

$$X(t)) = exp(tA)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a(1+t) + bt^2 + c(t+t^2))e^t \\ (at + b(1-2t+t^2) + c(-t+t^2))e^t \\ (-at + b(2t-t^2) + c(1+t-t^2))e^t \end{pmatrix}$$

a,b,c réels

Exercice 9

$\boxed{\text{Solution}}$

---

1. Rechercher les fonctions polynômes solutions de:$(x^2 - 3)y" - 4xy\prime + 6y = 0$.
   En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$
   Soit p foction polynômiale solution de (H) p$(x) = a_n x^n + ...a_0, a_n \neq 0$
   p solution donc $(x^2 - 3)p"(x) - 4xp'(x) + 6p(x) = 0.$
   $(n(n-1) - 4n + 6)a_n x^n + ... = 0$ donc $(n^2 - 5n + 6)a_n = 0$
   Or $n^2 - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$ donc n=2 ou n=3
   Pour n=2 On pose p$(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
   $2a\ (x^2 - 3) - 4x(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 0$
   $(-4b + 6b)x + (-6a + 6c) = 0$ ainsi b=0 et a=c donc$p(x) = a(x^2 + 1)$
   Pour n=3 On pose p$(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$
   $(x^2 - 3)(6ax + 2b) - 4x(3ax^2 + 2bx + c) + 6(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$
   $(-18a + 2c)x + 6(d - b) = 0$ ainsi b=d et 9a=c donc$p(x) = a(x^3 + 9x) + b(x^2 + 1)$
   On choisit les fonctions polynômes $f : x \to x^2 + 1, \quad g : x \to x^3 + 9x$

2. les intervalles $\mathrm{I}_1 =]-\infty, -\sqrt{3}[]$, $I_2 =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[, I_3 =]\sqrt{3}, +\infty[$

   $\forall x \in I_k$ $\mathrm{W}(f,g)(x) = \begin{vmatrix} x^2+1 & x^3+9x \\ 2x & 3x^2+9 \end{vmatrix} = (x^2-3)^2 \neq 0$

   (f,g) est un système fondamental de (H) de $\mathrm{S}_{I_k}(H)$

   La solution générale de Sur I_k est x$\rightarrow$ $\alpha_k(x^2+1) + \beta_k(x^3+9x)$ α_k , β_k réels

3. Soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$

   f est solution de (H) sur I_1 , I_2 et I_3

   $\exists\ \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}\ /\forall x \in I_1\ f(x) = \alpha_1(x^2+1) + \beta_1(x^3+9x)$

   $\exists\ \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}\ /\forall x \in I_2\ f(x) = \alpha_2(x^2+1) + \beta_2(x^3+9x)$

   $\exists\ \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{R}\ /\forall x \in I_3\ f(x) = \alpha_3(x^2+1) + \beta_3(x^3+9x)$

   f est continue en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ donc $\underset{x\rightarrow-\sqrt{3}^+}{lim} f(x) = \underset{x\rightarrow-\sqrt{3}^-}{lim} f(x) = f\left(-\sqrt{3}\right)$

   et $\underset{x\rightarrow\sqrt{3}^+}{lim} f(x) = \underset{x\rightarrow\sqrt{3}^-}{lim} f(x) = f\left(\sqrt{3}\right)$

   Donc $4\alpha_1 - 12\beta_1\sqrt{3} = 4\alpha_2 - 12\sqrt{3}\beta_2$,$4\alpha_2 + 12\sqrt{3}\beta_2 = 4\alpha_3 + 12\sqrt{3}\beta_3$

   f est dérivable en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ donc $\underset{x\rightarrow-\sqrt{3}^+}{lim} f'(x) = \underset{x\rightarrow-\sqrt{3}^-}{lim} f'(x) = f'\left(-\sqrt{3}\right)$

   et $\underset{x\rightarrow\sqrt{3}^+}{lim} f'(x) = \underset{x\rightarrow\sqrt{3}^-}{lim} f'(x) = f'\left(\sqrt{3}\right)$

   Donc$-2\alpha_1\sqrt{3} + 18\beta_1 = -2\alpha_2\sqrt{3} + 18\beta_2, 2\alpha_2\sqrt{3} + 18\beta_2 = 2\alpha_3\sqrt{3} + 18\beta_3$

   f est deux fois dérivable en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ donc $\underset{x\rightarrow-\sqrt{3}^+}{lim} f''(x) = \underset{x\rightarrow-\sqrt{3}^-}{lim} f''(x)$ et $\underset{x\rightarrow\sqrt{3}^+}{lim} f''(x) = \underset{x\rightarrow\sqrt{3}^-}{lim} f''(x)$ donc $2\alpha_1 - 18\beta_1\sqrt{3} = 2\alpha_2 - 18\beta_2\sqrt{3}$

   $2\alpha_2 + 18\beta_2\sqrt{3} = 2\alpha_3 + 18\beta_3\sqrt{3}$ Ainsi $\begin{cases} 4\alpha_1 - 12\beta_1\sqrt{3} = 4\alpha_2 - 12\sqrt{3}\beta_2 \\ -2\alpha_1\sqrt{3} + 18\beta_1 = -2\alpha_2\sqrt{3} + 18\beta_2 \\ 2\alpha_1 - 18\beta_1\sqrt{3} = 2\alpha_2 - 18\beta_2\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 - 3\beta_1\sqrt{3} = \alpha_2 - 3\sqrt{3}\beta_2 \\ -\alpha_1 + 3\sqrt{3}\beta_1 = -\alpha_2 + 3\sqrt{3} \\ \alpha_1 - 9\beta_1\sqrt{3} = \alpha_2 - 9\beta_2\sqrt{3} \end{cases}$

   $\begin{cases} 4\alpha_2 + 12\sqrt{3}\beta_2 = 4\alpha_3 + 12\sqrt{3}\beta_{33} \\ 2\alpha_2\sqrt{3} + 18\beta_2 = 2\alpha_3\sqrt{3} + 18\beta_3 \\ 2\alpha_2 + 18\beta_2\sqrt{3} = 2\alpha_3 + 18\beta_3\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_2 + 3\sqrt{3}\beta_2 = \alpha_3 + 3\sqrt{3}\beta_{33} \\ \alpha_2 + 3\sqrt{3}\beta_2 = \alpha_3 + 3\sqrt{3}\beta_3 \\ \alpha_2 + 9\beta_2\sqrt{3} = \alpha_3 + 9\beta_3\sqrt{3} \end{cases}$

   On trouve ainsi

   $\begin{cases} (\alpha_1 - \alpha_2) = (\beta_1 - \beta_2)\,3\sqrt{3} \\ (\alpha_1 - \alpha_2) = (\beta_1 - \beta_2)\,9\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 = \beta_2$

   $\begin{cases} (\alpha_2 - \alpha_3) = (\beta_2 - \beta_3)\,3\sqrt{3} \\ (\alpha_2 - \alpha_3) = (\beta_2 - \beta_3)\,9\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow \alpha_2 = \alpha_3$ et $\beta_2 = \beta_3$

   D'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$et $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

   L es solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont de la forme x$\rightarrow$ $a(x^2+1) + b(x^3+9x)$ a,b réel