

Corrigé du TD 5004

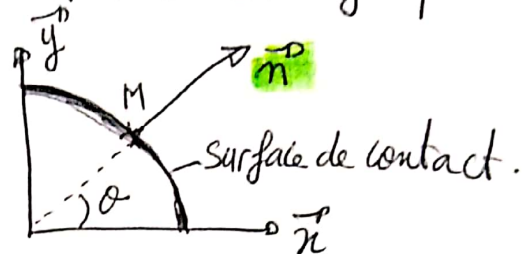
Exercice 1: barrage de forme cylindrique

$$\left\{ T(\text{eau} \rightarrow \text{barrage}) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{e} \rightarrow \text{pb}) \\ \vec{M}(O, \text{e} \rightarrow \text{pb}) \end{array} \right\}_O$$

L'eau est en contact avec la surface du barrage qui est de forme cylindrique:

M : pt courant (variable).

$$\vec{n}^p = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$$



a) calcul de la Résultante de l'eau sur le barrage:

$$\vec{R}(\text{e} \rightarrow \text{pb}) = \int_S \vec{f}(M) \cdot ds \quad (\text{Voir cours}).$$

ds : élément de surface (surface cylindrique (voir complément de cours))

$$ds = R \cdot d\theta \cdot dz; \quad 0 \leq z \leq H \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{R}(\text{e} \rightarrow \text{pb}) = \int_0^H \int_0^{\pi/2} \underbrace{-\rho \cdot g \cdot z \cdot (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y})}_{\vec{f}(M)} \cdot \underbrace{R \cdot d\theta \cdot dz}_{ds}$$

ona une fonction à deux variables (z et θ).

$$\begin{aligned} \vec{R}(\text{e} \rightarrow \text{pb}) &= -\underbrace{\rho \cdot g \cdot R}_{cte} \int_0^H z \, dz \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) \, d\theta \\ &= \left(-\rho \cdot g \cdot R \cdot \frac{H^2}{2} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \right) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) \, d\theta = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta}_1 \vec{x} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta}_1 \vec{y}$$

(1/4)

b) Calcul du Moment statique de l'action de l'eau sur le barrage.

$$\vec{M}(O, e \rightarrow ob) = \int_S \vec{OM} \wedge \underbrace{\vec{f}_{(M)}}_{\substack{\downarrow \\ (ds = R d\theta dz')}} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Voir cours}).$$

avec $\vec{OM} = R \vec{n} + z \vec{z}$

$$\vec{M}(O, e \rightarrow ob) = \int_S (R \vec{n} + z \vec{z}) \wedge (-\rho \cdot g \cdot z \vec{n}) \cdot d\vec{s}$$

avec $\vec{n} \wedge \vec{n} = \vec{0}$ et $\vec{z} \wedge \vec{n} = \vec{z} \wedge (\cos\theta \vec{x} + \sin\theta \vec{y})$
 $= (\cos\theta \vec{y} - \sin\theta \vec{x})$.

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, e \rightarrow ob) &= \iint -\rho \cdot g \cdot z^2 \cdot (\cos\theta \vec{y} - \sin\theta \vec{x}) \cdot \underbrace{R d\theta dz}_{d\vec{s}} \\ &= -\rho \cdot g \cdot R \cdot \int_0^H z^2 dz \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos\theta d\theta \vec{y} - \sin\theta d\theta \vec{x}) \\ &= \boxed{\rho \cdot g \cdot R \cdot \frac{H^3}{3} (\vec{x} - \vec{y})} \end{aligned}$$

Si finalement :

le Torseur de l'action de l'eau sur le barrage :

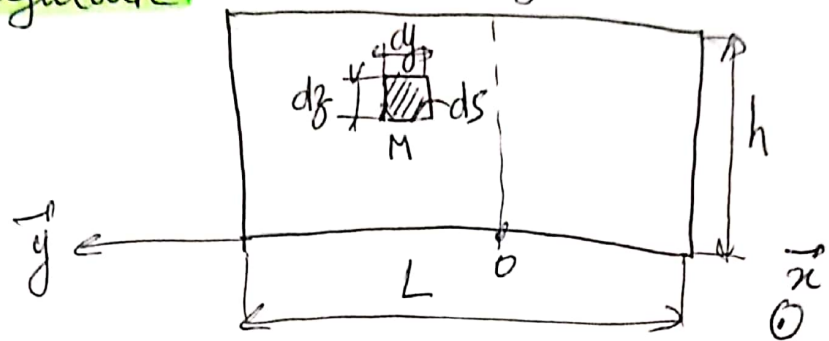
$$\left\{ T(e \rightarrow ob) \right\}_O = \left\{ \vec{R}(e \rightarrow ob) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} -\rho \cdot g \cdot R \cdot \frac{H^2}{2} (\vec{x} + \vec{y}) \\ \rho \cdot g \cdot R \cdot \frac{H^3}{3} (\vec{x} - \vec{y}) \end{array} \right\}_O$$

Remarque : le Torseur est un glisseur car on vérifie que $\vec{R}(e \rightarrow ob) \cdot \vec{M}(O, e \rightarrow ob) = 0$

(2/4)

Exercice 2 :

Le barrage en béton est de **section en trapèze**.
La surface de contact de l'eau sur le barrage est une **rectangulaire**.



$$ds = dy dz \quad -\frac{L}{2} < y < \frac{L}{2} \quad \text{et} \quad 0 < z < h.$$

$$1) \left\{ T(e \rightarrow b) \right\} = \left\{ T(\text{eau} \rightarrow \text{barrage}) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(e \rightarrow b) \\ \vec{M}(O, e \rightarrow b) \end{array} \right\}_O$$

$$a) \vec{R}(e \rightarrow b) = \int_S \vec{R}(e \rightarrow b) = \int_S (\vec{f}_M) \cdot ds$$

$$= \iiint \rho \cdot g \cdot (h - z) \cdot dy dz \vec{x} \quad (\text{double intégrale}).$$

dy et dz.

$$= \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot h^2 \cdot L \vec{x}$$

$$b) \vec{M}(O, e \rightarrow b) = \int \vec{OM} \wedge \vec{f}_M \cdot ds$$

avec $\vec{OM} = y\vec{y} + z\vec{z}$
coordonnées de OM.

$$\Rightarrow \vec{M}(O, e \rightarrow b) = \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{h^3}{6} \cdot \vec{y}$$

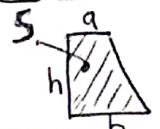
$$3) \text{ Poids du barrage : } P = m \cdot g$$

$$m = \rho_b \cdot V \quad : \rho_b : \text{masse volumique du béton.}$$

m : masse du barrage
g : Accélération de la pesanteur.

$$V : \text{Volume du barrage en trapèze : } V = \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot L$$

(3/4)



4) le barrage est en équilibre $\Rightarrow$ la somme des actions extérieures au barrage est nul (voir cours)

$$\vec{R}(\bar{b} \rightarrow b) = \vec{0} \quad ; \quad \bar{b} : \text{extérieur au barrage. P.F.S.}$$

le bilan des actions appliquées au barrage:

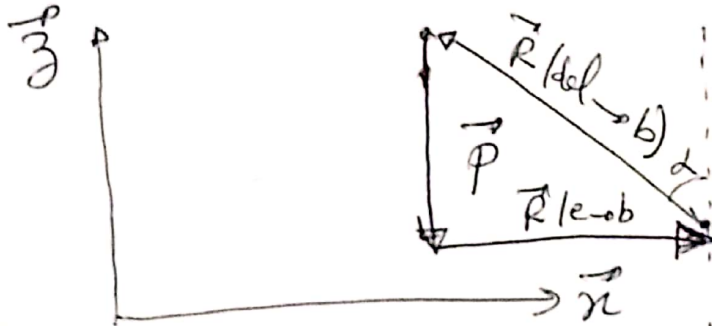
* $\vec{P}$: Poids: (Vertical: vers le bas (pesantéur)).

* $\vec{R}(e \rightarrow b)$: Action de l'eau sur le barrage: portée par l'axe $\vec{n}$ (question 1).

* $\vec{R}(\text{sol} \rightarrow b)$: Action du sol sur le barrage.

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R}(e \rightarrow b) + \vec{R}(\text{sol} \rightarrow b) = \vec{0}$$

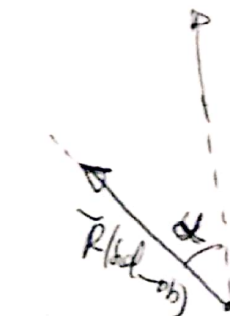
(Somme de 3 vecteurs = $\vec{0} \Rightarrow$ Triangle fermé).



Par def: L'angle de frottement est l'inclinaison de la résultante $\vec{R}(\text{sol} \rightarrow b)$ par rapport à la normale.

$$\text{tg} \alpha = \frac{\|\vec{R}(e \rightarrow b)\|}{\|\vec{P}\|}$$

$$5^o) f = \text{tg} \alpha$$



(4/4)