Mouvement de particules chargées

Corrigé de l'exercice 1 : Champ magnétique uniforme (Centrale TSI 2005)

1) La seule force s'exerçant sur la particule est la force de Lorentz (plus précisément sa composante magnétique) : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.
Appliquons le théorème de l'énergie à la particule sous sa forme différentielle :
$$dE_c = \delta W = q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}dt$$
Or $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonal à $\vec{v}$ donc $dE_c = 0$
Donc l'énergie cinétique E_c de la particule est une constante du mouvement.
2) Exploitons le principe fondamental de la dynamique , appliqué à la particule, dans le référentiel d'étude, supposé galiléen :
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qB(\vec{v_y}\,\vec{e_x} - \vec{v_x}\,\vec{e_y})$$
Donc, en projection sur $\vec{e_z}$, $\frac{d\vec{v_L}}{dt} = 0$ et donc $\vec{v_L}$ est une constante du mouvement.
Or $E_c = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_L^2) = \frac{1}{2}m\,(v_\perp^2 + v_L^2)$.
De plus, E_c et v_L sont des constantes,
Donc $v_\perp$ est également constant au cours du mouvement.

3)

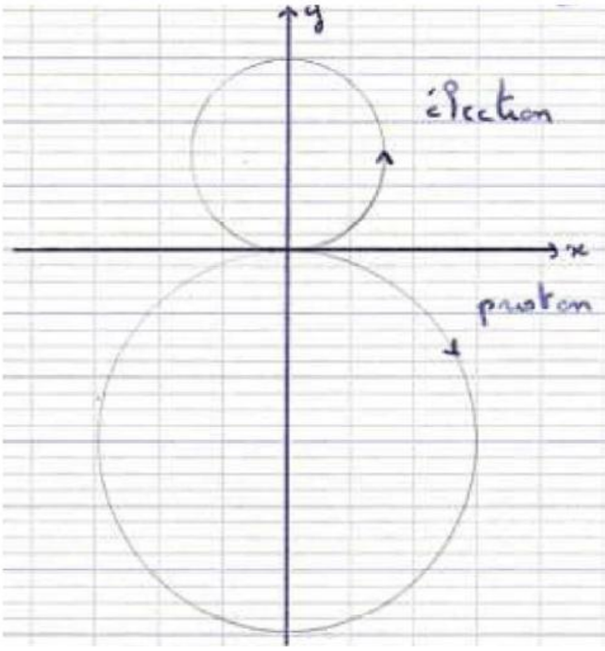
a) D'après le principe fondamental de la dynamique,
$$\begin{cases} m\,\dot{v_x} = qBv_y \\ m\,\dot{v_y} = -qBv_x \end{cases} \text{puis} \begin{cases} \dot{v_x} = \omega v_y \\ \dot{v_y} = -\omega v_x \end{cases}$$
Ce qui mène à $\ddot{v_x} + \omega^2 v_x = 0$.
Donc $v_x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.
Or $v_x(0) = v_{\perp 0}$ et $\dot{v_x}(0) = \omega v_y(0) = 0$.
Donc $\boxed{v_x(t) = v_{\perp 0}\cos(\omega t)}$.
De plus, $v_y = \frac{\dot{v_x}}{\omega}$ donc $\boxed{v_y(t) = -v_{\perp 0}\sin(\omega t)}$

b) En intégrant, sachant que $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, nous obtenons :
$$\boxed{x(t) = \frac{v_{\perp 0}}{\omega}\sin(\omega t)}$$
$$\boxed{y(t) = \frac{v_{\perp 0}}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)}$$

c) Nous reconnaissons l'équation paramétrée d'un cercle Γ de centre $\boxed{C\left(0, -\frac{v_{\perp 0}}{\omega}\right)}$ et de rayon $\boxed{a = \frac{v_{\perp 0}}{|\omega|}}$ parcouru avec une période de révolution $\boxed{T_1 = \frac{2\pi}{|\omega|}}$.

d) Il est difficile de comparer les rayons des deux trajectoires, les vitesses initiales étan a priori différentes. Cependant, nous pouvons noter que $|\omega_e| > \omega_p$ car $m_p > m_e$.

D'autre part, pour le proton, $y < 0$ alors que pour l'électron, $y > 0$.Nous obtenons alors les tracés suivants :



e) Pour l'électron,

$$\boxed{v = 1{,}4.10^8\ m.s^{-1}}$$
$$\boxed{v_\perp = 1{,}3.10^8\ m.s^{-1}}$$
$$\boxed{a = 1{,}5\ km}$$
$$\boxed{T_1 = 7{,}1.10^{-5}\ s}$$

$v > \frac{c}{10}$: l'électron aurait dû être considéré comme relativiste.

Pour le proton,

$$\boxed{v = 1{,}0.10^7\ m.s^{-1}}$$
$$\boxed{v_\perp = 9{,}8.10^6\ m.s^{-1}}$$
$$\boxed{a = 2{,}0.10^2\ km}$$
$$\boxed{T_1 = 1{,}3.10^{-1}\ s}$$

$v \gtrsim \frac{c}{10}$: le proton est à la limite d'être relativiste.

4)

a) Comme $v_L = cte$, la trajectoire est une <u>hélice</u>.

b) $\boxed{b = v_L T_1 = \frac{2\pi v_L}{|\omega|}}$.

Si $v_{L0}^2 = \frac{v_{\perp 0}^2}{10}$, $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{2\pi v_L}{|\omega|}\frac{|\omega|}{v_{\perp 0}} = \frac{2\pi v_L}{v_{\perp 0}} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} = 2{,}0}$