Soit $f : \Bbbk^3 \to \Bbbk^3$ définie par : $f(x,y,z) = (2y-2z\ ,x+y-2z\ ,x-y)$
On note $Id = Id_{\Bbbk^3}$ .On rappelle que $f^{\,0} = Id$ et $f^{\,n} = f \circ \ldots \circ f,\ si\ n \geq 1$.

Q1) a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\Bbbk^3)$.

b) Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ (sous forme d'un $Vect[\cdots]$).
Donner une base de chacun de ces deux sev.

c) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

d) Démontrer que $\Bbbk^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

e) Soit p la projection sur $\ker(f)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f)$, calculer $p(x,y,z)$.

Q2) a) Soit $(x,y,z) \in \Bbbk^3$, déterminer $f^{\,2}(x,y,z)$ *et* $f^{\,3}(x,y,z)$.

b) En déduire que $f^{\,3} - f^{\,2} - 2f = 0$.

c) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X^{\,3}-X^{\,2}-2X}$.

d) En déduire que $Id = -\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id})\circ(f-2\,\mathrm{Id})+\frac{1}{6}f\circ(f+\mathrm{Id})+\frac{1}{3}f\circ(f-2\,\mathrm{Id})$

On pose : $\begin{cases} q = -\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id})\circ(f-2\,\mathrm{Id}) = -\frac{1}{2}(f^{\,2}-f-2\,\mathrm{Id}) \\ r = \frac{1}{6}f\circ(f+\mathrm{Id}) = \frac{1}{6}(f^{\,2}+f) \\ s = \frac{1}{3}f\circ(f-2\,\mathrm{Id}) = \frac{1}{3}(f^{\,2}-2f) \end{cases}$

On a $\mathrm{Id} = q+r+s$

Q3) a) Montrer que q est un projecteur.

b) Montrer que $\ker(q) \subset \operatorname{Im}(f)$ et que $q \circ f = 0$. En déduire que $\ker(q) = \operatorname{Im}(f)$.

c) Montrer que $f \circ q = 0$ et que $\ker(f) \subset \ker(q-Id)$, en déduire que $\ker(f) = \ker(q-Id)$.Quelle relation peut-on en déduire entre q *et* p (p est défini dans la première question) ?

d) Montrer que r *et* s sont deux projecteurs, que $r \circ s = s \circ r = 0$, que $f \circ r = 2r$ et $f \circ s = -s$.

e) En déduire que pour $n \geq 1, f^{\,n} = 2^n r + (-1)^n s$.
Calculer l'expression de $f^{\,n}(x,y,z)$.

Q4) Autre méthode pour calculer $f^{\,n}$
soit $P(X) = X^{\,3} - X^{\,2} - 2X$

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{\,n}$ par $P(X)$ pour $n \geq 1$.

b) En déduire l'expression de $f^{\,n}$ en fonction de f et $f^{\,2}$, puis retrouver l'expression de $f^{\,n}(x,y,z)$

Q5) Application 1 : soient (x_n), (y_n), (z_n) trois suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$$

a) Montrer que $(x_n, y_n, z_n) = f^{\,n}(x_0, y_0, z_0)$.

b) En déduire les expressions de x_n, y_n *et* z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0 .

Q6) Application 2 : dans cette question $\Bbbk = \mathbb{R}$. On considère trois fonctions $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient le système :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 2y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ *et* $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}$.

On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(x(t), y(t), z(t)) = (x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t))$

a) Justifier (sans calcul) les égalités: $r(x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t)) = 2r(x(t), y(t), z(t))$ et $s(x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t)) = -s(x(t), y(t), z(t))$

b) Soient $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $r(x(t), y(t), z(t)) = (a(t), b(t), c(t))$.
Calculer a, b, c, vérifier qu'elles sont dérivables et que :

$$r(x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t)) = (a^{'}(t), b^{'}(t), c^{'}(t))$$

En déduire que $r(x(t), y(t), z(t)) = e^{\ 2t} r(x_0, y_0, z_0)$

c) De même, montrer que $s(x(t), y(t), z(t)) = e^{\ -t} s(x_0, y_0, z_0)$

d) En déduire les expressions de $x(t), y(t), z(t)$.

Corrigé du DL : espaces vectoriels

$f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (2y-2z,\ x+y-2z,\ x-y).$

Q1) a) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$. (Vérification facile).

b) Déterminons $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$:

$\rightarrow \ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{K}^3}\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / (2y-2z,\ x+y-2z,\ x-y) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 /\ y = z,\ x+y-2z = 0,\ x = y\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 /\ x = y = z\} = \{(x,x,x) / x \in \mathbb{K}\}$

$\boxed{\ker f = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}}$.

$\rightarrow \operatorname{Im} f = \{f(x,y,z) / (x,y,z) \in \mathbb{K}^3\}$

$= \{(2y-2z,\ x+y-2z,\ x-y) / (x,y,z) \in \mathbb{K}^3\}$

$= \{x\cdot(0,1,1) + y\cdot(2,1,-1) + z\cdot(-2,-2,0) / (x,y,z) \in \mathbb{K}^3\}$

$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{\underbrace{(0,1,1)}_{u},\ \underbrace{(2,1,-1)}_{v},\ \underbrace{(-2,-2,0)}_{w}\}}$

Comme $w = -(u+v)$, alors :

$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{u, v\}}$

c) $\rightarrow$ f n'est pas injective, car $\ker f \neq \{0_{\mathbb{K}^3}\}$, donc, n'est pas bijective.

$\rightarrow$ Pour $(0,0,1)$: si $\exists (x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ tq $f(x,y,z) = (0,0,1)$, alors, $(x = y = z$ et $x - y = 1)$. Contradiction

donc f n'est pas surjective.

d). Mq : $\mathbb{K}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

$\rightarrow$ Soit $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$. On a :

$(x,y,z) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow f(x,y,z) = 0_{\mathbb{K}^3}$ et $\exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ tq $f(a,b,c) = (x,y,z)$

$\Longrightarrow x = y = z$ et $(\exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 :\ 2b-2c = x,\ a+b-2c = y,\ a-b = z)$

$\Longrightarrow x = y = z$ et $(b-c = x/2,\ a-b = y-x,\ a-b = z)$.

$\Longrightarrow x = y = z$ et $\{b-c = x/2,\ a-b = 0,\ z = 0$

$\Longrightarrow x = y = z = 0$.

$\Longrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset \{0_{\mathbb{K}^3}\}$, puis $\boxed{\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathbb{K}^3}\}}$. (1)

(car $\ker f \cap \operatorname{Im} f$ est un s-ev de $\mathbb{K}^3$)

→ Mq $\mathbb{K}^3 = \ker f + \operatorname{Im} f$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$. On doit écrire :

$$(x,y,z) = (a,b,c) + (d,e,f) \text{ avec } (a,b,c)\in \ker f \text{ et } (d,e,f)\in \operatorname{Im} f.$$

autrement : $(x,y,z) = \underbrace{\alpha.(1,1,1)}_{\in \ker f} + \underbrace{\beta u + \gamma v}_{\in \operatorname{Im} f}$. (*) (avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{K}$).

On a : (*) $\Leftrightarrow$ $x = \alpha + 2\gamma$, $y = \alpha+\beta+\gamma$ et $z = \alpha+\beta-\gamma$

$\Leftrightarrow$ $\alpha = x+z-y$, $\beta = -x+\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z$ et $\gamma = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$.

Donc : $\forall (x,y,z)\in\mathbb{K}^3$: $(x,y,z) = \underbrace{(x-y+z).(1,1,1)}_{\in \ker f} + \underbrace{(-x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z)u + (\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z)v}_{\in \operatorname{Im} f}$

d'où : $\mathbb{K}^3 \subset \ker f + \operatorname{Im} f$, puis $\boxed{\mathbb{K}^3 = \ker f + \operatorname{Im} f}$. (2)

De (1) et (2) on obtient : $\mathbb{K}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Rq : On verra dans le Chapitre « Espaces vectoriels en dimension finie » une méthode plus facile pour répondre à ce genre de question.

e). Soit p le projecteur sur $\ker f$ // à $\operatorname{Im} f$. Calculons $p(x,y,z)$.

D'après la question (d) : $\forall (x,y,z)\in\mathbb{K}^3$: $(x,y,z) = \underbrace{(x-y+z).(1,1,1)}_{\in \ker f} + \underbrace{(-x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z)u + (\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z)v}_{\in \operatorname{Im} f}$

donc $\forall (x,y,z)\in\mathbb{K}^3$: $p(x,y,z) = (x-y+z).(1,1,1)$

$= (x-y+z\,;\, x-y+z\,;\, x-y+z)$.

Q2 : a) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$.

↦ $f^2(x,y,z) = f(f(x,y,z)) = f(2y-2z, x+y-2z, x-y) = (4y-4z\,;\, -x+5y-4z\,;\, y-x)$

↦ $f^3(x,y,z) = f(f^2(x,y,z)) = f(4y-4z\,;\, -x+5y-4z\,;\, y-x) = (8y-8z\,;\, x+7y-8z\,;\, x-y)$.

b) On a $\forall (x,y,z)\in\mathbb{K}^3$: $(f^3 - f^2 - 2f)(x,y,z) = f^3(x,y,z) - f^2(x,y,z) - 2f(x,y,z) = (0,0,0)$

donc $\boxed{f^3 - f^2 - 2f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}}$.

c) Onq : $\frac{1}{x^3-x^2-2x} = \frac{1}{x(x^2-x-2)} = \frac{1}{x(x+1)(x-2)}$

$= \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$.

on trouve $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = \frac{1}{6}$.

Rq: On verra dans le chapitre « Fractions rationnelles » comment décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

d) $-\frac{1}{2}(f+Id)\circ(f-2Id) + \frac{1}{6}f\circ(f+Id) + \frac{1}{3}f\circ(f-2Id)$

$= \left(-\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{6}f^2 + \frac{1}{3}f^2\right) + \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{6}f - \frac{2}{3}f\right) + Id$

$= Id$.

(Q3) : a) Mq q est un projecteur.

Onq : $q^2 = \left(-\frac{1}{2}\left(f^2-(f+2Id)\right)\right)^2$

$= \frac{1}{4}\left(f^4 + (f+2Id)^2 - 2f^2\circ(f+2Id)\right)$

(car f^2 et $(f+2Id)$ commutent)

$= \frac{1}{4}\left(f^4 + f^2 + 4f + 4Id - 2f^3 - 4f^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(f^4 - 2f^3 - 3f^2 + 4f + 4Id\right)$

$= \frac{1}{4}\left((f^4 - f^3 - 2f^2) - f^3 - f^2 + 4f + 4Id\right)$

$= \frac{1}{4}\left(f\circ\underbrace{(f^3-f^2-2f)}_{=0} - f^3 - f^2 + 4f + 4Id\right)$

$= -\frac{1}{4}\left((f^2+2f) + f^2 - 4f - 4Id\right)$ (car $f^3 = f^2 + 2f$)

$= -\frac{1}{4}\left(2f^2 - 2f - 4Id\right) = -\frac{1}{2}\left(f^2 - f - 2Id\right) = q$

d'où q est un projecteur.

---

b) Mq : $Ker(q) \subset Im(f)$ et $q\circ f = 0$.

Soit $u \in \mathbb{K}^3$.

*) $u \in Ker(q) \Rightarrow q(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(f^2 - f - 2Id)(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$.

$\Rightarrow f^2(u) - f(u) - 2u = 0_{\mathbb{K}^3}$

$\Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(f^2(u) - f(u)\right)$

$\Rightarrow u = \frac{1}{2} f\circ(f - Id)(u)$

$\Rightarrow u = f\circ(f - Id)\left(\frac{1}{2}u\right)$

$\Rightarrow u \in Im f$.

Donc $\boxed{Ker(q) \subset Im(f)}$. (1)

*) Ona $q\circ f = -\frac{1}{2}(f^2 - f - 2Id)\circ f$

$= -\frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 - 2f\right)$

$\boxed{q\circ f = 0}$.

*). Onq $q\circ f = 0$, donc, $\forall u \in \mathbb{K}^3 : q\circ f(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$

donc $\forall u \in \mathbb{K}^3 : f(u) \in ker(q)$

d'où : $\boxed{Im f \subset Ker(q)}$ (2)

De (1) et (2) on obtient : $\boxed{Ker(q) = Im(f)}$.

---

c) → Mq : $f\circ q = 0$. Ona

$f\circ q = f\circ\left(-\frac{1}{2}(f^2 - f - 2Id)\right) = -\frac{1}{2}\left(f^3 - f^2 - 2f\right)$

$= 0$.

→ Mq : $\underline{Ker(f) \subset Ker(q-Id)}$.

Soit $u \in \mathbb{K}^3$.

$u \in Ker(f) \Rightarrow f(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$

donc $q(u) = -\frac{1}{2}(f^2 - f - 2Id)(u)$

$= -\frac{1}{2}(\underbrace{f^2(u)}_{=0} - \underbrace{f(u)}_{=0} - 2u)$

$= u$.

donc $(q - Id)(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$ et $u \in Ker(q-Id)$

D'où : $\boxed{Ker(f) \subset Ker(q-Id)}$.

→ Mq $\underline{Ker(q-Id) \subset Ker(f)}$:

$u \in Ker(q-Id) \Rightarrow q(u) = u$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(f^2(u) - f(u) - 2u) = u$

(on applique f) $\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}(f^2(u) - f(u) - 2u)\right) = f(u)$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(\underbrace{f^3 - f - 2f}_{=0})(u) = f(u)$

$\Rightarrow f(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$

$\Rightarrow u \in Ker(f)$. D'où $\boxed{Ker(q-Id) \subset Ker(f)}$

$\boxed{C^{cl}}$: $Ker(f) = Ker(q-Id)$.

•) On a : $\begin{cases} Im\,p = Ker f \text{ et } Ker\,p = Im f \\ Ker f = Ker(q-Id) \text{ et } Im f = Ker q \end{cases}$

donc : $\boxed{\begin{cases} Im\,p = Ker(q-Id) \\ Ker\,p = Ker\,q \end{cases}}$.

d) → Mq r et s sont des projecteurs.

•) s est linéaire.

•) On a : $s^2 = \left(\frac{1}{3}(f^2 - 2f)\right)^2$

$= \frac{1}{9}(f^4 - 4f^3 + 4f^2)$

$= \frac{1}{9}(f \circ (f^2 + 2f) - 4f^3 + 4f^2)$

$= \frac{1}{9}(f^3 + 2f^2 - 4f^3 + 4f^2) = \frac{1}{9}(-3f^3 + 6f^2)$

$= \frac{1}{3}(-f^3 + 2f^2) = \frac{1}{3}(-f^2 - 2f + 2f^2)$

$= \frac{1}{3}(f^2 - 2f) = s$, donc s est un projecteur.

•) r est linéaire.

•) On a : $r^2 = \left[\frac{1}{6}(f^2 + f)\right]^2 = \frac{1}{36}(f^4 + 2f^3 + f^2)$

$= \frac{1}{36}\left[f \circ (f^2 + 2f) + 2f^3 + f^2\right]$

$= \frac{1}{36}\left[3f^3 + 3f^2\right] = \frac{1}{12}\left[f^3 + f^2\right]$

$= \frac{1}{12}(f^2 + 2f + f^2) = \frac{1}{6}(f^2 + f) = r$,

donc : r est un projecteur.

→ Mq : $r \circ s = s \circ r = 0$.

•) On a : $r \circ s = \left(\frac{1}{6}(f^2 + f)\right) \circ \left(\frac{1}{3}(f^2 - 2f)\right)$

$= \frac{1}{18}(f^2 + f) \circ (f^2 - 2f) = \frac{1}{18}\underbrace{(f + Id) \circ (f - 2Id)}_{} \circ f^2$

$= \frac{1}{18}(-2q) \circ f^2 = -\frac{1}{9}\underbrace{(q \circ f)}_{=0} \circ f = 0$.

•) Et : $s \circ r = \left(\frac{1}{3}(f^2 - 2f)\right) \circ \left(\frac{1}{6}(f^2 + f)\right) = r \circ s = 0$

(car $(f^2 - 2f)$ et $(f^2 + f)$ commutent)

4

Scanné avec CamScanner

→ Mq : $f\circ r = 2r$ et $f\circ s = -s$:

•) $f\circ r = f\circ\left(\frac{1}{6}(f^2+f)\right) = \frac{1}{6}(f^3+f^2)$
$= \frac{1}{6}(f^2+2f+f^2) = \frac{1}{6}(2f^2+2f) = 2r$

•) $f\circ s = f\circ\left(\frac{1}{3}(f^2-2f)\right) = \frac{1}{3}(f^3-2f^2)$
$= \frac{1}{3}(f^2+2f-2f^2) = \frac{1}{3}(-f^2+2f)$
$= -\frac{1}{3}(f^2-2f) = -s.$

e) Déduisons que :
$\forall n \geq 1, \ f^n = 2^n r + (-1)^n s.$

Par récurrence sur n.

→ Pour $n=1$:
$f = f\circ Id = f\circ(q+r+s)$
$= \underbrace{f\circ q}_{0} + f\circ r + f\circ s = 2r - s.$

Donc l'égalité est vraie pour $n=1$.

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'égalité vraie pour n. On a :
$f^{n+1} = f\circ f^n = 2^n f\circ r + (-1)^n f\circ s$
$= 2^n (2r) + (-1)^n (-s)$
$= 2^{n+1} r + (-1)^{n+1} s.$

D'où par récurrence : $\forall n \geq 1$:
$f^n = 2^n r + (-1)^n s.$

•) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{K}^3, \forall n \geq 1$:
$f^n(x,y,z) = 2^n r(x,y,z) + (-1)^n s(x,y,z)$
$= \frac{2^n}{6}(f^2+f)(x,y,z) + \frac{(-1)^n}{3}(f^2-2f)(x,y,z)$
$= \dots$ (Utilisez Q2 a).

Q4) a) La division euclidienne de X^n par $P(X) = X^3 - X^2 - 2X$, donne :

$X^n = P(X) \cdot Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(P)$

c.à.d : $X^n = P(X).Q(X) + (aX^2 + bX + c)$

(avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$).

→ Les racines de P sont : 0, 2 et -1.

On a : $0^n = \underbrace{P(0)}_{0} \cdot Q(0) + c \Rightarrow \boxed{c=0}$

$(-1)^n = \underbrace{P(-1)}_{0} Q(-1) + (a-b) \Rightarrow \boxed{a-b = (-1)^n}$

$2^n = \underbrace{P(2)}_{0} . Q(2) + (4a+2b) \Rightarrow \boxed{4a+2b = 2^n}$

donc : $\begin{cases} c=0. \\ a = b + (-1)^n \\ 2a+b = 2^{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a = \frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3} \\ b = \frac{2^{n-1}-2.(-1)^n}{3} \end{cases}$

Le reste de la div. euclidienne de X^n par P est

$$\boxed{R(X) = \underbrace{\frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}}_{a_n} X^2 + \underbrace{\frac{2^{n-1}-2(-1)^n}{3}}_{b_n} X}.$$

---

b) Soit $n \geq 1$.
On a : $X^n = P(X).Q(X) + (a_n X^2 + b_n X)$

donc : $f^n = P(f)\circ Q(f) + (a_n f^2 + b_n f)$
$= \underbrace{(f^3 - f^2 - 2f)}_{0} \circ Q(f) + (a_n f^2 + b_n f)$

$$\boxed{f^n = a_n f^2 + b_n f}.$$

•) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{K}^3$: $f^n(x,y,z) = a_n f^2(x,y,z) + b_n f(x,y,z) = \dots$

Q5) a) Mq $\forall n \in \mathbb{N} : f^n(x_0,y_0,z_0) = (x_n,y_n,z_n)$

→ Pour $n=0$: $f^0(x_0,y_0,z_0) = Id(x_0,y_0,z_0)$
$= (x_0,y_0,z_0)$.

→ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie pour n.

On a : $f^{n+1}(x_0,y_0,z_0) = f(f^n(x_0,y_0,z_0))$
$= f(x_n,y_n,z_n) = (2y_n - 2z_n, x_n+y_n-2z_n, x_n-y_n)$
$= (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$.

D'où le résultat par récurrence.

---

b) Utilisez la question 4)b).

Q6) a) → On a :

$r \circ f = \frac{1}{6}(f^2+f)\circ f = f \circ (\frac{1}{6}(f^2+f)) = f \circ r = 2r$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$:

$r(x'(t),y'(t),z'(t)) = r\circ f(x(t),y(t),z(t)) = 2r(x(t),y(t),z(t))$

→ Et : $s\circ f = \frac{1}{3}(f^2-2f)\circ f = f\circ s = -s$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$:

$s(x'(t),y'(t),z'(t)) = s\circ f(x(t),y(t),z(t)) = \cancel{-s}$
$= -s(x(t),y(t),z(t))$.

---

b) $r((x(t),y(t),z(t)) = \frac{1}{6}[f^2(x(t),y(t),z(t)) + f(x(t),y(t),z(t))]$

$= \frac{1}{6}[(4y(t)-4z(t), -x(t)+5y(t)-4z(t), y(t)-x(t)) + (2y(t)-2z(t), x(t)+y(t)-2z(t), x(t)-y(t))]$

$= \frac{1}{6}[(6y(t)-6z(t), 6y(t)-6z(t), 0)]$

$= (y(t)-z(t) ; y(t)-z(t) ; 0)$

donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} a(t) = y(t)-z(t) \\ b(t) = y(t)-z(t) \\ c(t) = 0 \end{cases}}$

→ c est dérivable sur $\mathbb{R}$

→ Comme y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors a et b sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

→ On a : $\forall t \in \mathbb{R}$:

$r(x'(t),y'(t),z'(t)) = 2r(x(t),y(t),z(t))$

$= (2a(t), 2b(t), 2c(t))$.

$= (2y(t)-2z(t), 2y(t)-2z(t), 0)$,

d'autre part : $\begin{cases} a'(t) = y'(t)-z'(t) = 2y(t)-2z(t) \\ b'(t) = y'(t)-z'(t) = 2y(t)-2z(t) \\ c'(t) = 0 \end{cases}$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$: $\boxed{r(x'(t),y'(t),z'(t)) = (a'(t),b'(t),c'(t))}$.

→ Soit $t \in \mathbb{R}$.

$(a(t),b(t),c(t)) = r(x(t),y(t),z(t))$
$= \frac{1}{2}r(x'(t),y'(t),z'(t))$
$= (\frac{1}{2}a'(t), \frac{1}{2}b'(t), \frac{1}{2}c'(t))$.

Donc : $a(t) = \frac{1}{2}a'(t)$, $b(t) = \frac{1}{2}b'(t)$, $c(t) = \frac{1}{2}c'(t)$

$a'(t) - 2a(t) = 0$, $b'(t) - 2b(t) = 0$

et $c'(t) - 2c(t) = 0$.

D'où : $\forall t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} a(t) = \lambda_1 e^{2t} \\ b(t) = \lambda_2 e^{2t} \\ c(t) = \lambda_3 e^{2t} \end{cases}$ / $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

•) Pour $t=0$: $a(0)=\lambda_1$, $b(0)=\lambda_2$, $c(0)=\lambda_3$

Donc $\forall t\in\mathbb{R}$:

$$r(x(t),y(t),z(t)) = (a(t),\ b(t),\ c(t))$$
$$= (a(0)e^{2t},\ b(0)e^{2t},\ c(0)e^{2t})$$
$$= e^{2t}\, r(x(0),y(0),z(0))$$
$$= e^{2t}\, r(x_0,y_0,z_0)\ .$$

---

c/ Même démarche que $r(x(t),y(t),z(t))$.

d/ D'après la question (Q2, d) :

$Id = q+r+s$, donc, $\forall t\in\mathbb{R}$:

$$Id(x(t),y(t),z(t)) = q(x(t),y(t),z(t)) + r(x(t),y(t),z(t)) + s(x(t),y(t),z(t))$$

Or : $q(x(t),y(t),z(t))$

$$= -\frac{1}{2}\left(f^2-f-2Id\right)(x(t),y(t),z(t))$$

(Faites les calculs)

$$= \left(x(t)-y(t)+z(t)\ ;\ x(t)-y(t)+z(t),\ x(t)-y(t)+z(t)\right)$$

D'où $\forall t\in\mathbb{R}$:

$$(x(t),y(t),z(t)) = \left(x(t)-y(t)+z(t)+e^{2t}a(0)+e^{-t}\alpha(0)\ ;\ x(t)-y(t)+z(t)+e^{2t}b(0)+e^{-t}\beta(0)\ ;\ x(t)-y(t)+z(t)+e^{2t}c(0)+e^{-t}\gamma(0)\right)$$

où : $(\alpha(0),\beta(0),\gamma(0)) = s(x(0),y(0),z(0))$.

D'où : $\begin{cases} x(t) = \ldots \\ y(t) = \ldots \\ z(t) = \ldots \end{cases}$ terminez les calculs.