Rhanami-Brahim

MP **2019 – 2020**

Prépration CNC

On considère la série de terme général : $u_n = \dfrac{q^n \ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}}$ où $n \geq 2,\ q \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$

PartieI

1. $\displaystyle \lim_{n \to ++\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to ++\infty} |q| \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^{\beta} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha} = |q| > 1$ alors $\sum u_n$ est divergente selon la régle de Dalembert

2. Dans cette question on suppose que $q = 1$ donc $u_n = \dfrac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}}$

   (a) $\sum u_n$ série de Bertrand $\sum u_n\ CV \iff \alpha > 1\ ou\ (\alpha = 1\ et\ \beta < -1)$
   Voir cours

   (b) On suppose que $\beta = 0$ donc $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$

      i. Voir cours $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ est convergente$\Leftrightarrow \alpha > 1$

      La fonction $\zeta :\ ]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \alpha \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ s'appelle fonction Zéta de REIMANN

      ii. $\forall \alpha > 1$,t$\to \frac{1}{t^{\alpha}}$ est continue décroissante positive sur $[1, +\infty[$ et$\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ CV.D'aprés comparaison série intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} dt \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} dt$ donc $\dfrac{1}{(\alpha - 1) 2^{\alpha - 1}} \leq \zeta(\alpha) - 1 \leq \dfrac{1}{\alpha - 1}$ *ainsi* $1 \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$

      iii. $\forall n \geq 2, \leq \zeta(n) \leq 1 + \dfrac{1}{n-1}$ donc $0 \leq \dfrac{\zeta(n) - 1}{n} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$
      $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ CV donc $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n) - 1}{n} CV$ (Thé de comparaison)

      iv. considérant la suite double $(n^{-m})_{n \geq 2, m \geq 2}$
      Soit $n \geq 2$ fixé
      $\displaystyle\sum_{n \geq 2} n^{-m}$ est une série géométrique de raison $01 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$ donc CV

      Soit $A_n = \displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^m = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

      $\displaystyle\sum_{n \geq 2} A_n$ CV ainsi $(n^{-m})_{n \geq 2, m \geq 2}$ est sommable et on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^m = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$

      $\displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} = \sum_{m=2}^{+\infty} (\zeta(m) - 1)$ Ainsi $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = 1$

v. $\left(\dfrac{1}{(nm)^{\alpha}}\right)_{n\geq 1, m\geq 1}$ est sommable $\forall\alpha > 1$ comme produit de deux suites sommables

Pour $n \geq 1$ on pose $J_n = \left\{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 / pq = n\right\}.(J_n)_{n\geq 1}$ est une partition de$(\mathbb{N}^*)^2$ donc

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(nm)^{\alpha}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in J_n}\frac{1}{(nm)^{\alpha}}\right)$ d'aprés le théorème de sommation par tranches

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(nm)^{\alpha}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^{\alpha}}\right) = (\zeta(\alpha))^2$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in J_n}\frac{1}{(nm)^{\alpha}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left(\sum_{(p,q)\in J_n}1\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cardJ_n}{n^{\alpha}}$

$J_n = \left\{\left(p, \frac{n}{p}\right) \in (\mathbb{N}^*)^2 / p \text{ divise } n\right\}$ $card(J_n) = d(n)$ Où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n *ainsi* $\displaystyle(\zeta(\alpha))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d(n)}{n^{\alpha}}$

vi. $\forall\alpha > 1$,t$\rightarrow \frac{1}{t^{\alpha}}$ est continue décroissante positive sur $[1, +\infty[$ et$\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ CV.D'aprés comparaison série intégrale

$\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \leq \int_{n}^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}dt$ donc

$\displaystyle\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ ainsi $R_{\ n}(\alpha) \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$,

$\displaystyle R_{\ n}(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$

(c) On suppose $\alpha = 1$, *on pose* $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} - \ln n$

i. Par comparaison à une intégrale $\forall k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}dt$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt \leq 0$

$\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k} \leq \int_1^{n}\frac{1}{t}dt$ et par suite $\displaystyle 0 < \ 1 - \ln 2 - \ln n + \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} - \ln n \leq 1$

Donc décroissante nimorée par $1 - \ln 2$ donc elle converge sa limite notée $\gamma \in]1 - \ln 2, 1[\subset]0, 1[$

ii. On cosidère la suite $b_n = a_n - \gamma$

A. $c_n = b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1)$

$c_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim \frac{-1}{2n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 2}c_n$ est convergente

B. $c_n \sim \frac{-1}{2n^2}$ d'aprés le théorème de sommation des relations de comparaison ,

$\displaystyle\sum_{k=n1}^{+\infty}c_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{-1}{2k^2} = \frac{-1}{2}R_{\ n}(2)\,.\sum_{k=n}^{+\infty}c_k = \left(\lim_{k\to+\infty}c_k\right) - c_n = 0 - c_n, R_{\ n}(2) \sim \frac{1}{n}$ ainsi

$c_n \sim \frac{1}{2n}$ et par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

(d) On suppose que $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ donc $u_n = \dfrac{1}{n\ln n}; n \geq 2$

,t$\rightarrow \frac{1}{t\ln t}$ est continue décroissante positive sur $[2,+\infty[$ et$\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n\ln n}$ DV

.D'aprés comparaison série intégrale

$\sum\limits_{k=2}^{k=n}\dfrac{1}{k\ln k}\sim\int_2^n\frac{1}{t\ln t}dt=\ln(\ln(n))-\ln(\ln(2))$ ainsi

$\sum\limits_{k=2}^{k=n}\dfrac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln(n))$

Partie II

Dans cette partie on suppose que $|q|<1$

1. $\lim\limits_{n\to++\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to++\infty}|q|\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\beta}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}=|q|<1$ alors $\sum u_n$ est convergente selon la régle de Dalembert

   Dans la suite de cette partie on suppose que $\beta=0$ donc u$_n=u_n=\dfrac{q^n}{n^\alpha}$

   La somme de $\sum u_n$ est notée $S(\alpha,q)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_k$ et la suite des sommes partielles $S_n(\alpha,q)=\sum\limits_{k=1}^{k=n}u_k$

2. $S_n(0,q)=\sum\limits_{k=1}^{k=n}q^k=\dfrac{q(1-q^n)}{1-q}$et $S(0,q)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}q^k=\dfrac{q}{1-q}$

3. $S_n(-1,q)=\sum\limits_{k=1}^{k=n}kq^k=q+\sum\limits_{k=2}^{k=n}kq^k=q+\sum\limits_{k=2}^{k=n}k\left(S_k(0,q)-S_{k-1}(0,q)\right)$

   $=q+\sum\limits_{k=2}^{k=n}kS_k(0,q)-\sum\limits_{k=2}^{k=n}kS_{k-1}(0,q)=q+\sum\limits_{k=2}^{k=n}kS_k(0,q)-\sum\limits_{k=2}^{k=n-1}(k+1)S_k(0,q)$

   $S_n(-1,q)=q+\sum\limits_{k=2}^{k=n}kS_k(0,q)-\sum\limits_{k=2}^{k=n-1}kS_k(0,q)-\sum\limits_{k=2}^{k=n-1}S_k(0,q)$

   $=q+nS_n(0,q)-\sum\limits_{k=2}^{k=n-1}S_k(0,q)=(n+1)S_n(0,q)-\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}S_k(0,q)\right)$

   $S(-1,q)=\lim S_n(-1,q)=\lim\left[(n+1)S_n(0,q)-\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}S_k(0,q)\right)\right]$

   $(n+1)S_n(0,q)-\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}S_k(0,q)\right)=(n+1)\dfrac{q(1-q^n)}{1-q}-\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{q\left(1-q^k\right)}{1-q}$

   $(n+1)\dfrac{q(1-q^n)}{1-q}-\dfrac{nq}{1-q}+\dfrac{1}{1-q}\sum\limits_{k=1}^{k=n}q^k=-\dfrac{(n+1)q^{n+1}}{1-q}+\dfrac{q(1-q^n)}{(1-q)^2}$

   On a $\lim\ (n+1)q^{n+1}=0,\lim q^n=0$

   donc$S(-1,q)=\lim S_n(-1,q)=\dfrac{q}{(1-q)^2}$

4. $\sum_{n=1}^{k=n} \frac{q^k}{k} = \sum_{n=1}^{k=n} \int_0^q t^{k-1} dt = \int_0^q \left(\sum_{n=1}^{k=n} t^{k-1} \right) dt = \int_0^q \left(\sum_{n=0}^{k=n-1} t^k \right) dt = \int_0^q \frac{1-t^n}{1-t} dt$

$\sum_{n=1}^{k=n} \frac{q^k}{k} = \int_0^q \frac{1}{1-t} dt - \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-q) - \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt$

On a $0 \leq t \leq q$ donc $0 < 1-a \leq 1-t$ ainssi $\left| \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \int_0^{|q|} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{|q|^{n+1}}{(1-q)[n+1]}$

$S(-1,q) = \lim \sum_{n=1}^{k=n} \frac{q^k}{k} = \lim \left(-\ln(1-q) - \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt \right) = -\ln(1-q)$

5. $\forall q \in]0,1[, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{q^k}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{q^k}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{(1-q)(n+1)^2}$

$\left| S\left(2, \frac{1}{2}\right) - S_n\left(2, \frac{1}{2}\right) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k} \leq \frac{1}{2^n (n+1)^2}$

On choisit le plus petit entier n vérifiant $\frac{1}{2^n (n+1)^2} \leq \frac{1}{1000}$ on trouve n=5

Ainsi $S\left(2, \frac{1}{2}\right) \backsimeq S_5\left(2, \frac{1}{2}\right) \backsimeq 1,377$

Partie III

On suppose que $q = -1, \beta \in \mathbb{R}$ donc $u_n = \frac{(-1)^n (\ln n)^\beta}{n^\alpha}$

1. ♡Si $\alpha < 0$ alors $\frac{(-1)^n (\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ DVG

   ♡Si $\alpha = 0$ alors $u_n = (-1)^n (\ln n)^\beta, \sum u_n$ est une série alternée

   (a) $\rightarrow$ Si $\beta \geq 0$, u_n ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ DVG

   $\rightarrow$ Si $\beta < 0$ $\sum u_n$ est une série alternée vérifiant CSSA donc CV

   ♡Si $\alpha > 0, \sum u_n$ est une série alternée vérifiant CSSA à partir d'un certain rng donc CV ainsi

$$\left(\sum u_n converge\right) \Longleftrightarrow ((\alpha > 0 \text{ et } \beta \in \mathbb{R}) \text{ ou } (\alpha = 0 \text{ et } \beta < 0))$$

2. On suppose que $\alpha = \frac{1}{2}, u_n = \frac{(-1)^k (\ln n)^\beta}{\sqrt{n}}$

   $\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| \left| \sum_{k=1n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

   On choisit un entier p tel que $\frac{1}{\sqrt{p+1}} \leq 10^{-2}$ donc p=9999

   $\sum_{k=1}^{9999} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ soit une valeur approchée de la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ à 10^{-2} près.

   Mauvaise approximation

Voir cours sur les intégrales à parametre

1. Calcul de $\zeta(2)$

   On considère pour $n \geq 1$ la fonction P_n à valeurs complexes définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\left(\left(\sqrt{x}+i\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{x}-i\right)^{2n+1}\right)$$

   (a) Par la formule du binôme on a

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{k=2n+1} C_{2n+1}^{k} i^k \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{k=2n+1} C_{2n+1}^{k}(-i)^k\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1-k}\right)$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{k=2n+1} C_{2n+1}^{k}\left(1-(-1)^k\right) i^k \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1-k}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{k=n} 2C_{2n+1}^{2k+1} i^{2k+1}\left(\sqrt{x}\right)^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{k=n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k x^{n-k} \text{ est bien polynômiale}$$

   (b) Soit x>0 $P_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \left(\sqrt{x}+i\right)^{2n+1} = \left(\sqrt{x}-i\right)^{2n+1} \Longleftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}+i}{\sqrt{x}-i}\right)^{2n+1} = 1$

$$\frac{\sqrt{x}+i}{\sqrt{x}-i} = e^{\frac{2i(k\pi)}{2n+1}}, 1 \leq k \leq 2n \quad \text{donc } \sqrt{x} = i\frac{e^{\frac{2i(k\pi)}{2n+1}}+1}{e^{\frac{2i(k\pi)}{2n+1}}-1}, 1 \leq k \leq 2n$$

$$\sqrt{x} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, 1 \leq k \leq n \text{ donc } x = \left(\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2, 1 \leq k \leq n$$

   les racines de P_n sont les $x_k = \left(\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2, 1 \leq k \leq n$

   (c) $P_n = \sum_{k=0}^{k=n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{n-k} = C_{2n+1}^{1}X^n - C_{2n+1}^{3}X^{n-1} + ... + (-1)^n$

   $P_n = C_{2n+1}^{1}\prod_{k=1}^{k=n}(X-x_k)$, d'aprés les relations entre coefficients et racines d'un polynôme

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \cot an^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cot an^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

   (d) la foction sinus est concave sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ donc $\forall t \in]0,\frac{\pi}{2}[, 0 < sint \leq t$ ainsi $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sin(t)}$.

   Cosidérons la fonction f $:[0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, t \to \sin t - t\cos t, f$ est dérivabe et $f\prime(t) = t\sin t \geq$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ donc croissante $,\forall t \in]0,\frac{\pi}{2}[$ f(0) $= 0 \leq f(t)$ donc $\forall t \in]0,\frac{\pi}{2}[, \cot an(t) \leq \frac{1}{t},$

$$\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}[\quad \cot an\left(t\right)\leq \frac{1}{t}\leq \frac{1}{\sin\left(t\right)}$$

(e) On a $\forall 1\leq k\leq n, \alpha_k=\dfrac{k\pi}{2n+1}\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$

donc 0< $\cot an\left(\alpha_k\right)\leq \dfrac{1}{\alpha_k}\leq \dfrac{1}{\sin\left(\alpha_k\right)}$ ainsi

$\left(\cot an\left(\alpha_k\right)\right)^2\leq \dfrac{1}{\alpha_k^2}\leq \dfrac{1}{\left(\sin\left(\alpha_k\right)\right)^2}$ et par suite $\sum\limits_{k=1}^{k=n}\left(\cot an\left(\alpha_k\right)\right)^2\leq \sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\alpha_k^2}\leq \sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\left(\sin\left(\alpha_k\right)\right)^2}$ ie

$\dfrac{n\left(2n-1\right)}{3}\leq \dfrac{\left(2n+1\right)^2}{\pi^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}\right)\leq \dfrac{2n\left(n+1\right)}{3}$ ainsi $\dfrac{2\pi^2 n\left(2n-1\right)}{3\left(2n+1\right)^2}\leq \sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}\leq \dfrac{2\pi^2 n\left(n+1\right)}{3\left(2n+1\right)^2}$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

Ainsi $\zeta\left(2\right)=\dfrac{\pi^2}{6}$

2. On considère $\Omega=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\ /\ x>1\right\}$

(a) Considérons p :$\underset{(x,y)\to x}{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}$

p est linèaire et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie donc continue sur $\mathbb{R}^2$
$\Omega=p^{-1}\left(]1,+\infty[\right)$ et $]1,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ d'aprés la caractérisation globale de la continuité Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
Soit $\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\in\Omega$,soit t$\in\left[0,1\right]$ $\left(1-t\right)\left(x,y\right)+t\left(x',y'\right)=\left(\left(1-t\right)x+tx',\left(1-t\right)y+ty'\right)$
$\left(1-t\right)x+tx'>1$ cae x>1,x'>1, $1-t$ et t ne s'annule pas simultanément
$\left(1-t\right)\left(x,y\right)+t\left(x',y'\right)\in\Omega$ ainsi Ω est un convexe de $\mathbb{R}^2$ donc Ω est un connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$

(b) Soit $\left(x,y\right)\in\not\leq$ $\dfrac{1}{n^{x+iy}}=\dfrac{1}{n^x}e^{-iy\ln n}$

i. $\left|\dfrac{1}{n^{x+iy}}\right|=\dfrac{1}{n^x}$,x>1 *donc* $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^x}$ ainsi $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^{x+iy}}$ CVA

ii. Soit $\digamma:\Omega\to\mathbb{C},\ \left(x,y\right)\to\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{x+iy}}$

Soit x>1 fixé considérons $\digamma_x$:$\mathbb{R}\to\mathbb{C}, y\to\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{x+iy}}$

On pose $u_n\left(y\right)=\dfrac{1}{n^{x+iy}}=\dfrac{1}{n^x}e^{-iy\ln n}$,u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$\forall y\in\mathbb{R}\ u_n'\left(y\right)=\frac{-i\ln n}{n^{x+iy}}$ et $\left|u_n'\left(y\right)\right|=\dfrac{\ln n}{n^x}=o\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$ avec $1<a<x$ donc $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{\ln n}{n^x}$ CV ainsi

$\sum\limits_{n\geq1}u_n'$ CVN donc CVU sur $\mathbb{R}$ $\digamma_x$est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $\digamma_x'\left(y\right)=-i\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\ln n}{n^{x+iy}}$

Ainsi $\frac{\partial\digamma}{\partial y}$ exist et $\forall\left(x,y\right)\in\Omega, \frac{\partial\digamma}{\partial y}\left(x,y\right)=-i\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\ln n}{n^{x+iy}}$

$(x,y) \to \dfrac{\ln n}{n^{x+iy}}$ est continue sur Ω et$\forall a>1$ et $\forall (x,y) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}$ $\left|\dfrac{\ln n}{n^{x+iy}}\right| = \dfrac{1}{n^x} \leq \dfrac{1}{n^a}$

donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{\ln n}{n^{x+iy}}$ CVN sur $\frac{\partial F}{\partial y}$ est continue sur Ω

Soit y$\in\mathbb{R}$ fixé considérons $F_y :]1,+\infty[\to \mathbb{C}, x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{x+iy}}$

On pose $v_n(x) = \dfrac{1}{n^{x+iy}} = \dfrac{1}{n^x} e^{-iy\ln n}$,v_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$

$\forall x \in]1,+\infty[, v_n'(x) = \frac{-\ln n}{n^{x+iy}}$

Soi a>1 ,$\forall x \geq a, |v_n'(x)| = \dfrac{\ln n}{n^x} \leq \dfrac{\ln n}{n^a}$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{\ln n}{n^a}$ CV ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n'$ CVN donc CVU sur $[a,+\infty[$ $F_y$est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$ $F_y'(s) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^{x+iy}}$

Ainsi $\frac{\partial F}{\partial x}$ existe et $\forall (x,y) \in \Omega, \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\dfrac{\ln n}{n^{x+iy}} = i\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$

Ainsi $\frac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur Ω d'où F admet des fonctions dérivées partielles premières continues sur Ω

F est de classe C^1 sur Ω

PartieV

On note F la fonction zeta de Riemann alternée définie par:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée

   Si x$\leq$ 0 la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ ne tend pas vers 0 donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ DVG

   Si x>0 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée vérifiant CSSA donc elle CV

   Ainsi le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_*^+$

2. $\forall$x>0 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée vérifiant CSSA donc $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right| \leq \dfrac{1}{(n+)^x}$ Ainsi $\forall$x$\geq$ 2,$\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right| \leq \dfrac{1}{(n+)^2}$

   Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ CVU sur [2,+∞[de plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \begin{cases} 1 \text{ si n=1} \\ 0 \text{ si n>1} \end{cases}$

   D'aprés le théorème de double limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$

3. Démontrer que F est de classe C^∞ sur I et donner une expression de ses dérivées successives.

4. Démontrer que:
$$\forall x > 1 \quad F(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)$$

5. Pour tout $x > 0$; on pose $r_n(x) = \sum\limits_{k==n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^x}$

   (a) $r_n(x)$ existe car c'est le reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial

   (b) $2r_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x} + \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^x} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^x}$

   Par changement d'indice $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^x} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^x}$

   $2r_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^x} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^x} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\dfrac{1}{k^x} - \dfrac{1}{(k+1)^x}\right)$

   (c) On a d'aprés ce qui précéde

   $2r_n(x) = \underbrace{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x}}_{=u_n} + \underbrace{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\dfrac{1}{k^x} - \dfrac{1}{(k+1)^x}\right)}_{=v_n}$ donc $2r_n(x) = u_n + v_n$

   On pose $a_k = \dfrac{1}{k^x} - \dfrac{1}{(k+1)^x}$ >0 *donc* $\sum\limits_{k\geq 1} (-1)^k a_k$ série altérnée

   On a t→ $\dfrac{1}{t^x}$ est convexe sur]0,+∞[et $k-1 < k < k+1$ d"aprés la carctérisation de la convexité à l'aide des pentes on aura $a_{k+1} \leq a_k$
   de plus (a_k) CV vers 0 ainsi $\sum\limits_{k\geq 1} (-1)^k a_k$ série altérnée vérifiant CSSA donc CV et ,$|v_n| =$
   $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^x} - \dfrac{1}{(n+2)^x}$
   $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{(n+1)^x} - \dfrac{1}{(n+2)^x}$ est CV car la suite $\left(\dfrac{1}{(n+1)^x}\right)$ est CV et par suite $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ CV
   ∀x>0 $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x}$ est une série alternée vérifiant CSSAdonc CV
   ainsi $\sum\limits_{n\geq 0} r_n(x)$ est convergente comme somme de deux séries CV

   (d) Soit x>0,On a d'aprés ce qui précéde ona $2r_0(x) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\dfrac{1}{k^x} - \dfrac{1}{(k+1)^x}\right)$

   On a, $\mathrm{r}_0(x) = -F(x)$ et $\left(\dfrac{1}{k^x} - \dfrac{1}{(k+1)^x}\right) = x\int_k^{k+1} \dfrac{dt}{t^{x+1}}$

   ainsi $2r_0(x) = -1 + x\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \int_k^{k+1} \dfrac{dt}{t^{x+1}}$ ie - $F(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \dfrac{dt}{t^{x+1}}$

   D'où $\forall x > 0 \quad F(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \dfrac{dt}{t^{x+1}}$

(e) $\forall x>0\quad \left|F(x)-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{x}{2}\right| \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}\right|$

or $\sum_{n\geq1}(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$ est une série alternée vérifiant CSSA donc

$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}\right| \leq \int_1^2\dfrac{dt}{t^{x+1}} \leq 1$ ainsi $\left|F(x)-\dfrac{1}{2}\right| \leq \left|\dfrac{x}{2}\right|$

Ainsi $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\dfrac{1}{2}$ F admet un prolongement par continuité $\widetilde{F}$ en 0^+

(f) $\sum_{n\geq1}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est une série alternée vérifiant CSSA donc CV

On note $S_n=\sum_{n=1}^{k=n}(-1)^k\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, $S=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

on a donc (S_n) CV vers S et par suite la suite (S_{2n}) CV vers S

$$S_{2n}=\sum_{n=1}^{k=2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{n=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\sum_{n=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{k=n}\left(\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)-\ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)\prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2k-1}{2k}\right)\right)$$

On pose $P_n=\prod_{k=1}^{k=n}\left[\left(\dfrac{2k+1}{2k}\right)\left(\dfrac{2k-1}{2k}\right)\right]$ on va faire apparaitre les factoriels donc $P_n=\dfrac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4}$, on rappelle la formule de stirling $n!\sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$

ainsi $P_n\sim\dfrac{e^{-4n}(2n)^{4n}4\pi n}{2^{4n}e^{-4n}n^{4n}4\pi^2n^2}\times 2n\sim\dfrac{2}{\pi}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(P_n)=\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$, *ainsi* $\sum_{=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

(g) soit $x>0$, $\dfrac{\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(0)}{x}=-\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$

On pose $w_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{2}\int_n^{n+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}=\frac{(-1)^{n+1}}{2x}\left(\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}\right)$, $x>0$

$\sum_{n\geq1}w_n(x)$ est une série alternée vérifiant CSSA donc

$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}w_k(x)\right|\leq|w_{n+1}(x)|=\frac{1}{2}\int_{n+1}^{n+2}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$

or $t\longrightarrow\dfrac{1}{t^{x+1}}$ est décroissante donc $\frac{1}{2}\int_{n+1}^{n+2}\dfrac{dt}{t^{x+1}}\leq\dfrac{1}{2(n+1)^{x+1}}$

Donc $\forall x>0$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}w_k(x)\right|\leq\dfrac{1}{2(n+1)^{x+1}}\leq\dfrac{1}{2(n+1)}$

ainsi $\sum_{n\geq1}w_n$ CVU sur]0,+∞[de plus $\lim\limits_{x\to+0^+}w_n(x)=\lim\limits_{x\to+0^+}\frac{(-1)^{n+1}}{2x}\left(\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}\right)$

$= \underset{x \to +0^+}{lim} \frac{(-1)^{n+1}}{2x} \left(e^{-x \ln n} - e^{-x \ln(n+1)} \right)$

$\underset{x \to +0^+}{lim} w_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left(-\ln n + \ln(n+1) \right) = \frac{(-1)^n}{2} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

D'aprés le théorème de double limite $\underset{x \to +0^+}{lim} \dfrac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(0)}{x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \underset{x \to +0^+}{lim} w_n(x)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

$\widetilde{F}$ est dérivable en 0^+ et $\widetilde{F}'(0) = \frac{1}{2} \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$