$RhanamiBrahim$ 2019 − 2020

$Correction$

$PartieI$

E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n ,u ev dux éléments de $\mathcal{L}(E)$ /
uov=you
1) vvoir cours
2)Dans cette question on suppose que u admet n valeurs propres
a)u admet n valeurs propres donc χ_u est sindé sur K à racines simples puisque d'aprés Cayley-Hamilton χ_u est annulateur de u donc u est diagonalisable
b)Soit $(e_1, ..., e_n)$ base diagonalisant u , $\lambda_1, ..., \lambda_n$ valurs propres associées à $e_1, ..., e_n$ respctivemnt .On $a\ v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)) = vect(e_i)$,$1 \leq i \leq n$
donc $\exists \mu_i / v(e_i) = \mu_i e_i$ ainsi $(e_1, ..., e_n)$ base diagonalise v
3)On suppose que u et v sont diagonalisables .On pose $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et $Sp(v) = \{\mu_1, ..., \mu_r\}$ $\mathrm{E}_{\lambda_i}(u), 1 \leq i \leq p$ $\left(\text{ resp } E_{\mu_i}(u), 1 \leq i \leq r\right)$ les sous espaces propres de u (rerp v) et v_i l'endomorphisme de $\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ induit par v
a)$\mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ est v-stable donc π_{v_i} divise π_v puisque v est diagonalisable alors $\pi_v$est sindé sur K à racines simples donc π_{v_i} aussi ainsi v_i est diagonalisable
b)v_i est diagonalisable donc $E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus\limits_{\mu_j \in Sp(v_i)} E_{\mu_i}(v_j)$

On a $E_{\mu_i}(v_j) = E_{\lambda_i}(u) \cap E_{\mu_j}(v) = \begin{cases} \{0\}\ si\ \mu_j \notin Sp(v_i) \\ non \text{ nul si } \mu_j \in Sp(v_i) \end{cases}$

Ainsi $E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus\limits_{1 \leq j \leq r} E_{\lambda_i}(u) \cap E_{\mu_j}(v)$

c)On a u est diagonalisable donc

$$E = \bigoplus_{1 \leq j \leq r} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \left(\bigoplus_{1 \leq j \leq r} E_{\lambda_i}(u) \cap E_{\mu_j}(v) \right) = \bigoplus_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r} E_{\lambda_i}(u) \cap E_{\mu_j}(v)$$

d)v_i,$1 \leq i \leq p$,est diagonalisable soit B_i base de $E_{\lambda_i}(u)$ diagonalisant v_i
or $E = \bigoplus\limits_{1 \leq j \leq r} E_{\lambda_i}(u)\ donc\ B = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq p} B_i$ base de E diagonalisant v

4)$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

A est symétrique réelle donc orthogonaleme, semblable à une matrice orthogonale

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \longleftarrow L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & X-1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A \overset{C_{21} \longleftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 1 & X-3 & 1 \\ -1 & 2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 5X + 4) = (X-1)^2 (X-4)$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{1, 4\}$

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_4(A) \Longleftrightarrow AX = 4X \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = -b \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$E_4(A) = vect \varepsilon_1, \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,on a $\mathrm{B}\varepsilon_1 = -\varepsilon_1$

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ -4 & X-1 & 2 \\ -2 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \longleftarrow L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -X-1 \\ -4 & X-1 & 2 \\ -2 & -1 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$\chi_B \overset{C_3 \longleftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 \\ -4 & X-1 & -2 \\ -2 & -1 & X \end{vmatrix} = (X+1)\left(X^2 - X - 2\right) = (X+1)^2 (X-2)$$

$\text{Sp}(B) = \{-1,,2\}, E_2(B) = vect\varepsilon_2, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $A\varepsilon_2 = \varepsilon_2$

- Calculons $E_{-1}(B) \cap E_1(A)$

  On trouve $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0Ansi \end{cases}$ ainsi

  $E_{-1}(B) \cap E_1(A) = vect\varepsilon_3, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  AB=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

BA=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

On pose P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = diag(4,1,1), et\ P^{-1}BP = diag(-1,2,-1)$

5)Application

u et v sont diagonalisables et $uov = vou$

u et v sont diagonalisables et $uov = vou$ donc il existe une base

$c = (e_1, ..., e_n)$ diagonalisant u et v

$A = mat(u,c) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n), B = mat(v,c) = diag(\mu_1, ..., \mu_n)$

$\alpha A + \beta B = mat(\alpha u + \beta v, c) = diag(\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, ..., \alpha\lambda_n + \beta\mu_n)$

$AB = mat(uov, c) = iag(\lambda_1\mu_1, ..., \lambda_n\mu_n)$

$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \alpha u + \beta v$ et uov sont diagonalisables