Correction

E etant un $\mathbb{C}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$
Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier k non nul tel que $f^k = 0$. $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ f^k = 0\right\}$ s'appelle indice de nilpotence de f, on a donc $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$

$\boxed{A}$ - Soit f un endomorphisme de E

1. x$\in \ker f^k \Longrightarrow f^k(x) = 0 \Longrightarrow f\left(f^k(x)\right) = f(0) \Longrightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Longrightarrow$x$\in \ker f^{k+1}$ *Ainsi* $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$ d'où la suite $\left(ker f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante

2. On pose $d_k = \dim\ker f^k$ la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante puisqu elle majorée par dimE donc stationnaire d'où l'existence de $j \in \mathbb{N}$ tel que $d_k = d_j \ \forall k \geq j$

   On a$\forall k \geq j \ d_k = d_j$ et $\ker f^j \subset \ker f^k$ donc $\ker f^j = \ker f^{j+1}$ et $\forall k \geq j$

   $\ker f^j = \ker f^k$

3. *Soit* $k \in \mathbb{N}$ $\quad y \in f\left(\ker f^{k+1}\right) \Longrightarrow \exists x \in \ker f^{k+1} \ / y = f(x)$

   Ainsi $f^k(y) = f^{k+1}(x) = 0$ d'où y$\in \ker f^k$ et parsuite $f\left(\ker f^{k+1}\right) \subset \ker f^k$

4. Soit F un sous espace vectoriel de E.On pose $u = f_{|F}$

   x$\in \ker u \Longleftrightarrow u(x) = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in F \\ x \in \ker f \end{array}\right. \Longleftrightarrow x \in \ker f \cap F$

   $\ker u = \ker f \cap F$

5. Soit $u = f_{|\ker f^{k+1}}$ d'aprés le théorème du rang $\dim\ker f^{k+1} = \dim\ker u + rgu$

   On a $\ker u = \ker f \cap \ker f^{k+1} = \ker f$ on a aussi.$f\left(\ker f^{k+1}\right) \subset \ker f^k$ donc $rgu \leq \dim\ker f^k$ ainsi $\dim\ker f^{k+1} \leq \dim\ker f^k + \dim\ker f$

   $\forall k \in \mathbb{N} \quad \dim\ker f^{k+1} \leq \dim\ker f^k + \dim\ker f$

$\boxed{B}$ - Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice p

1. On a $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ *ainssi* π_f divise X^p *or* X^{p-1} n'est pas annulateur de f Ainsi $\pi_f = X^p$ le spectre de f est l'ensemble des racines de π_f donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(f) = \{0\}$

2. On a $(deg \ \pi_f) \leq deg \ \chi_f$ =n ainsi $p \leq n$

   $f^n = f^p o f^{n-p} = 0$

3. π_f annulateur sciné sur $\mathbb{C}$ f est trigonalisable

4. f diagonalisable$\Longleftrightarrow$ π_f sciné sur$\mathbb{K}$à racines simples $\Longleftrightarrow p = 1 \Longleftrightarrow f = 0$

5. On suppose que le rang de f est egal è $n-1$

   (a) Montrer que la suite $\left(ker f^k\right)_{0\leq k\leq p}$ est strictement croissante

   (b) $f^{p-1} \neq 0$ donc $\exists x_0 \in E \ / \ f^{p-1}(x_0) \neq 0$
   Soit $0 \leq k \leq p-1$ *On pose* $y = f^{p-1}(x_0)$ on a $f^{k+1}(y) = f^p(x_0) = 0$ *et* $f^k(y) = f^{p-1}(x_0) \neq 0$ ainsi $y \in ker f^{k+1}$ mais $y \notin ker f^k$ d'où $\ker f^k$ est strictement inclus dans $ker f^{k+1}$

(c) On procéde par récurence fini
Si k =0 $\ker f^0 = \ker id_E = \{0\}$ $\dim \ker f^0 =$
Soit $k \in \{0,1,..,p-1\}$ supposuns que $\dim\ker f^k = k$
On a $\dim\ker f^k < \dim\ker f^{k+1} et$ d'aprés la question A-5 $\dim\ker f^{k+1} \leq \dim\ker f^k + \dim\ker f$
Donc $\dim\ker f^k < \dim\ker f^{k+1} \leq \dim\ker f^k + \dim\ker f$
le rang de f est egal è $n-1$ d'aprés le théorème du rang $\dim\ker f = 1$
Ainsi $\dim\ker f^k < \dim\ker f^{k+1} \leq \dim\ker f^k + 1$ d'où $\dim\ker f^{k+1} = k+1$
$\forall k \in \{0,1,..,p\}$ $\dim\ker f^k = k$
On a $f^p = 0$ donc $\ker f^p = E$ $alors\ p = n$

(d) Soit F un sous espace vectoriel de E,de dimension k stable par f
Soit u l'endomorphisme de F induit par f.
f étant nilpotent $donc u$ aussi puisque $dim F = k$ donc $u^k = 0$

(e) $\forall\ k \in \{0,1,..,n\}$ $\ker f^k$ stablepar f car $f^k o f = f o f^k$ et $\forall k \in \{0,1,..,p\}$ $\dim\ker f^k = k$
Soit F un sous espace vectoriel de E,de dimension k stable par f
Soit u l'endomorphisme de F induit par $f.on\ a$ $u^k = 0$
$\forall\ x \in F$ $u^k(x) = 0 = f^k(x) = 0$ ainsi x$\in \ker f^k$ et par suite F$\subset \ker f^k$
Or $\dim\ker f^k = k = \dim F$ donc $\ker f^k = F$
Il ya n+1 sous espaces de E stables par f et qu'il s'agit des $\ker f^k$ où $k \in \{0,1,..,n\}$

(f) $\forall k \in \{0,1,..,n\}$ f^n $= f^k o f^{n-k}$ =0 $ainsi \operatorname{Im} f^{n-k} \subset \ker f^k$ d'aprés le théorème du rang $\operatorname{Im} f^{n-k} = n - \dim\ker f^{n-k} = n-(n-k) = k$
D'où $\operatorname{Im} f^{n-k} = \ker f^k$

6. Dans cette question on suppose que u$\in L(E)$ est nilpotent d'indice n

(a) On a $u^n = 0$ et u$^{n-1} \neq 0 =$ donc $\exists x_0 \in E\ /\ u^{n-1}(x_0) \neq 0$
Soit $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0$
Supposons que $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \neq (0,0,...,0)$
considérons $s = min\{k \in \{0,1,..,n-1\}\ /\alpha_k \neq 0\}$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha_k u^k(x_0) = \sum_{k=s}^{k=n-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0$ on appique u^{n-1-s}
$\alpha_k u^{n-1}(x_0) = 0$ or $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ donc $\alpha_s = 0\ absurde$
$\forall k \in \{0,1,..,n-1\}$ $\alpha_k = 0$ et par $suite$ $(x_0, u(x_0),, ..., u^{n-1}(x_0))$ est libre son cardinal est $n = dim E$ donc c'est une base de E

(b) $\rightarrow$id$_E C(u)$
$\rightarrow$Soient $,v, w \in \pounds(E)$ $\alpha \in \mathbb{C}$
$uo(\ \alpha v + w) = \alpha\ uov +\ uow = \alpha\ vou +\ wou = uo(\ \alpha v + w)\, ou$
$uo(\ vow) = (uov)\, ow = (vou)\, ow = vo(uow) = vo(wou) = (\ vow)\, ou$
$\alpha v + w \in \pounds(E), vow \in \pounds(E)$
$C(u) = \{v \in \pounds(E)\ /\ uov = vou\}$ est une sous algébre de $\pounds(E)$

(c) Soit $v \in C(u)$ et $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\ /\ v(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_k u^k(x_0)$
On pose $w = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_k u^k$.On a$\forall j \in \{0,1,..,n-1\}$ $w(u^j(x_0))$= $\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_k u^k(u^j(x_0)) = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_k u^{k+j}(x_0) =$ $v(u^j(x_0))$
v et w coincident sur la base $(x_0, u(x_0),, ..., u^{n-1}(x_0))$ donc v=w Ainsi $v = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_k u^k$

(d) On a tout polynôme en u commute avec u donc $vect\left(u^k\right)_{0\leq k\leq n-1} \subset C(u)$
D'aprés la question précédente $vect\left(u^k\right)_{0\leq k\leq n-1} \subset C(u)$
Donc $vect\left(u^k\right)_{0\leq k\leq n-1} = C(u)$
$(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} \alpha_k u^k = 0$ donc $\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0 \quad t\forall k =$ ainsi $\forall k \in \{0, 1, .., n-1\}$
$\alpha_k = 0$ et par *suite* $\left(u^k\right)_{0\leq k\leq n-1}$ est libre alors $\dim C(u) = n \quad \left(u^k\right)_{0\leq k\leq n-1}$une base de $C(u)$

PartieII

1. Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f

   (a) On considère deux vecteurs a et b de $\ker(f - \lambda id_E)$,soit $\mu \in \mathbb{C}$
   Soient $x \in$V $\; donc\ \exists\alpha \in \mathbb{K}\ /\ \ x = \alpha(a + \mu b)$
   $f(x) = \alpha(f(a) + \mu f(b)) = \alpha\lambda(a + \mu b) \in vect(a + \mu b)$
   $vect(a + \mu b)$ est stable par f

   (b) $dim \ker(f - \lambda id_E) \geq 2$ donc il existe a et b de $\ker(f - \lambda id_E)$ avec (a, b) est libre $(vect(a + \mu b))_{\mu\in\mathbb{C}}$
   famille infinie de droites deux à deux distinctes stables par f
   Ainsi il existe une infinité de sous espaces de E stables par f

Dans la suite $f \in \pounds(E)$ tel que

$$sp_{\mathbb{C}}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\} \text{ et } \chi_f = \prod_{k=1}^{k=p}(X - \lambda_k)^{\alpha_k} \text{ où } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \text{ des entiers non nuls}$$

2. On suppose dans cette question que chaque sous espace propre de f est de dimension 1.
Pour tout $k \in \{1, 2, ..., p\}$ on pose $F_k = \ker(f - \lambda_k id_E)^{\alpha_k}$ et $f_k = f_{|F_k}$

   (a) $\forall\ k \in \{1, 2, ..., p\}\ (f - \lambda_k id_E)^{\alpha_k}$ commute avec f donc F_k est stable par f

   (b) $\bigwedge\limits_{1\leq k\leq p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k} = 1$ d'aprés le théorème de décomposition des noyaux

   $$\ker \chi_f(f) = \bigoplus_{k=1}^{k=p} F_k \text{ or selon cayley hamilton } \chi_f(f) = 0 \text{ ainsi } E = \bigoplus_{k=1}^{k=p} F_k$$

   (c) .

      i. $\forall k \in \{1, 2, ..., p\}\ \forall x \in F_k = \ker(f - \lambda_k id_E)^{\alpha_k}\ (f - \lambda_k id_E)^{\alpha_k}(x) = 0$ ainsi $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ annulateur de f_k
      Ainsi $sp_{\mathbb{C}}(f_k) = \{\lambda_k\}, \chi_{f_k} = (X - \lambda_k)^{d_k}$où $d_k = \dim F_k$

      ii. On a $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{k=p} F_k$ et F_k est stable par f donc $\chi_f = \prod\limits_{k=1}^{k=p} \chi_{f_k}$
      Ainsi $\forall k \in \{1, 2, ..., p\} \quad d_k \leq \alpha_k$
      $\deg\chi_f = dimE = \sum\limits_{k=1}^{k=p} \dim F_k = \sum\limits_{k=1}^{k=p} d_k, \deg\chi_f = \sum\limits_{k=1}^{k=p} \deg\chi_{f_k}$
      $\forall k \in \{1, 2, ..., p\}\ d_k = \alpha_k$

   (d) En considérant la restriction notée u_k de $(f - \lambda_k id_E)$ à F_k
   u_k est nilpotent d'indice $d_k = \alpha_k$
   D'aprés I -5-e il existe $1+\alpha_k$ sous espaces de F_k stables par f et qu'il s'agit des $\ker(f - \lambda_k id_E)^j$ où $\ j \in \{0, 1, 2, ..., \alpha_k\}$

(e) $\Longrightarrow$)Soit F un sous espace de E est stable par f
u$_F$ endomorphisme de F induit par f on aχ_{u_F} divise χ_f

$$\chi_{u_F} = \prod_{k=1}^{k=p} (X-\lambda_k)^{\beta_k} \text{ où } \beta_1, \beta_2, ..., \beta_p \text{ des entiers avec } 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$$

$$F = \bigoplus_{k=1}^{k=p} \ker (u_F - \lambda_k id_{F_k})^{\beta_k} \text{ on a } \ker (u_F - \lambda_k id_{F_k})^{\beta_k} = F \cap F_k$$

On pose $G_k = \ker (u_F - \lambda_k id_{F_k})^{\beta_k} = F \cap F_k$ est stable par f comme intersection de sev f-stables

ainsi $F = \bigoplus_{k=1}^{k=p} G_k$

$\Longleftarrow$)Evident car la somme de sev f-stables est f-stable

(f) Tout sev F f-stable s'écrit sous la forme $F = \bigoplus_{k=1}^{k=p} G_k$, G_k est f-stable

Or il y a $1+\alpha_k$ sous espaces de F_k stables par f

Le nombre des sev f-stables est N=$\prod_{k=1}^{k=p} (1+\alpha_k)$

(g) f endomorphismede $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$

$$\text{mat}_{\beta_c}(f) = \text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\chi_f = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -3 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 2 & -2 & X-4 \end{vmatrix}, C_1 \longleftarrow C_1 + C_2, \chi_f = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -3 \\ X-2 & X-1 & -1 \\ 0 & -2 & X-4 \end{vmatrix}$$

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \ \chi_f = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -3 \\ 0 & X & 2 \\ 0 & -2 & X-4 \end{vmatrix} = (X-2)^3$$

Les sous espaces f-stables sont

$\{0\}, \ker (f - id_{\mathbb{R}^3}) = vect\,(1,1,0), \ker (f - id_{\mathbb{R}^3})^2$ plan déquation x-y-zet $\mathbb{R}^3$

3. On suppose dans cette question que f est diagonalisable
Pour tout $k \in \{1, 2, ..., p\}$ on pose $E_k = \ker (f - \lambda_k id_E)$
Soit H un sous espace vectoriel de E stable par $f.f_H$ l'endomorphisme de H induit par f

(a) π_{f_H}divise π_f f est diagonalisable donc π_f est scindé à racines simples donc π_{f_H} aussi d'où f_H est diagonalisable

(b) Pour tout $k \in \{1, 2, ..., p\}$ on pose H$_k = \ker (f_H - \lambda_k id_H) = H \cap E_k$est stable par f comme intersection de sev f-stables ainsi $H = \bigoplus_{k=1}^{k=p} H_k$ où H_k sous espace de E$_k$

(c) D'aprés II-1b si $dim \ker (f - \lambda id_E) \geq 2$ il existe une infinité de sous espaces de E stables par f
une condition nécéssaire et suffisnte pour que le nombre des sous espaces stables par f soit fini est que $\chi_f$soit scindé à racines simples
le nombre N des sous espaces de E stables par f selon

(d) Donner une condition nécéssaire et suffisnte pour que le nombre des sous espaces stables par f soit fini et déterminer dans ce cas le nombre N des sous espaces de E stables par f $[selon I - 2 - f]$ est $N = 2^n$

(e) g endomorphismede $\mathbb{R}^3$ $\text{mat}_{\beta_c}(g)$ =B=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\chi_g = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ -1 & X & -1 \\ -4 & 4 & X-5 \end{vmatrix}, L_1 \longleftarrow L_1 + L_2, \chi_g = \begin{vmatrix} X-2 & X-2 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -4 & 4 & X-5 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \longleftarrow C_2 + C_1 \quad \chi_g = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -1 & X+1 & -1 \\ -4 & 8 & X-5 \end{vmatrix} = (X-2)(X-1)(X-3)$$

χ_f est scindé à racines simples le nombre N des sous espaces de E stables par f est $N = 2^3$
$\text{E}_1(f) = vect(\varepsilon_1)$ avec $\varepsilon_1 = (-1, 1, 2)$
$\text{E}_2(f) = vect(\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_2 = (2, 3, -4)$
$\text{E}_3(f) = vect(\varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_3 = (1, 1, 3)$
Le sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f sont
$\{0\}$,$\text{E}_1(f)$,$\text{E}_2(f)$,$\text{E}_3(f)$,$\text{E}_1(f) \bigoplus \text{E}_2(f)$,$\text{E}_1(f) \bigoplus \text{E}_3(f)$,$\text{E}_2(f) \bigoplus \text{E}_3(f)$ et E

fin