Prépartion CF 2020

Sujet I Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$dt et $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$dt

$I-$ Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$

1. Soit x>0 ,F$(t) = \int \frac{\sin(t)}{t}dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right] - \int \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$

   $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t} = 0, \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$ $,\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}, \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

   Donc t$\to$ $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur]0,+∞[F admet donc une limie finie en 0^+ et en$+\infty$ ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergent

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$

   (a) On pose u$_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ par le chanement de variable x=t-kπ, u$_k = \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(x+k\pi)}{x+k\pi}\right| dx =$ $\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin x}{x+k\pi}\right| dx \geq \dfrac{\int_0^{\pi} \sin x dx}{(k+1)\pi} = \dfrac{2}{(k+1)\pi}$

   $\sum \dfrac{2}{(k+1)\pi}$ DV donc $\sum$ u$_k$ DV et puisque u$_k \geq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

   (b) Soit x$\geq$ 0 ,n partie entière de $\frac{x}{\pi}$ donc $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ ainsi $\sum\limits_{k=0}^{k=n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt =$ $\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \leq \int_0^{x} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ quand x tend vers $+\infty$ n aussi ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^{x} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ =$+\infty$ donc la fonction t$\to$ $\frac{\sin(t)}{t}$ est non intégrable sur$]0,+\infty[$

3. On se propose de calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt.$

   Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt, g : \mathbb{R}^{+*}\times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, (x,t) \to e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}$

   (a) Pour x=0 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ st CV

   Si x>0 $\left|e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq e^{-xt}, t \to e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $t \to e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}$ aussi

   $x \to g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall\ [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in [a,b]$

   $\forall t > 0, \left|e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq e^{-at}, t \to e^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ ainsi f continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

   (b) g est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}\times \mathbb{R}^{+*}$ donc $t \to g(x,t)$ est continue de plus intégrable sur $]0,+\infty[, \forall\ t > 0$, x$\to$ $g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[, \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = e^{-tx}\sin(t)$

   Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$ $,\forall\ x\,[a,b], \forall t > 0, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-ta}$ et a>0 donc

   t$\to$ e^{-ta} est intégtable sur $]0,+\infty[$ ainsi f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$

   $\forall\ x > 0$ $,f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin(t)\,dt$

   (c) $\forall x \geq 1, \forall t > 0, \left|e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq e^{-t}, t \to e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ $\forall t > 0, \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t} = 0$a

   D'aprés le théorème de CVD $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(d) Soit $x > 0$ $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin(t)\,dt = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}dt\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x^2+1}$

f$(x) = \arctan(x) + C, or \underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = 0$ donc $C = -\frac{\pi}{2}$

Ainsi $\forall\ x > 0$, $f(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$

(e) $f(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$ $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

II – Calcul de $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ dt

1. t$\to \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue de limit 1 en 0^+ donc intégrable sur]0,1]

$\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \leq \frac{1}{t^2}$,t$\to \frac{1}{t^2}$ intégrable sur [1,+∞[donc f aussi $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ CV

2. On se propose de calculer$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$

(a) Soit $x \geq 0$,$\left|e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2}, t \to \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue de limit $\frac{1}{2}$ en 0^+ donc intégrable sur]0,1]

0$\leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$,t$\to \frac{2}{t^2}$ intégrable sur [1,+∞[donc $t \to \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $t \to e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}$ aussi

(a) $x \to e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}$est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall$ x$\in \mathbb{R}^+$, $\left|e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2}$

$t \to \frac{1-\cos(t)}{t^2}$est intégrable sur $]0,+\infty[$ ainsi f continue sur $\mathbb{R}^+$

(b) Soit $h : \mathbb{R}^+\times\ \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, (x,t) \to e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}$

h est C^1 sur $\mathbb{R}^+\times\ \mathbb{R}^{+*}$

,$\forall\ t > 0, \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -e^{-tx}\frac{1-\cos(t)}{t}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))\,e^{-tx}$

t$\to \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue de limite nulle en o et egale o$\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ donc intégrable sur $]0,+\infty[$

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$ $\forall\ x \in [a,b], \forall t > 0$, et$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 2e^{-ta}$, a>0 donc t$\to e^{-ta}$ est intégtable sur $]0,+\infty[$ ainsi f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$

$\forall\ x > 0$ $f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\left(\frac{1-\cos(t)}{t}\right)dt$,$f"(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}(1-\cos(t))\,dt$

(c) $\forall$x$\geq 1, \forall t > 0, \left|e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2}, t \to \frac{1-\cos(t)}{t^2}$est intégrable sur $]0,+\infty[$ de plus $\lim_{x\to+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2} = 0$ d'aprés le théorème de CVD $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\forall x \geq 1, \forall t > 0, \left|e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t}\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-t}, t \to \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ de plus $\lim_{x\to+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t} = 0$ d'aprés le théorème de CVD $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

(d) $\forall\ x > 0$,$f"(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}(1-\cos(t))\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt - \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(t)\,dt$

$f"(x) = \frac{1}{x} - Ré\left(\int_0^{+\infty} e^{t(i-x)}dt\right) = \frac{1}{x} - Ré\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

$f'(x) = C + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = C + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ or $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ donc C=0 ainsi $\forall\ x > 0$,$f'(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

(e) On a $\forall\ x>0\ ,f'(x)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$,on intégre par parties on obtient

$\int \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\int\frac{1}{x^2+1}dx = x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\arctan x$

$\forall\ x>0\ ,f(x)=x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\arctan x+C'$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt=C'$

$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2}dt$ on pose u$=\frac{t}{2}$, $C'=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}dt$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$

Aors C'$=\frac{\pi}{2}$ ainsi $\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}}$

SujetII Transformée de Laplace

On considère
E$=\{f\in C(]0,+\infty[,\mathbb{R})\ /\ \forall x>0, t\to f(t)e^{-tx}$ est intégtable sur $]0,+\infty[\}$
Pour tout f on note L(f) la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par
$\forall x>0, L(f)(x)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-tx}dt$
L(f) s'appelle transformée de Laplace de f

PartieI : Proprietés transformée de Laplace d'un élément de E

1. E$=\{f\in C(]0,+\infty[,\mathbb{R})\ /\ \forall x>0, t\to f(t)e^{-tx}$ est intégtable sur $]0,+\infty[\}$

   Il suffit de montrer que E est un sous espace vectoriel de $C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

   E est non vide car la fonction nulle y appartient

   Soient f ,g éléments de E et a $\in\mathbb{R}$

   $af+g\in C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$,soit $x>0$

   On a $t\to f(t)e^{-tx}$,$t\to g(t)e^{-tx}$ sont intégtables sur $]0,+\infty[$ donc t$\to (af+g)(t)e^{-tx}$est intégtable sur $]0,+\infty[$ ainsi $af+g\in E$ d'où E sev de $C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

   L$((af+g))(x)=\int_0^{+\infty}(af+g)(t)e^{-tx}dt=a\int_0^{+\infty}f(t)e^{-tx}dt+\int_0^{+\infty}g(t)e^{-tx}dt=aL(f)(x)+L(g)(x)$

   L$((af+g))=aL(f)+L(g)$ donc L est linèaire de E dans $\mathbb{R}^{]0,+\infty[}$

2. $f\in C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$

   (a) soit $x>0,\forall t>0, |f(t)e^{-tx}|\le|f(t)|$ *or* f est intégtable sur $]0,+\infty[$ d'aprés le théorème de comparaison $t\to f(t)e^{-tx}$ est intégtable sur $]0,+\infty[$ ainsi f$\in E$

   (b) f est intégtable sur $]0,+\infty[$, F primitive de f sur $]0,+\infty[$ *donc* F est bornée ie $\exists M>0/\ \forall t\in\ ]0,+\infty[\ ,|F(t)|\le M$
   soit $x>0, t\to F(t)e^{-tx}$ est continue sur $]0,+\infty[$
   $\forall t\in\ ]0,+\infty[, |F(t)e^{-tx}|\le Me^{-tx}$,t$\to Me^{-tx}$ est intégtable sur $]0,+\infty[$ donc $t\to F(t)e^{-tx}$ aussi et par suite F$\in E$

   (c) f est bornée donc $\exists C>0/\ \forall t\in\ ]0,+\infty[\ ,|f(t)|\le C$
   $\forall t\in\ ]0,+\infty[, |f(t)e^{-tx}|\le Ce^{-tx}$,t$\to Ce^{-tx}$ est intégtable sur $]0,+\infty[$ donc $t\to f(t)e^{-tx}$ aussi et par suite $f\in E$

   (d) Soit $f\in E$, soit $x>0$,Soit $n\in\mathbb{N}$ $t^nf(t)e^{-tx}=\left(f(t)e^{-\frac{tx}{2}}\right)\left(t^ne^{-\frac{tx}{2}}\right)$

   $t\to t^ne^{-\frac{tx}{2}}$ est coninue sur $\mathbb{R}^+$ de limite nulle en $+\infty$ donc elle est bornée et par suite $\exists C'>0$ $/\forall t\in[0,+\infty[\ ,\left|t^ne^{-\frac{tx}{2}}\right|\le C'$

donc $\left|t^n f(t) e^{-tx}\right| \leq C'\left|f(t) e^{-\frac{tx}{2}}\right|$ or $\frac{x}{2}>0$ et f$\in E$ donc t$\rightarrow C'\left|f(t) e^{-\frac{tx}{2}}\right|$ est intégtable sur $]0,+\infty[$ donc $t \rightarrow t^n f(t) e^{-tx}$ aussi d'où $f_n \in E$

3. Si $f \in E$ et $f \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, sa dérivée peut ne pas appartienir à E
   Contre exemple $f(t)=\ln(t)$
   , soit $x>0$, $t \rightarrow e^{-tx}\ln(t)$est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
   $e^{-tx}\ln(t) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$; $e^{-tx}\ln(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puisque t$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégtable sur $]0,1]$ et t$\rightarrow \frac{1}{t^2}$ intégtable sur $[1,+\infty[$ selon Reiemann donc $t \rightarrow e^{-tx}\ln(t)$est intégtable sur $\mathbb{R}^{+*}$
   $t \rightarrow \frac{1}{t}e^{-tx}$ non intégrable sur $]0,1]$ ainsi $f\prime \notin E$

4. Soit$f \in E$; considérons g : $\underset{(x,t)\rightarrow f(t)e^{-tx}}{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$
   $\forall\ x>0$, $t \rightarrow f(t) e^{-tx}$ est continue sur $]0,+\infty[$
   Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$ $\forall\ x\,[a,b], \forall t>0, |g(x,t)| \leq \left|f(t) e^{-ta}\right|$ f$\in E$ et a>0 donc t$\rightarrow \left|f(t) e^{-ta}\right|$ est intégtable sur $]0,+\infty[$ ainsi L(f) est continue sur $]0,+\infty[$

5. Soit$f \in E$; considérons g : $\underset{(x,t)\rightarrow f(t)e^{-tx}}{\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}}$
   $\forall\ t>0$, $t \rightarrow f(t) e^{-tx}$ est de classe C$^\infty$ sur $]0,+\infty[$
   $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = (-1)^k t^k f(t) e^{-tx}, selon$ la question $2-d,, t \rightarrow \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est continue intégtable sur $]0,+\infty[$
   Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$ $\forall\ x\,[a,b], \forall t>0, \left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \left|t^k f(t) e^{-ta}\right|$ $f \in E$ et a>0 donc t$\rightarrow \left|t^k f(t) e^{-ta}\right|$ est intégtable sur $]0,+\infty[$ ainsi$L(f)$ est de classe C^k sur $]0,+\infty[$ ceci $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ainsi $L(f)$ est de classe C$^\infty$ sur $]0,+\infty[$
   $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall\ x>0$,$L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t) e^{-tx} dt$

6. Si $f \in E$ et (x_n) suite d'éléments de [1,+∞[telle que $\underset{n\rightarrow+\infty}{lim}\, x_n = +\infty$

   (a) considérons g$_n$: $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, , t \rightarrow f(t) e^{-x_n t}$,g$_n$ est continue sur $]0,+\infty[$
   $\forall\ t>0$, $\underset{n\rightarrow+\infty}{lim}$ g$_n(t)=0, \forall n \in \mathbb{N}, |g_n(t)| \leq |f(t)| e^{-t}$ et t$\rightarrow \left|f(t) e^{-t}\right|$ est intégtable sur $]0,+\infty[$
   ainsi d'aprés le théorème de convergence dominée
   $\underset{n\rightarrow+\infty}{lim} L(f)(x_n) = \underset{n\rightarrow+\infty}{lim} \int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt = 0$

   (b) Soit une suite (x_n) suite d'éléments de [1,+∞[telle que $\underset{n\rightarrow+\infty}{lim}\, x_n = +\infty$
   selon 6-b on a $\underset{n\rightarrow+\infty}{lim} L(f)(x_n) = 0$ d'aprés le théorème de la caractéisation séqientielle de la limite $\underset{x\rightarrow+\infty}{lim} L(f)(x) = 0$

7. Dans cette question on suppose que f est continue sur $[0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$,f et $f\prime$ sont intégtables sur $]0,+\infty[$

   (a) f est classe C^1 sur $]0,+\infty[$ donc $\forall\ x>0, f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$
   $f\prime$ sont intégtable sur $]0,+\infty[$ donc $\underset{x\rightarrow+\infty}{lim} \int_0^x f'(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ ainsi $\underset{x\rightarrow+\infty}{lim} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ donc f admet une limite finie
   ℓ =$f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ si $\ell \neq 0$ alors f(x) $\underset{+\infty}{\sim}$ ℓ donc f est non intégrable sur $]0,+\infty[$ ce qui est absure donc $\ell = 0$ d'où $limf(x) = 0$

(b) Soit $x > 0$,on intégre par parties $\int_0^y f\ '(t)\, e^{-tx}dt = [f\ \ (t)\, e^{-tx}]_0^y + nx\int_0^y f\ \ (t)\, e^{-tx}dt$ puis on fait tendre y vers $+\infty$ on aura $L(f')(x) = \int_0^{+\infty} f\ '(t)\, e^{-tx}dt = -f(0) + x\int_0^{+\infty} f\ \ (t)\, e^{-tx}dt$ D'où $L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0)$

(c) f' est intégrable sur $]0, +\infty\ [$ donc $f\prime \in E$ ainsi $\underset{x\to+\infty}{lim} L(f')(x) = 0$,d'où $\underset{x\to+\infty}{lim} xL(f)(x) = f(0)$

(d) $f \in E$ et,soit (x_n) suite d'éléments de $]0,+\infty[$ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} x_n = 0$

$x_n L(f)(x_n) = \int_0^{+\infty} x_n f(t)\, e^{-x_n t}dt$ on pose $u = x_n t$ donc $x_n L(f)(x_n) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x_n}\right) e^{-u}du$

considérons h_n : $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, , u \to f\left(\frac{u}{x_n}\right) e^{-u}$,$h_n$ est continue sur $]0, +\infty[$

$\forall\ u > 0$, $\underset{n\to+\infty}{lim} h_n(u) = le^{-u}$ ou l= $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x), \forall n \in \mathbb{N}, |h_n(t)| \leq |fl|\, e^{-t}$ et t$\to$ $|fle^{-t}|$ est intégtable sur $]0, +\infty[$ ainsi d'aprés le théorème de convergence dominée

$\underset{n\to+\infty}{lim} x_n L(f)(x_n) = \underset{n\to+\infty}{lim} \int_0^{+\infty} h_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} le^{-u}du = l$

D'aprés le théorème de la caractéisation séqientielle de la limite

$\underset{x\to 0^+}{lim} xL(f)(x) = l = \underset{x\to+\infty}{lim} f(x)$

PartieII : Détermination de la transformée de Laplace de certaines fonctions

1. $\lozenge$ $f : t \to \cos(t)$ est continue bornéesur $]0, +\infty[$ denc f$\in E$

Soit $x > 0, L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(t)\, dt = Ré\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}dt\right) = Ré\left(\frac{1}{x-i}\right) = Ré\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{x}{x^2+1}$

$\lozenge$ $g : t \to \frac{1-\cos t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et bornée car elle a des limites finies en 0 et $+\infty$ denc g$\in E$

Soit $x > 0, L(g)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos t}{t}dt, L(g)$ est C^1 sur $]0, +\infty[$ donc $(L(g))'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos t)\, d$
$-\int_0^{+\infty} e^{-xt}ct + \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t dt = -\frac{1}{x} + L(f)(x)$

Ainsi $(L(g))'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$ donc $L(g)(x) = -\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$,*or* $\underset{x\to+\infty}{lim} L(g)(x) = 0$ donc C=0

et par suite $L(g)(x) = -\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\lozenge$Soit $x > 0, \int_0^z e^{-xt}\left(\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}du\right) dt$

$$= \left[\frac{e^{-xt}\left(\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}du\right)}{-x}\right]_0^z + \frac{1}{x}\int_0^z e^{-xt}\frac{1-\cos t}{t}dt$$

On a g est continue sur $]0, +\infty[$ et bornée *donc* $\exists M > 0$ tel que $\forall z > 0, |g[tz]| \leq M$ donc $\forall z > 0, \forall x > 0, \left|e^{-xz}\left(\int_0^z \frac{1-\cos u}{u}du\right)\right| \leq Mze^{-xz}$*ainsi*

$\underset{z\to+\infty}{lim} e^{-xz}\left(\int_0^z \frac{1-\cos u}{u}du\right) = 0, \underset{z\to 0}{lim} e^{-xz}\left(\int_0^z \frac{1-\cos u}{u}du\right) = 0$ ainsi $\forall x > 0, L(h)(x) = \frac{1}{x}L(g)(x) = \frac{-1}{x}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

2. Soit $f \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et f est périodique de période T>0

Soit g la fonction définie par g$(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \geq T \\ f(t) \text{ si } 0 \leq t < T \end{cases}$

(a) $f \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et f est périodique de période T>0 donc bornée
g est bornée
g st continue sur $[0, +\infty[-\{T\}$ puisque $f(0) = f(T)$ donc $g \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$
Ainsi f et g sont continues et bornées sur $]0, +\infty[$ donc appartiennent à E

(b) Soit x>0, , $L(f)(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt=\underset{n\to+\infty}{lim}\int_0^{nT} e^{-xt}f(t)\,dt$

$\int_0^{nT} e^{-xt}f(t)\,dt=\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-xt}f(t)\,dt\right)$,on pose u=t-kT donc

$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-xt}f(t)\,dt=\int_0^T e^{-x(u+kT)}f(u+kT)\,du=e^{-xkT}\int_0^T e^{-xu}f(u)\,du$

Ainsi $\int_0^{nT} e^{-xt}f(t)\,dt=\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} e^{-xkT}\right)\int_0^T e^{-xu}f(u)\,du$

$, L(f)(x)=\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-xkT}\right)\int_0^T e^{-xu}f(u)\,du=\dfrac{\int_0^T e^{-xu}f(u)\,du}{1-e^{-xT}}$

$L(g)(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)\,dt=\int_0^T e^{-xt}f(t)\,dt$, Car g(t) $=\begin{cases} 0 \text{ si } t\geq T \\ f(t) \text{ si } 0\leq t<T\end{cases}$ ainsi $\forall x>0$

$, L(f)(x)=\dfrac{L(g)(x)}{1-e^{-xT}}$

(c) $f: t\to|\sin(\pi t)|$ est périodique de période 1 et f(0) = 0

Donc $\forall x>0$, $L(f)(x)=\dfrac{\int_0^1 e^{-xt}|\sin(\pi t)|\,dt}{1-e^{-x}}=\dfrac{\int_0^1 e^{-xt}\sin(\pi t)\,dt}{1-e^{-x}}$

$\int_0^1 e^{-xt}\sin(\pi t)\,dt=Im\left(\int_0^1 e^{(i\pi-x)t}dt\right)=Im\left(\dfrac{e^{i\pi-x}-1}{i\pi-x}\right)$

$\dfrac{e^{i\pi-x}-1}{i\pi-x}=\dfrac{e^{-x}+1}{\pi^2+x^2}(i\pi+x)$ donc $\int_0^1 e^{-xt}\sin(\pi t)\,dt=\dfrac{(e^{-x}+1)\pi}{\pi^2+x^2}$

Ainsi $\forall x>0$, $L(f)(x)=\dfrac{(e^{-x}+1)\pi}{(\pi^2+x^2)(1-e^{-x})}=\dfrac{\pi\coth\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi^2+x^2)}$

3. Soit une série entière $\sum\limits_{n0}^{+\infty} a_n x^n$,de rayon de convergence $R>0$

(si R=$+\infty$, $\frac{1}{R}=0$)

(a) *Soit* $c>\frac{1}{R}$, donc $\frac{1}{c}<R$ donc la suite $\left(\frac{a_n}{c^n}\right)$ converge vers 0 donc elle est bornée et par suite $\exists M>0\ /\ \forall n\in\mathbb{N}$,$|a_n|\leq Mc^n$

(b) Soit $z\in\mathbb{C}$ et z$\neq$ 0 ,*Soit* $c>\frac{1}{R}$, et c>$\frac{1}{|z|}$ d'aprés la question précédente $\exists M>0\ /\ \forall n\in\mathbb{N}$,$|a_n|\leq Mc^n$

$\left|\frac{a_nz^n}{n!}\right|=\left|\frac{a_nz^n}{c^n}\right|\times c^n=\frac{|a_n|}{c^n}\left|\frac{(cz)^n}{n!}\right|\leq M\left|\frac{(cz)^n}{n!}\right|$ la série $\sum M\left|\frac{(cz)^n}{n!}\right|$ série exponentielle donc $\sum\frac{a_nz^n}{n!}$ CVA ceci pour tout $z\in\mathbb{C}$ ainsi le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ est $+\infty$

(c) *Soit* $c>\frac{1}{R}$, soit $\phi(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}t^ne^{-ct}$.On pose $f_n(t)=\frac{a_n}{n!}t^ne^{-ct}$

$\forall n\in\mathbb{N}$,f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\sum f_n$ CVU su tout ségment de de $\mathbb{R}^+$

Donc ϕ est continue sur $\mathbb{R}^+$

$\forall n\in\mathbb{N}$,$f_n(t)\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f_n intégrable sur $\mathbb{R}^+$

On pose I$_n$ $=\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,dt=\frac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty}t^ne^{-ct}dt=\frac{|a_n|}{c^{n+1}n!}\int_0^{+\infty}u^ne^{-u}du=\frac{|a_n|}{c^{n+1}n!}\Gamma(n+1)=\frac{|a_n|}{c^{n+1}}$

$\sum \frac{|a_n|}{c^{n+1}}$ CV car $0<\frac{1}{c}<$R donc le théorème d'intégration des séries de fonctions ϕ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-ct}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{c^{n+1}}$

(d) Application

i. x$\rightarrow \cos(\sqrt{x}\cos t)$ continue sur $\mathbb{R}^+$,t$\rightarrow \cos(\sqrt{x}\cos t)$ continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $|\cos(\sqrt{x}\cos t)| \leq 1$ et t$\rightarrow$ 1 intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ainsi $\varphi : x \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{x}\cos t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
$\forall x \in \mathbb{R}^+, \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{x}\cos t)\,dt\right| \leq \frac{\pi}{2}$ donc φ est bornée ainsi $\varphi \in$E

ii. $\forall x \in \mathbb{R}^+$,$\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\sqrt{x}\cos t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\cos t)^{2n}}{(2n)!} x^n$

On pose $h_n(t) = \frac{(-1)^n (\cos t)^{2n}}{(2n)!} x^n$.$\forall n \in \mathbb{N}$,h_n est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sum h_n$ CVU *sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |h_n(t)|\,dt$
$I_n = \frac{x^n}{(2n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n}\,dt = \frac{x^n}{(2n)!}\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{x^n\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$
$\sum I_n$ CV Dalembert donc d'aprés le théorème d'intégration des séries de fonctions t$\rightarrow \cos(\sqrt{x}\cos t)$ intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{x}\cos t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n \pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$

(e) Rayon de CV de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi x^n}{2^{2n+1}(n!)^2}$ est $+\infty$ *donc* d'aprés II-3

$\forall x > 0, L(\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n+1}(n!)^2 x^{n+1}}$