

Example (1)

$$x(t) = \cos t (4 \cos^2(t) - 1)$$

$$y(t) = \sin t (4 \cos^2(t) - 1)$$

$$D_1 = \mathbb{R}$$

x and y are 2π periodic

x is even and y is odd

$$x(\pi - t) = -x(t)$$

$$y(\pi - t) = y(t)$$

$$D_C = [0, \pi/2]$$

$$[0, \pi/2] \xrightarrow{S_{xy}} [0, \pi] \xrightarrow{S_{xy}} [-\pi, 0]$$

$$\forall t \in [0, \pi/2]:$$

$$x'(t) = -\sin t (4 \cos^2(t) - 1)$$

$$= \cos t \times 8 \cos t \sin t$$

$$= -\sin t (12 \cos^2(t) - 1)$$

$$y'(t) = \cos t (4 \cos^2(t) - 1)$$

$$= \sin t \times 8 \cos t$$

$$= \cos t (4 \cos^2(t) - 1 - 8 \sin^2(t))$$

$$= \cos t (4 \cos^2(t) - 8(1 - \cos^2(t)) - 1)$$

$$= \cos t (12 \cos^2(t) - 9)$$

$$= 3 \cos(t) (4 \cos^2(t) - 3)$$

tangents:

$$T(0) \text{ is } \vec{j}$$

$$T(\pi/2) \text{ is } \vec{i}$$

$$T(\pi) \text{ is } -\vec{j}$$

$$T(3\pi/2) \text{ is } -\vec{i}$$

$$u\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(4 \times \frac{1}{12} - 1\right)$$

$$= \frac{-1}{3\sqrt{3}}$$

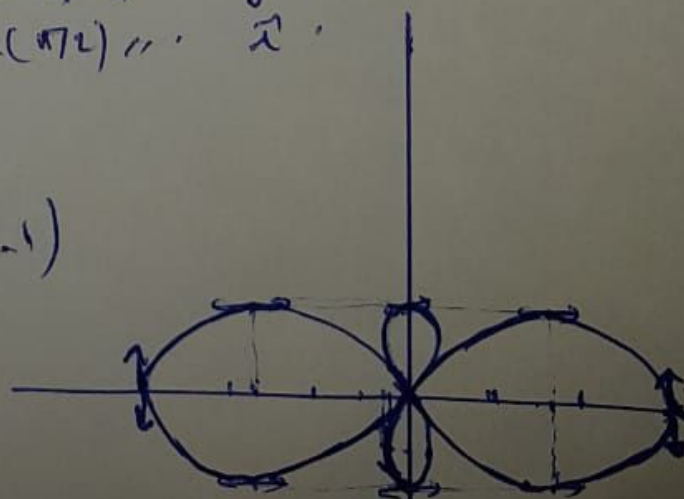
$$\approx -0,2$$

$$y\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{12}} \times -\frac{2}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \times -\frac{2}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}$$

$$\approx -0,6$$



Exemple ②: (Cœur de Raphaël - Laporte)

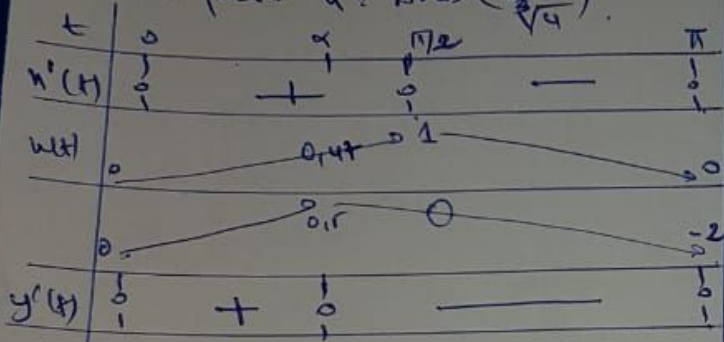
$$\begin{cases} u(t) = \sin^3(t) \\ y(t) = \cos t - \cos^4 t. \end{cases}$$

- $D = D_u \cap D_y = \mathbb{R}$.
- u et y ont 2π - périodiques.
- u est impaire, y paire.

donc $D_E = [0, \pi] \xrightarrow{\text{par}} [-\pi, \pi]$

$\forall t \in (0, \pi): u'(t) = 3\sin^2(t) \cos t$
 $y'(t) = -\sin t + 4\cos^3 t \sin t$
 $= 4\sin t (\cos^3 t - \frac{1}{4})$

on pose: $\alpha = \arcsin(\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$



$$y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} (1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \approx 0,44$$

$$u(\alpha) = (\sqrt{1 - (\frac{1}{\sqrt[3]{4}})^2})^3 \approx 0,5$$

- $M(0)$ et $M(\pi)$ ont deux points stationnaires

Nature de $M(0)$ et $M(\pi)$.

Utilisation de deux jcs: $\forall t \in [0, \pi]$

$$\begin{cases} u''(t) = 3(2\sin t \cos^2 t - \sin^3 t) \\ y''(t) = 3(2\cos^3 t - 4\sin^2 t \cos t - 3\sin^4 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(t) = -\cos t + 4(\cos^4 t - 3\cos^2 t \sin^2 t) \\ = -\cos t + 4\cos^4 t - 3(\sin^2 t)^2 \\ y^{(3)}(t) = \sin t - 16\cos^3 t \sin t - 12\sin^2 t \cos 2t. \end{cases}$$

Donc: $\begin{cases} u''(0) = 0, u^{(3)}(0) = 6 \\ y''(0) = 3, y^{(3)}(0) = 0. \end{cases}$

$(p, q) = (2, 3)$ et $M(0)$ pt de rebroussement de 1^{er} esp et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $\vec{j}$.

De même: $\begin{cases} u''(\pi) = 0, u^{(3)}(\pi) = -6 \\ y''(\pi) = 3, y^{(3)}(\pi) = 0 \end{cases}$
 $(p, q) = (2, 1)$ et $M(\pi)$ pt de rebroussement de 1^{er} esp et la tangente en $M(\pi)$ est dirigée par $\vec{j}$.
 la tangente en $M(\pi/2)$ (resp $M(\pi/2)$) est dirigée par $\vec{j}$ (resp $\vec{i}$).

2^e cas: $h = t - \pi$ (Utilisation du D.L.)

$$u(t) = t^3 + o(t^3)$$

$$y(t) = \frac{3}{2} t^2 + o(t^3).$$

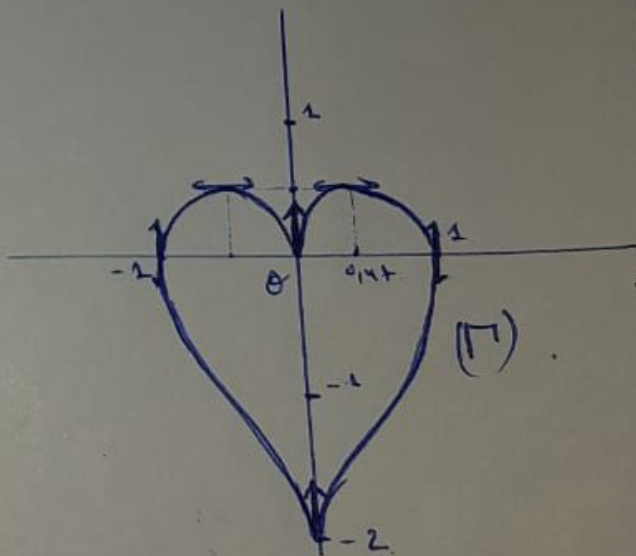
au 4π , $h = t - \pi$

$$u(t) = -\sin^3 h$$

$$= -h^3 + o(h^3)$$

$$y(t) = -\cos h - \cos^4 h$$

$$= -2 + \frac{5}{2} h^2 + o(h^3).$$



Exemple (3):

$$\begin{cases} u(t) = \frac{\sin^2(t)}{2 + \sin t} \\ y(t) = \cos t. \end{cases}$$

$$D = D_u \cap D_y = \mathbb{R}.$$

• u et y sont 2π -périodiques.

• (n n'est ni paire, ni impaire)

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(\pi - t) = u(t)$$

$$y(\pi - t) = -y(t).$$

Cet exemple est ~~pas~~ différent des autres exemples. Puisque on va diviser en $\pi/2$, donc pour la période, on va choisir un intervalle centré en $\frac{\pi}{2}$ et d'amplitude 2π

$$\text{cà.d. } D_n = \left[\frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} + \pi \right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\text{et } D_E = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \xrightarrow{S(\text{on})} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]: y'(t) = -\sin t$$

$$u'(t) = \frac{2 \sin t \cos t (2 + \sin t) - \cos t \sin^2 t}{(2 + \sin t)^2}$$

$$= \frac{\sin t \cos t (4 + \sin t)}{(2 + \sin t)^2}$$

t	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$u'(t)$	0	0	0
$K(t)$	1	0	1/3
$y'(t)$	+	0	-

$M(0)$ est un point stationnaire,

Nature de $M(0)$ (DL)

$$y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3).$$

$$\sin^2(t) = t^2 + o(t^3).$$

$$\frac{1}{2 + \sin t} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{t}{2} + o(t)}$$

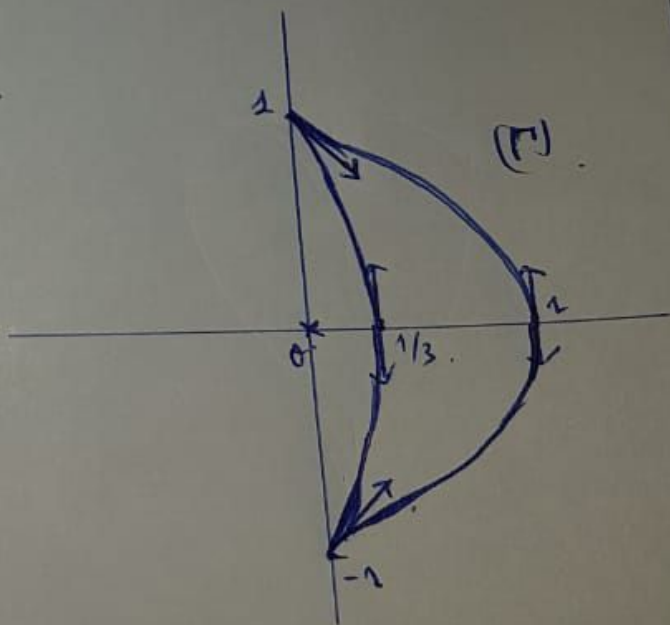
$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2} + o(t) \right)$$

$$\text{donc } u(t) = \frac{\sin^2(t)}{2 + \sin t}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^3 + o(t^3)$$

$$\text{donc } \begin{cases} u''(0) = 1, & u^{(3)}(0) = -\frac{3}{2} \\ y''(0) = -1, & y^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$$

(p,q) = (2,3) et $M(0)$ est un pt de rebroussement de 1^{re} espèce et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $\vec{T} = \vec{j}$.



la tangente en $M(-\pi/2)$ (resp $M(\pi/2)$) est dirigée par $\vec{j}$ (resp $\vec{j}$)

Exemple ④: (Deltoïde)

$$\begin{cases} u(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

Le domaine de déf.

$$D = D_u \cap D_y = \mathbb{R}.$$

• u et y sont 2π -périodiques.

• u est paire, y est impaire.

$$\text{Donc } D_e = [0, \pi].$$

$$[0, \pi] \xrightarrow{\text{Sym}} [-\pi, \pi]$$

• u et y ont des dérivées sur $[0, \pi]$ et sur $[-\pi, 0]$.

$$\begin{aligned} u'(t) &= -2\sin t - 2\sin 2t \\ &= -2\sin t - 4\sin t \cos t \\ &= -2\sin t (1 + 2\cos t) \end{aligned}$$

$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$$

$$\begin{aligned} &= 2\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) \\ &= -4\cos^2 t + 2\cos t + 2 \\ &= (\cos t - 1)(-4\cos t - 2) \\ &= -2(\cos t - 1)(2\cos t + 1) \end{aligned}$$

t	0	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$u'(t)$	0	+	0	+
$y(t)$	0	2	$3\sqrt{3}/2$	0
$y'(t)$	+	+	0	-

$M(0)$ et $M(2\pi/3)$ sont deux points stationnaires, $\forall t \in [0, \pi]$.

$$\begin{cases} u''(t) = -2\cos t - 4\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t \end{cases}$$

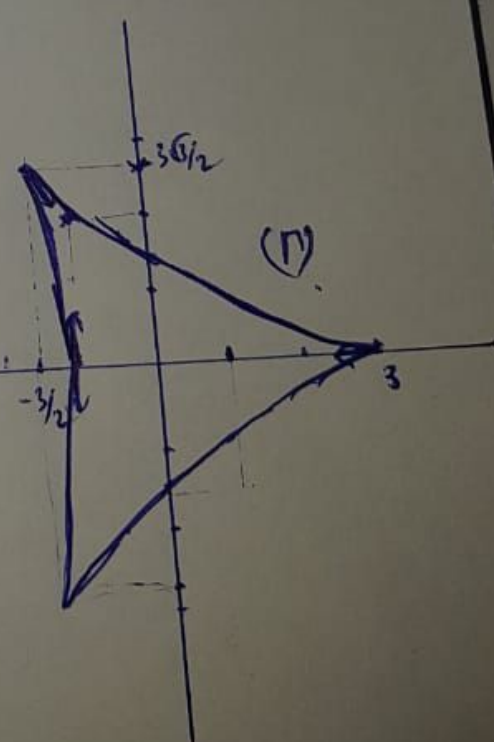
$$\begin{cases} u^{(3)}(t) = 2\sin t + 8\sin(2t) \\ y^{(3)}(t) = -2\cos t + 8\cos(2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u''(0) = -6, u^{(3)}(0) = 0 \\ y''(0) = 0, y^{(3)}(0) = 6 \end{cases}$$

Donc $(p, q) = (2, 1)$ et $M(0)$ est un pt de rebroussement de 1^{re} espèce et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $-\vec{i}$.

$$\begin{cases} u''(2\pi/3) = 3, u^{(3)}(2\pi/3) = -3\sqrt{3} \\ y''(2\pi/3) = -3\sqrt{3}, y^{(3)}(2\pi/3) = -3 \end{cases}$$

$(p, q) = (2, 3)$ et $M(2\pi/3)$ point de rebroussement de 1^{re} espèce et la tangente en $M(2\pi/3)$ est dirigée par $3(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$.
La tangente en $M(\pi)$ est dirigée par $\vec{j}$. $(3\sqrt{3}/2 \approx 2,6)$



Exemple 5:

$$\begin{cases} u(t) = \frac{t^2 - 4}{t + 1} \\ y(t) = \frac{1 - 4t^2}{t(t+1)} \end{cases}$$

$$D = D_u \cap D_y$$

$$= (\mathbb{R} - \{-1\}) \cap \mathbb{R} - \{0\}$$

$$= \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

• u et y ont même parité ou impaire

• Relation entre $M(t)$ et $M(\frac{1}{t})$

$$\forall t \in D: M(\frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t^2} - 4}{\frac{1}{t} + 1} = \frac{1 - 4t^2}{t(t+1)} = y(t)$$

$$y(\frac{1}{t}) = \frac{1 - \frac{4}{t^2}}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t} + 1)} = \frac{t^2 - 4}{1 + t} = u(t)$$

$$\text{donc } D_e = [-1, 1] \cap D =]-1, 0[\cup]0, 1]$$

$$D_e \xrightarrow{S(D)} D \text{ où } (S): y = x$$

(1^{re} binomiale)

$$\forall t \in D_e: x'(t) = \frac{2t(t+1) - t^2 + 4}{(t+1)^2} = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2 + 3}{(t+1)^2}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{-8t(t+1) - (1-4t^2)(2t+1)}{(t^2+t)^2} \\ &= \frac{-8t^3 - 8t^2 - 2t - 1 + 8t^3 + 4t^2}{(t^2+t)^2} \\ &= \frac{-(4t^2 + 2t + 1)}{(t^2+t)^2} = -\frac{(2t + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}}{(t^2+t)^2} \end{aligned}$$

t	-1	-1/2	0	1/2	1
x'(t)			+		
u(t)	∞	-1/2	-4	-9/2	-3/2
y(t)	+∞				-3/2
y'(t)	-			-	

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{y(t)}{u(t)} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{1 - 4t^2}{t(t+1)} = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{y(t) + u(t)}{u(t)} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{1 - 4t^2 + t^3 - 4t}{t(t+1)} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{t^3 - 5t + 1}{t(t+1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{t^2 - 5t + 1}{t} = -7$$

Donc la droite (D): $y = -u - 7$ est une asymptote oblique à (Γ)

Considérons $t \rightarrow -1$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \pm \infty, \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = -4$$

Donc (D): $u = -4$ asymptote verticale à (Γ).

