

- On appelle action mécanique toute cause susceptible de :
- créer, modifier ou déformer le mouvement d'un corps
 - maintenir un corps au repos.

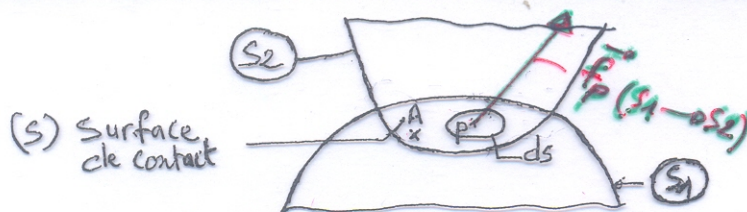
Les actions mécaniques sont de deux sortes :

- actions mécaniques de contact (liaison entre solides..), ces actions mécaniques dites également surfaciques, s'exercent au niveau d'une surface d'un solide.
- les actions mécaniques à distance, d'origine gravitationnelle ou électrique (electro-statique ou électro-magnétique)

I- Actions mécaniques de contact

1- modélisation locale d'une action mécanique.

Tout contact réel entre 2 solides a lieu suivant une surface, aussi petite soit-elle. Considérons donc 2 solides S1 et S2 en contact suivant une surface S



* p : pt courant (variable)

$\vec{f}_p(S1 \rightarrow S2)$: densité surfacique (pression) en chaque point P, des forces de contact de S1 sur S2. (unité : N/mm²). ($1 Pa = 1 N/m^2$)

$$d\vec{F}_p(S1 \rightarrow S2) = \vec{f}_p(S1 \rightarrow S2) \cdot ds$$

N N/m² m²

2- modélisation globale d'une action mécanique.

L'action mécanique de contact de S1 sur S2 se représente globalement, en un point A de la surface de contact S par le torseur :

$$\left\{ T(S1 \rightarrow S2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \\ \vec{M}(A, S1 \rightarrow S2) \end{array} \right\} : \text{Torseur d'action mécanique transmissible par S1 sur S2}$$

Avec : $\vec{R}(S1 \rightarrow S2) = \int_S \vec{f}_p(S1 \rightarrow S2) \cdot ds = \int_S d\vec{F}_p$

$$\vec{M}(A, S1 \rightarrow S2) = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{f}_p(S1 \rightarrow S2) \cdot ds$$

Remarque :

1- le torseur en un autre point B, s'écrit : $\left\{ T(S1 \rightarrow S2) \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \\ \vec{M}(B, S1 \rightarrow S2) \end{array} \right\}_B$

2- la relation de champs de moment s'écrit :

$$\vec{M}(B, S1 \rightarrow S2) = \vec{M}(A, S1 \rightarrow S2) + \vec{BA} \wedge \vec{R}(S1 \rightarrow S2)$$

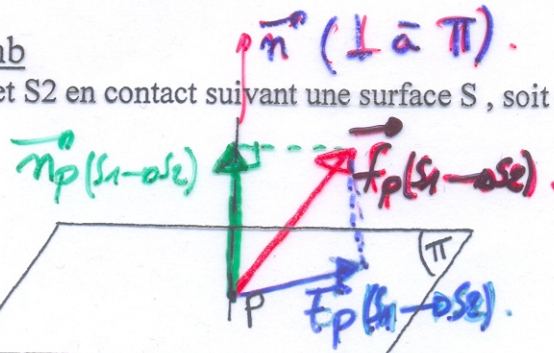
3- Dans un repère $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à la liaison entre S1 et S2, on écrit :

$$\left\{ T(S1 \rightarrow S2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \\ \vec{M}(A, S1 \rightarrow S2) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} + Z_{12} \vec{z} \\ L_{12} \vec{x} + M_{12} \vec{y} + N_{12} \vec{z} \end{array} \right\}_A = \begin{pmatrix} X_{12} & Y_{12} & Z_{12} \\ L_{12} & M_{12} & N_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

$(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

II Lois de coulomb

Soient 2 solides S1 et S2 en contact suivant une surface S, soit (II) le plan tangent commun à S1 et S2



$$\vec{f}_p(S1 \longrightarrow S2) = \vec{n}_p(S1 \longrightarrow S2) + \vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2) \dots \dots \dots$$

$\vec{n}_p(S1 \longrightarrow S2)$: Densité surfacique **normale** en chaque point P, des forces de contact de S1 sur S2

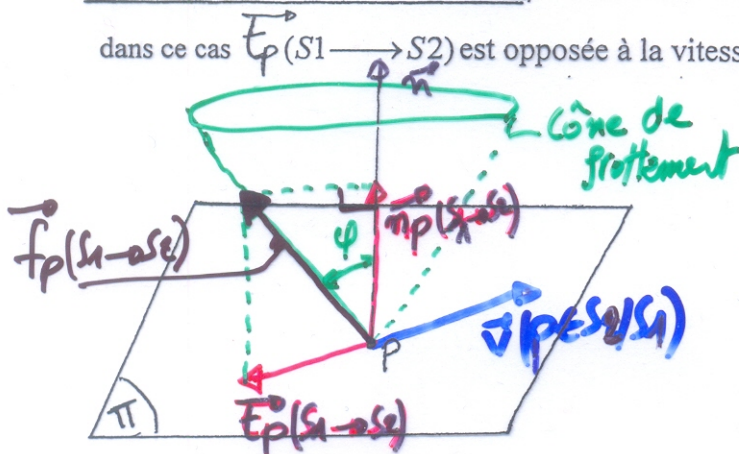
$\vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2)$: Densité surfacique **tangentielle** en chaque point P, des forces de contact de S1 sur S2 ($\in \Pi$)

soit $\vec{V}(P \in S2/S1)$: vitesse de glissement de S2/S1 (par def $\in \Pi$).

- on dit qu'il y a **adhérence** au point P entre S1 et S2 si : $\vec{V}(P \in S2/S1) = \vec{0}$
- on dit qu'il y a **frottement** au point P entre S1 et S2 si : $\vec{V}(P \in S2/S1) \neq \vec{0}$

1^{er} cas : si $\vec{V}(P \in S2/S1) \neq \vec{0}$ (glissement au pt P entre S1 et S2) (**frottement**)

dans ce cas $\vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2)$ est opposée à la vitesse de glissement, ce qui se traduit par :



$$\begin{aligned} \vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2) \wedge \vec{V}(P \in S2/S1) &= \vec{0} \\ \vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2) \cdot \vec{V}(P \in S2/S1) &\leq 0 \\ \|\vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2)\| &= f \cdot \|\vec{n}_p(S1 \longrightarrow S2)\| \end{aligned}$$

$$f = \tan \varphi : \text{coef de frottement} = \frac{\|\vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2)\|}{\|\vec{n}_p(S1 \longrightarrow S2)\|}$$

$\vec{f}_p(S1 \longrightarrow S2)$ se trouve sur le bord d'un cône de sommet P, d'axe $\perp$ à (II) et de demi angle au sommet φ : appelé **cône de frottement**.

2^{ème} cas : si $\vec{V}(P \in S2/S1) = \vec{0}$: pas de glissement

(**adhérence**)

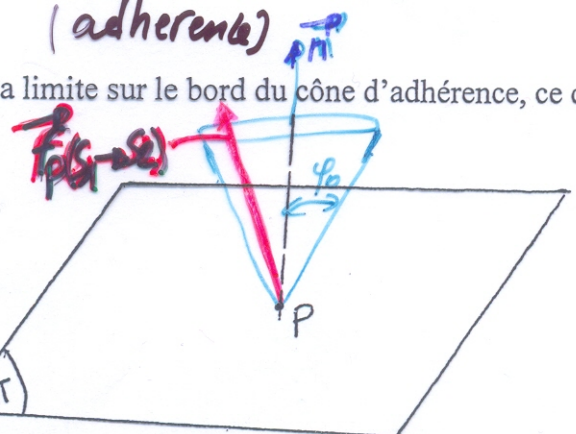
dans ce cas $\vec{f}_p(S1 \longrightarrow S2)$ se situe à l'intérieur ou à la limite sur le bord du cône d'adhérence, ce qui se traduit par :

$$\|\vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2)\| \leq f_0 \cdot \|\vec{n}_p(S1 \longrightarrow S2)\|$$

$$f_0 = \tan \varphi_0 : \text{coef d'adhérence}$$

à la limite de glissement, on a : (équilibre strict)

$$\|\vec{F}_p(S1 \longrightarrow S2)\| = f_0 \cdot \|\vec{n}_p(S1 \longrightarrow S2)\|$$



Remarque :

- les coefs d'adhérence et de frottement dépendent de de nombreux paramètres : nature des matériaux en contact, état de surface, lubrification,
- le coef d'adhérence est légèrement supérieur au coef de frottement ($f_0 > f$), mais en pratique et par mesure de simplification, on considère que les 2 coef sont égaux.

III – Action mécanique de contact ponctuel

Considérons 2 solides S_1 et S_2 En contact ponctuel au point I , on admet qu'il existe un plan tangent commun (π) en I , de normale $\vec{n}$.

Les actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 sont représentés par le torseur :

$$\{T(S_1 \longrightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) \\ \vec{M}(I, S_1 \longrightarrow S_2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_N(S_1 \longrightarrow S_2) + \vec{R}_t(S_1 \longrightarrow S_2) \\ \vec{M}_P(I, S_1 \longrightarrow S_2) + \vec{M}_R(I, S_1 \longrightarrow S_2) \end{array} \right\}$$

def :

$\vec{R}_N(S_1 \longrightarrow S_2)$: effort normal = $[\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) \cdot \vec{n}] \vec{n}$

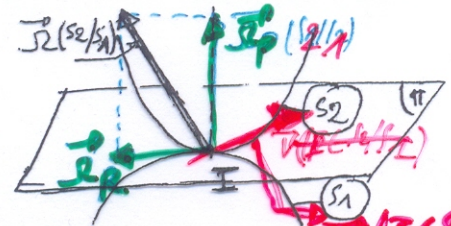
$\vec{R}_t(S_1 \longrightarrow S_2)$: effort tangentiel = $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) - \vec{R}_N(S_1 \longrightarrow S_2) : (\in \pi)$.

$\vec{M}_P(I, S_1 \longrightarrow S_2)$: Moment de pivotement = $[\vec{M}(I, S_1 \longrightarrow S_2) \cdot \vec{n}] \vec{n}$

$\vec{M}_R(I, S_1 \longrightarrow S_2)$: Moment de roulement = $\vec{M}(I, S_1 \longrightarrow S_2) - \vec{M}_P(I, S_1 \longrightarrow S_2)$.

le torseur cinématique du mvt de S_2/S_1 s'écrit aussi :

$$\{V(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(I \in S_2/S_1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_P(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_R(S_2/S_1) \\ \vec{V}(I \in S_2/S_1) \end{array} \right\}$$



$\vec{\Omega}_P(S_2/S_1)$: vecteur rotation de pivotement = $[\vec{\Omega}(S_2/S_1) \cdot \vec{n}] \vec{n}$

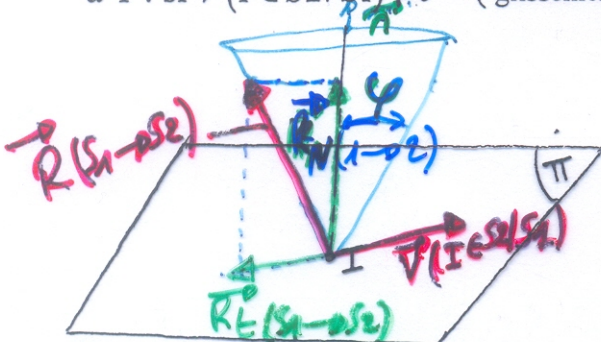
$\vec{\Omega}_R(S_2/S_1)$: vecteur rotation de roulement = $\vec{\Omega}(S_2/S_1) - \vec{\Omega}_P(S_2/S_1)$

$\vec{V}(I \in S_2/S_1)$: vitesse de glissement (par def $\in \pi$).

des lois analogues aux lois de coulomb, définissent un ensemble de relations liant les composantes des 2 torseurs (Cinématique et Statique), selon qu'on a : glissement, pivotement, ou roulement

a) cas de Glissement ***

a-1 : si $\vec{V}(I \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$ (glissement au pt I entre S_1 et S_2) (frottement)



$$\begin{aligned} \vec{R}_t(S_1 \longrightarrow S_2) \wedge \vec{V}(I \in S_2/S_1) &= \vec{0} \\ \vec{R}_t(S_1 \longrightarrow S_2) \cdot \vec{V}(I \in S_2/S_1) &< 0 \\ \text{tg } \varphi &= f = \frac{\|\vec{R}_t(S_1 \longrightarrow S_2)\|}{\|\vec{R}_N(S_1 \longrightarrow S_2)\|} \\ f &: \text{coef de frottement.} \end{aligned}$$

a-2 : si $\vec{V}(I \in S2/S1) = \vec{0}$ (aucun glissement relatif au pt I entre S1 et S2)

dans ce cas $\vec{R}(S1 \rightarrow S2)$ se situe à l'intérieur ou à la limite sur le bord du cône d'adhérence, ce qui se traduit par :

$$\|\vec{R}_T(S1 \rightarrow S2)\| \leq f_0 \|\vec{R}_N(S1 \rightarrow S2)\|$$

f_0 : coef d'adhérence

b.1 - pivotement

b.1 1^{er} cas : $\vec{\Sigma}_P(S2/S1) \neq \vec{0}$ (il y a pivotement).

$$\begin{cases} \vec{\Sigma}_P(S2/S1) \wedge \vec{M}_P(I, S1 \rightarrow S2) = \vec{0} \\ \vec{\Sigma}_P(S2/S1) \cdot \vec{M}_P(I, S1 \rightarrow S2) < 0 \\ \|\vec{M}_P(I, S1 \rightarrow S2)\| = \delta \cdot \|\vec{R}_N(S1 \rightarrow S2)\| \end{cases}$$

δ : paramètre de Résistance au pivotement (homogène à une longueur).

b.2 2^{ème} cas : $\vec{\Sigma}_P(S2/S1) = \vec{0}$ (pas de pivotement).

$$\|\vec{M}_P(I, S1 \rightarrow S2)\| \leq \delta \cdot \|\vec{R}_N(S1 \rightarrow S2)\|$$

c) Roulement

c.1) 1^{er} cas : $\vec{\Sigma}_R(S2/S1) \neq \vec{0}$ (il y a Roulement)

$$\begin{cases} \vec{\Sigma}_R(S2/S1) \wedge \vec{M}_R(I, S1 \rightarrow S2) = \vec{0} \\ \vec{\Sigma}_R(S2/S1) \cdot \vec{M}_R(I, S1 \rightarrow S2) < 0 \\ \|\vec{M}_R(I, S1 \rightarrow S2)\| = \eta \cdot \|\vec{R}_N(S1 \rightarrow S2)\| \end{cases}$$

η : coef de Résistance au Roulement (homogène à une longueur).

c.2) 2^{ème} cas : $\vec{\Sigma}_R(S2/S1) = \vec{0}$ (pas de Roulement).

$$\|\vec{M}_R(I, S1 \rightarrow S2)\| \leq \eta \cdot \|\vec{R}_N(S1 \rightarrow S2)\|$$

IV- Tableau des liaisons normalisées (liaisons parfaites)

Voir document T004 + T003

Désignation de la liaison	Symbole spatial	Symbole plan	Torseur cinématique associé	Torseur d'action mécanique associé
Encastrement			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ $N_c = 0$ $N_s = 6$
Pivot d'axe $\vec{x}$			$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ $N_c = 1$ <i>en tout pt à l'axe x</i>	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ $N_s = 5$
Glissière d'axe $\vec{x}$			$\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Hélicoïdale d'axe $\vec{x}$			$\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ $R = \pm \frac{p}{2\pi}$ $V_x = \pm \frac{p}{2\pi} \omega_x$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ $L = \pm \frac{p}{2\pi} \omega_x$ $M = \pm \frac{p}{2\pi} v_x$
Pivot glissant d'axe $\vec{x}$			$\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ $N_c = 2$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ $N_s = 4$
Sphérique "Rotule" de centre A			$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$

"sphère-cylindre" Linéaire circulaire linéaire annulaire date 28				$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$ au pt A $N_c = 4$	$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix}$ $N_s = 2$
"sphère-plan" Ponctuelle de normale 28				$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$ $N_c = 5$	$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix}$ $N_s = 1$
"cylindre-plan" Linéaire rectiligne d'axe y et de normale x				$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix}$
Appui plan de normale x 28				$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix}$
Sphérique à doigt d'axe y et z				$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix}$

Rq : pour chaque liaison, on a :

* $N_c + N_s = 6$

* $\{V\} \times \{T\} = 0$

V- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (P.F.S.)

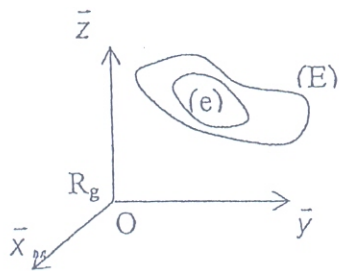
1) équilibre d'un ensemble matériel

On dit que l'ensemble matériel (E) est en équilibre par rapport à repère R si, au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport au repère R.

Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère R, si ses paramètres de position par rapport à ce repère sont constants.

2) énoncé du P.F.S.

Il existe au moins un repère R_g , appelé **repère galiléen**, tel que pour tout sous ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le **torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e) soit nul**.



$$\{T(\bar{e} \rightarrow e)\} = \{0\} \quad \forall (e) \in (E)$$

extérieur à e.

(h) $\bar{e}$ est tout ce qui est

Un repère lié à la terre constitue très souvent un repère galiléen.

On en déduit :

Le théorème de la résultante statique : TRS

Pour tout sous ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g , la **résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e) est nulle**.

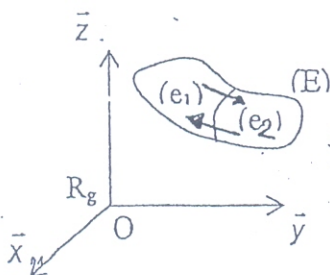
$$R(\bar{e} \rightarrow e) = 0 \quad (i)$$

Le théorème du moment statique : TMS

Pour tout sous ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g , le **moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e) est nul en tout point**.

$$M_A(\bar{e} \rightarrow e) = 0 \quad \forall A \quad (j)$$

3) théorème des actions mutuelles



(e₁) et (e₂) sont deux sous ensembles matériels de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g avec $E = \{e_1, e_2\}$.

L'action mécanique du sous-ensemble matériel (e₁) sur le sous ensemble matériel (e₂) est opposée à l'action mécanique du sous ensemble matériel (e₂) sur le sous ensemble matériel (e₁).

Donc :

$$\{T(e_2 \rightarrow e_1)\} = -\{T(e_1 \rightarrow e_2)\} \quad (k)$$

Torseurs cinématiques et statiques des liaisons normalisées parfaites

Classe :

Liaison	Torseur cinématique	Torseur statique	Forme gardée en
Encastrement	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	Tout point de l'espace et dans toute base
Pivot d'axe $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point de $(O, \vec{z})$ et dans toute base contenant $\vec{z}$
Glissière de direction $\vec{z}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & N \end{Bmatrix}$	Tout point de l'espace et dans toute base contenant $\vec{z}$
Hélicoïdale d'axe $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & k\omega_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & -kZ \end{Bmatrix}$	Tout point de l'axe $(O, \vec{z})$ et dans toute base contenant $\vec{z}$
Pivot glissant d'axe $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point de l'axe $(O, \vec{z})$ et dans toute base contenant $\vec{z}$
Sphérique à doigt d'axe $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}$	Au centre O et dans toute base contenant $\vec{z}$
Sphérique de centre O	$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	Au centre O et dans toute base
Appui plan de normale $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point de l'espace et dans toute base contenant $\vec{z}$
Sphère cylindre d'axe $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Au centre O et dans toute base contenant $\vec{z}$
Linéaire rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ et de normale $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point du plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$ et dans la base $(\vec{x}, -\vec{z})$
Sphère plan de normale $(O, \vec{z})$	$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	Tout point de l'axe $(O, \vec{z})$ et dans toute base contenant $\vec{z}$

$$k = \pm \frac{P}{2\pi}$$