DL 11 PSI 2 IBN TAIMIYA

Notations

On note :

- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels,
- $(\vec{i},\vec{j})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$,
- $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$.

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ où O est un point du plan.

On désigne par (E) l'équation

$$2y\,\phi(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On dira que ϕ est une solution de (E) sur un ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$ si :

(i) ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles,

(ii) L'équation (E) est vérifiée pour tout couple (x,y) de Δ.

Partie I

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\ \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

On note D l'ensemble des couples de réels (x,y) pour lesquels cette expression a un sens.
Montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

3. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2y\,f(x,y)$$

pour (x,y) dans D.

En déduire que f est une solution de (E) sur D.

4. Pour $x > 0$ et $y \in]0,1[$, comparer $f(x,y)$ et $f\left(\frac{1}{x},y\right)$.

5. Établir l'inégalité suivante :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[, \quad \forall\, y \in]0,1[, \qquad \left|\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right| \leq |\ln(y)|.$$

6. Prouver que $y \mapsto f(0,y)$ est intégrable sur $]0,1[$.

En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $]0,1[$.

On définit alors sur $[0,+\infty[$ la fonction F par :

$$F(x) = \int_{]0,1[} f(x,y)\,dy.$$

Partie II - Étude de F

7. **a.** Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$.

b. Pour $x \in]0,+\infty[$, comparer $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$. Que vaut $F(1)$?

c. Exprimer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ à l'aide de $F(0)$.

8. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

9. **a.** Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_{]0,1[} y^{2n}\,\ln(y)\,dy.$$

b. En développant $\dfrac{1}{1-y^2}$ en série entière, pour $y\in]0,1[$, déterminer $F(0)$.

10. **a.** Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

b. Calculer $F'(x)$ pour $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Comparer le résultat obtenu et $f(0,x)$.

c. En déduire la valeur de $F'(1)$. Déterminer la demi-tangente à droite à la courbe représentative de F au point d'abscisse 0.

11. À l'aide des résultats précédents, construire la courbe représentative de F.

Partie III - Courbes associées aux solutions de (E)

Dans cette partie, ϕ désigne une solution de (E) sur un ouvert Δ de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; toutes les coordonnées sont relatives à ce repère.

12. Dans cette question, on suppose que $\Delta\subset\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

Soit $\mathcal{C}_1$ la courbe d'équation cartésienne $\phi(x,y)=1$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient :

$$(x,y)\in\Delta\quad\text{et}\quad\phi(x,y)=1.$$

a. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ est régulière (c'est-à-dire, que tous ses points sont réguliers).

b. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en un point de coordonnées (a,b).

13. Soit $\mathcal{C}_2$ la courbe d'équation cartésienne $\phi(x,y)=0$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit u la fonction définie sur Δ par : $u(x,y)=(1-y^2)\vec{i}+(1-x^2)\vec{j}$.

Soit M un point de coordonnées (a,b). On suppose que M est un point régulier de $\mathcal{C}_2$. Montrer que si $a^2\neq1$ ou $b^2\neq1$, alors le vecteur $u(a,b)$ est un vecteur normal à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point M.

14. On considère le cas de la fonction f de la partie **I**, définie sur l'ouvert D.

Montrer que la courbe d'équation $f(x,y)=0$ est une droite privée de deux points. On précisera cette droite et ces points.

Partie IV - Résolution de (E)

15. Dans cette question uniquement, $\Delta=\mathbb{R}\times]-1,1[$. Déterminer les solutions de (E) sur Δ qui ne dépendent pas de leur première variable.

Indication : on remarquera que le problème se ramène à une équation différentielle.

16. Soient Ω et Ω' les ouverts de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ v<u\},$$
$$\Omega'=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2;\ s^2>4t\}.$$

On considère l'application

$$\psi:\left\{\begin{array}{ccc}\Omega&\to&\mathbb{R}^2\\(u,v)&\mapsto&(u+v,uv)\end{array}\right.$$

a. Soit $(u,v) \in \Omega$. Quelles sont les racines du polynôme $X^2 - (u+v)X + uv$?

b. Établir que ψ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω sur Ω'.

17. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer qu'il existe une application

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega' & \to & \mathbb{R} \\ (s,t) & \mapsto & h(s,t) \end{array} \right.$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω' telle que :

$$\forall\, (u,v) \in \Omega, \quad g(u,v) = h(u+v, uv).$$

b. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) $\forall\, (u,v) \in \Omega, \quad \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v).$

(ii) $\forall\, (s,t) \in \Omega', \quad \dfrac{\partial h}{\partial t}(s,t) = 0.$

18. Soit H une solution de (E) sur $\Omega_1 = \Big\{(x,y) \in \,]-1,1[^2 \,;\, y < x\Big\}$ et G la fonction définie sur Ω par

$$G(u,v) = (1 - \mathrm{th}^2(v))\, H(\mathrm{th}(u), \mathrm{th}(v))$$

où th désigne la fonction tangente hyperbolique, c'est-à-dire :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

a. Calculer $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ pour $(u,v) \in \Omega$, à l'aide des dérivées partielles $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial H}{\partial y}$.

b. Déduire de la question **17** qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ telle que :

$$\forall\, (x,y) \in \Omega_1, \quad H(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\, \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Indication : on pourra transformer cette égalité en posant $x = \mathrm{th}(u)$ et $y = \mathrm{th}(v)$, sachant que

$$\text{pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{th}(u+v) = \frac{\mathrm{th}(u) + \mathrm{th}(v)}{1 + \mathrm{th}(u)\,\mathrm{th}(v)}.$$

On pourra également admettre qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω', dont la dérivée partielle par rapport à sa seconde variable est nulle, ne dépend que de sa première variable.

19. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur Ω_1.