PSI 08/09 - Devoir 1- Corrigé

PROBLEME

n désigne un entier naturel non nul, (a,b) un élément de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}_n[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour tout P de $\mathbf{R}_n[X]$, on pose :

$$f_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P \qquad (*)$$

Prélimnaire

1. $\dim \mathbf{R}_n[X] = n+1$.

2. Soit P dans $\mathbf{R}_n[X]$. Commençons par le cas où P est de degré n et notons a_n son coefficient dominant. $(X-a)(X-b)P'$ est de degré $n+1$ et de coefficient dominant na_n tout comme $n\left(X-\frac{a+b}{2}\right)P$. Par différence $f_n(P)$ est dans $\mathbf{R}_n[X]$. Si P est dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ alors les deux polynômes $(X-a)(X-b)P'$ et $n\left(X-\frac{a+b}{2}\right)P$ sont dans $\mathbf{R}_n[X]$ et donc leur différence aussi. Donc , en conclusion de ces deux cas :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], f_n(P) \in \mathbf{R}_n[X]$$

$(*)$ définie donc bien une application f_n de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$. Il reste à démontrer que celle-ci est linéaire. Soit donc P et Q dans $\mathbf{R}_n[X]$ et λ dans $\mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f_n(P+\lambda Q) &= (X-a)(X-b)(P'+\lambda Q') - n\left(X-\frac{a+b}{2}\right)(P+\lambda Q) \text{ (par linéarité de la dérivation)} \\ &= (X-a)(X-b)P' - n\left(X-\frac{a+b}{2}\right)P + \lambda\left((X-a)(X-b)Q' - n\left(X-\frac{a+b}{2}\right)Q\right) \\ &= f_n(P) + \lambda f_n(Q) \text{ (par calcul dans } \mathbf{R}[X] \text{ et définition de } f_n) \end{aligned}$$

Finalement f_n est linéaire et donc $(*)$ définit un endomorphisme f_n de $\mathbf{R}_n[X]$.

Partie I : Etude du cas n = 1
Dans cette partie on pose donc $n=1$ et on va étudier f_1.

1. Etude du cas $a \neq b$
On suppose donc de plus, ici : $a \neq b$.

   a) Etude du noyau de f_1.
   Soit P dans $\operatorname{Ker} f_1$. On a $f_1(P)=0$ ce qui signifie :

   $$(X-a)(X-b)P' = \left(X-\frac{a+b}{2}\right)P$$

   On évalue en a ce qui donne $\frac{a-b}{2}P(a) = 0$ et puisque $a\neq b$: $P(a)=0$. De même $P(b)=0$. P a au moins deux racines distinctes (a et b). Or P est degré au plus 1 d'où $P=0$ et $\operatorname{Ker} f_1 \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant immédiate, on conclut : $\operatorname{Ker} f_1 = \{0\}$.

   b) f_1 est injective d'après la question précédente, or tout endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif, d'où f_1 est un automorphisme de $\mathbf{R}_1[X]$.

   c) $f_1(1) = \frac{a+b}{2} - X$ et $f_1(X) = ab - \frac{a+b}{2}X$, donc la matrice M_1 de f_1 relativement à la base canonique $(1,X)$ de $\mathbf{R}_1[X]$ est : $\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$.
   On a $\det M_1 = -\frac{(a-b)^2}{4}$, or $a\neq b$ d'où $\det M_1 \neq 0$ ce qui montre que f_1 est bijective et redonne le résultat précédent.

d) $(X-a, X-b)$ est une famille de deux vecteurs (polynômes, ici) qui sont bien dans $\mathbf{R}_1[X]$ et $\mathbf{R}_1[X]$ est de dimension 2. Il suffit donc de prouver que cette famille est libre. On considère donc des réels α et β quelconques tels que $\alpha(X-a)+\beta(X-b]=0$. On évalue d'abord en a, ce qui donne $\beta=0$, puis en b ce qui donne $\alpha=0$, toujours à cause de $a \neq b$. $(X-a, X-b)$ est donc bien une base de $\mathbf{R}_1[X]$.
De plus $f_1(X-a)=\dfrac{a-b}{2}(X-a)$ et $f_1(X-b)=\dfrac{b-a}{2}(X-b)$.
Donc : $N_1=\begin{pmatrix}\frac{a-b}{2} & 0\\ 0 & \frac{b-a}{2}\end{pmatrix}=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.
On en déduit par simple lecture que, par exemple, f_1 est la composée de l'homothétie de rapport $\dfrac{a-b}{2}$ et de la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}(X-a)$ suivant $\operatorname{Vect}(X-b)$.

e) De ce qui précède : $M_1=\frac{a-b}{2}S$ où S est une matrice de symétrie et $S=\begin{pmatrix}\frac{a+b}{\frac{a-b}{2}} & \frac{2ab}{\frac{a-b}{2}}\\ \frac{2}{b-a} & \frac{a+b}{b-a}\end{pmatrix}$. On sait donc que toutes les puissances paires de S sont I_2 avec $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et les impaires sont S.
En conclusion si m est un entier pair, on a : $M_1^m=\left(\frac{a-b}{2}\right)^m I_2$ et si m est un entier impair, on a alors : $M_1^m=\left(\frac{a-b}{2}\right)^m S=\left(\frac{a-b}{2}\right)^m\begin{pmatrix}\frac{a+b}{\frac{a-b}{2}} & \frac{2ab}{\frac{a-b}{2}}\\ \frac{2}{b-a} & \frac{a+b}{b-a}\end{pmatrix}$. A noter que tout cela reste valable même pour un entier négatif.

f) *Question réservée au 5/2*
D'après Cayley-Hamilton, M_1 annule son polynôme caractéristique , c'est à dire ici : $X^2-\dfrac{(a-b)^2}{4}$.
On se donne un entier m et on détermine le reste R, de la division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$ de X^m par $X^2-\dfrac{(a-b)^2}{4}$. On obtient facilement $R=\left(\frac{a-b}{2}\right)^m\left(\frac{1-(-1)^m}{a-b}X+\frac{1+(-1)^m}{2}\right)$.
D'où $M^m=R(M)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^m\left(\frac{1-(-1)^m}{a-b}M+\frac{1+(-1)^m}{2}I_2\right)$, ce qui redonne le résultat précédent.

2. Etude du cas $a=b$
On suppose donc maintenant $a=b$.

a) O a : $f_1(1)=a-X$ et $f_1(a-X)=0$. De plus $(a-X,1)$ et évidemment une base de $\mathbf{R}_1[X]$ et la matrice de f_1 dans cette base est : $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

b) D'après ce qui précède $\operatorname{rg} f_1=1$ et immédiatement $\operatorname{Im} f_1=\operatorname{Vect}(a-X)=\operatorname{Ker} f_1$. f_1 n'est donc pas un automorphisme.

c) $\operatorname{Im} f_1=\operatorname{Ker} f_1$ donc $f_1^2=0$. Donc à partir de la puissance 2 toutes les puissances de f_1 sont nulles, comme toujours $f_1^1=f_1$ et $f_1^0=id$ où ici id est l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}_1[X]$. f_1 n'étant pas bijective, ses puissances négatives n'ont aucun sens.

d) On a : $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. On en déduit $f_1=p\circ s$ où p est la projection sur $\operatorname{Vect}(a-X)$ suivant $\mathbf{R}_0[X]$ et s la symétrie par rapport $\operatorname{Vect}(a+1-X)$ suivant $\operatorname{Vect}(a-1-X)$.

Partie II : Etude du cas $\mathbf{n=2}$
Dans cette partie on pose donc $n=2$ et on va étudier f_2.

1. Etude du cas $a \neq b$
On suppose donc de plus, ici : $a \neq b$.

a) Etude du noyau de f_2.
Soit P dans $\operatorname{Ker} f_2$. On a $f_2(P)=0$ ce qui signifie :

$$(X-a)(X-b)P'=2\left(X-\frac{a+b}{2}\right)P$$

On évalue en a et b , ce qui donne comme en I.1.a) : $P(a)=P(b)=0$. Mais, ici P est de degré au plus 2, donc il s'écrit $\alpha(X-a)(X-b)$ où α est un réel. Comme réciproquement $f_2((X-a)(X-b))=0$, on en déduit que $\operatorname{Ker} f_2$ est la droite vectorielle de base $(X-a)(X-b)$ c'est à dire :

$$\operatorname{Ker} f_2=\operatorname{Vect}((X-a)(X-b))$$

b) On a $f_2((X-a)^2) = (a-b)(X-a)^2$. Ceci montre, puisque $b \neq a$ que $(X-a)^2$ est dans $\operatorname{Im} f_2$, laquelle par le théorème du rang est de dimension 2. Comme $f_2(1) = -2(X - \frac{a+b}{2})$ et que la famille $\left((X-a)^2, X - \frac{a+b}{2}\right)$ est libre (polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts), on a : $\operatorname{Im} f_2$ est le plan de base $\left((X-a)^2, X - \frac{a+b}{2}\right)$.

c) $f_2(1) = -2(X - \frac{a+b}{2})$, $f_2(X) = ab - X^2$ et $f_2(X^2) = -(a+b)X^2 + 2abX$ d'où par définition :

$$M_2 = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 \\ -2 & 0 & 2ab \\ 0 & -1 & -(a+b) \end{pmatrix}.$$

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M_2, on voit que la famille (C_1, C_2) est libre et que l'on a aussi $C_3 = -abC_1 + (a+b)C_2$ ce qui montre que M_2 est de rang 2, que $\operatorname{Ker} f_2$ est une droite et qu'elle est dirigée par le vecteur de coordonnées $(ab, -(a+b), 1)$ relativement à la base canonique et encore que $\operatorname{Im} f_2$ a pour base les vecteurs de coordonnées C_1 et C_2 toujours relativement à la base canonique. En interprétant en terme de polynômes (la base canonique de$\mathbf{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$), on retrouve bien les résultats précédents.
On peut s'amuser (si , si !) à donner une équation du plan $\operatorname{Im} f_2$ *relativement à cette base canonique*

d) Soit α, β et γ trois réels quelconques tels que $\alpha(X-a)(X-b) + \beta(X-a)^2 + \gamma(X-b)^2 = 0$. On évalue en a d'où $\gamma = 0$ car $a \neq b$. De même en évaluant en b, on a $\beta = 0$ et donc $\alpha = 0$ également. Donc la famille $\left((X-a)(X-b), (X-a)^2, (X-b)^2\right)$ est libre, comme elle est constituée de trois éléments de $\mathbf{R}_2[X]$, c' est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
On sait déjà : $f_2\left((X-a)(X-b)\right) = 0$, $f_2\left((X-a)^2\right) = (b-a)(X-a)^2$ et aussi $f_2\left((X-b)^2\right) = (a-b)(X-b)^2$, d'où :

$$N_2 = (a-b)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Enfin, par exemple : $N_2 = (a-b)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ce qui montre que $f_2$est la composée de l'homothétie de rapport $b-a$, de la projection sur $\operatorname{Vect}\left((X-a)^2, (X-b)^2\right)$ suivant $\operatorname{Vect}\left((X-a)(X-b)\right)$ et de la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}\left((X-a)(X-b), (X-a)^2\right)$ suivant $\operatorname{Vect}\left((X-b)^2\right)$.

2. Etude du cas $a = b$
On suppose donc maintenant $a = b$.

a) Soit P dans $\operatorname{Ker} f_2$. On a : $(X-a)\left((X-a)P' - 2P\right) = 0$ et donc par intégrité de $\mathbf{R}[X]$:

$$(X-a)P' - 2P = 0$$

On évalue en a d'où $P(a) = 0$.
On dérive ce qui donne : $(X-a)P'' - P' = 0$ et on évalue en a d'où $P'(a) = 0$. Finalement a est racine au moins double de P puisque $P(a) = P'(a) = 0$.
P étant de degré au plus 2, on en déduit qu'il s'écrit $\alpha(X-a)^2$ où α est réel. Comme réciproquement, on a $f_2\left((X-a)^2\right) = 0$, on a finalement $\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Vect}\left((X-a)^2\right)$.

b) L"image de f_2 est donc un plan (théorème du rang) inclus dans $(X-a)\mathbf{R}_1[X]$ (car pour tout P de $\mathbf{R}_2[X]$, l'on a $f_2(P) = (X-a)\left((X-a)P' - 2P\right)$. Or $(X-a)\mathbf{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[X]$ de dimension 2 (une base est par exemple $(X(X-a), X-a)$) ce qui donne :

$$\operatorname{Im} f_2 = (X-a)\mathbf{R}_1[X]$$

c) La famille $\left((a-X)^2, a-X, \frac{1}{2}\right)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$ (car libre maximale dans $\mathbf{R}_2[X]$) et on vérifie immédiatement qu'elle répond à la question.

Partie III : Noyau de $\operatorname{Ker} \mathbf{f_n}$

On en vient au cas général, n est donc un entier au moins égal à 1 et on veut déterminer $\operatorname{Ker} f_n$.

1. Soit P un polynôme non nul élément de $\operatorname{Ker} f_n$, d son degré et α_p son coefficient dominant. On a :

$$(X-a)(X-b)P' = n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

Le polynôme $(X-a)(X-b)P'$ est de degré $p+1$ et de coefficient dominant $p\alpha_p$. Le polynôme $n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$ est de degré $p+1$ et de coefficient dominant $n\alpha_p$. Un coefficient dominant étant non nul ($\alpha_p \neq 0$), on en déduit que $p = n$. En conclusion, tout polynôme non nul de $\operatorname{Ker} f_n$ est de degré n.

2. Soit R et S des pôlynômes non nuls éléments de $\operatorname{Ker} f_n$ de coefficients dominants respectifs r_n et s_n. Les polynôme s_nR et r_nS sont de même degré n et de même coefficient dominant r_ns_n, leur différence est donc degré strictement inférieur àn, donc, d'après la question précédente, elle est nulle. On en déduit que quels que soient les polynômes non nuls R et S de $\operatorname{Ker} f_n$, ils sont sont colinéaires et que donc la dimension de $\operatorname{Ker} f_n$ est au plus 1. Le théorème du rang montre qu'alors le rang de f_n est au moins n.

3. On suppose ici : $a = b$ et on note encore P un élément de $\operatorname{Ker} f_n$. a est racine double au moins de P, même raisonnement qu'en II.2.a)
   On a : $f_n((X-a)^n) = 0$ et donc, puisque la dimension de $\operatorname{Ker} f_n$ est au plus 1, l'on a :
$$\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Vect}\left((X-a)^n\right)$$

4. On suppose maintenant : $a \neq b$ et on note P un élément de $\operatorname{Ker} f_n$.
   $P(a) = P(b) = 0$ même raisonnement qu'en I.1.a), donc P a au moins deux racines a et b.
   a et b ayant le même rôle dans la définition de f_n (changer le couple (a, b) en le couple (b, a) ne change pas f_n), ils sont racines de P avec la même multiplicité. En notant m cette multiplicité et en remarquant que P est soit nul, soit de degré n, on obtient exactement l'écriture demandée : P s'écrit $(X-a)^m(X-b)^mA$ où m est une entier naturel vérifiant $2 \leqslant 2m \leqslant n$ et A est soit le polynôme nul soit un polynôme de degré $n-2m$ n'ayant ni a ni b comme racine.
   On a alors : $f_n(P) = (X-a)^m(X-b)^m\left((X-a)(X-b)A' + (2m-n)(X - \frac{a+b}{2})A\right)$.
   Mais $f_n(P) = 0$ et donc (intégrité de $\mathbf{R}[X]$) : $(X-a)(X-b)A' + (2m-n)(X - \frac{a+b}{2})A = 0$.
   On évalue en a, ce qui donne : $(2m-n)\frac{a-b}{2}A(a) = 0$. Dans le cas où A n'est pas nul, on sait qu'il n'a pas a pour racine donc $A(a) \neq 0$ et comme $a \neq b$, finalement : $n = 2m$ et n est donc bien pair.
   Deux cas se présentent donc, en ce qui concerne le noyau de f_n :

   - Premier cas : n est impair
     D'après ce qui précède $\operatorname{Ker} f_n = \{0\}$ et f_n est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
   - Deuxième cas : n est pair
     Le raisonnement précédent montre alors que $\operatorname{Ker} f_n$ est la droite engendrée par $(X-a)^{\frac{n}{2}}\,(X-b)^{\frac{n}{2}}$ et alors $\operatorname{rg} f_n = n$.