PROBLEME

n désigne un entier naturel non nul, (a, b) un élément de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}_n[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour tout P de $\mathbf{R}_n[X]$, on pose :

$$f_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P \qquad (*)$$

Prélimnaire

1. Rappeler sans démonstration la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Démontrer que $(*)$ définit un endomorphisme f_n de $\mathbf{R}_n[X]$

Partie I : Etude du cas $\mathbf{n = 1}$
Dans cette partie on pose donc $n = 1$ et on va étudier f_1.

1. Etude du cas $a \neq b$
   On suppose donc de plus, ici : $a \neq b$.
   a) Etude du noyau de f_1.
      Soit P dans $\operatorname{Ker} f_1$. Démontrer que P a au moins deux racines. En déduire $\operatorname{Ker} f_1$.
   b) Démontrer que f_1 est un automorphisme de $\mathbf{R}_1[X]$.
   c) Ecrire la matrice M_1 de f_1 relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_1[X]$. Comment retrouve-t-on le résultat précédent ?
   d) Démontrer que $(X-a, X-b)$ est une base de $\mathbf{R}_1[X]$ et écrire la matrice N_1 de f_1 dans cette base. En déduire que f_1 est la composée de deux transformations géométriques simples.
   e) Déduire de ce qui précède, le calcul des puissances de M_1.
   f) *Question réservée au 5/2*
      Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour retrouver le résultat de la question précédente.
2. Etude du cas $a = b$
   On suppose donc maintenant $a = b$.
   a) Calculer $f_1(1)$ et $f_1(a-X)$. En déduire que, dans une base à préciser, la matrice de f_1 est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   b) Préciser le noyau et l'image de f_1. f_1 est-il un automorphisme ?
   c) Quelles sont les puissances de l'endomorphisme f_1 ?
   d) Démontrer que f_1 est la composée d'une projection et d'une symétrie à préciser.

Partie II : Etude du cas $\mathbf{n = 2}$
Dans cette partie on pose donc $n = 2$ et on va étudier f_2.

1. Etude du cas $a \neq b$
   On suppose donc de plus, ici : $a \neq b$.
   a) Etude du noyau de f_2.
      Déterminer $\operatorname{Ker} f_2$.
   b) Calculer $f_2((X-a)^2)$. Quelle est l'image de f_2 ?
   c) Ecrire la matrice M_2 de f_2 relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. Utiliser M_2 pour retrouver le noyau et l'image de f_2.
   d) Démontrer que $\big((X-a)(X-b), (X-a)^2, (X-b)^2\big)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$ et écrire la matrice N_2 de f_2 dans cette base. En déduire que f_2 est la composée de trois transformations géométriques simples.

2. Etude du cas $a = b$
   On suppose donc maintenant $a = b$.

   a) Soit P dans $\operatorname{Ker} f_2$. Démontrer que a est racine au moins double de P. En déduire $\operatorname{Ker} f_2$.

   b) Quelle est l'image de f_2 ?

   c) Déterminer une base de $\mathbf{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f_2 est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III : Noyau de $\operatorname{Ker} \mathbf{f_n}$
On en vient au cas général, n est donc un entier au moins égal à 1 et on veut déterminer $\operatorname{Ker} f_n$.

1. Quel est le degré d'un polynôme non nul élément de $\operatorname{Ker} f_n$?

2. Soit R et S des pôlynômes non nuls éléments de $\operatorname{Ker} f_n$ de coefficients dominants respectifs r_n et s_n.
   Déterminer le polynôme $s_n R - r_n S$.
   Qu'en déduit-on pour la dimension de $\operatorname{Ker} f_n$ et pour le rang de f_n ?

3. On suppose ici : $a = b$ et on note encore P un élément de $\operatorname{Ker} f_n$. Démontrer que P a une racine au moins double.
   Calculer $f_n((X-a)^n)$ et en déduire $\operatorname{Ker} f_n$.

4. On suppose maintenant : $a \neq b$ et on note P un élément de $\operatorname{Ker} f_n$.
   Démontrer que P a au moins deux racines.
   Démontrer que P s'écrit $(X-a)^m(X-b)^m A$ où m est une entier naturel vérifiant $2 \leqslant 2m \leqslant n$ et A est soit le polynôme nul soit un polynôme de degré $n-2m$ n'ayant ni a ni b comme racine.
   Calculer alors $f_n(P)$ et en déduire que si A n'est pas nul alors n est pair.
   Quel est $\operatorname{Ker} f_n$?