PSI* 08/09 - Devoir 3 - Corrigé

On note I_3 la matrice unité de $M_3(\mathbf{R})$ et si a, b et c sont des réels , $diag(a,b,c)$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Première partie

1. **Etude de m**.

   a) Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice conservent son rang. On fait subir à M les opérations : $C_1 \leftarrow C_1 + 4C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ et l'on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ laquelle est clairement de rang 2. Donc $\mathrm{rg}(m) = 2$ et puisque l'on a travaillé sur les colonnes de M :
   $$\operatorname{Im} m = \mathrm{Vect}((0,1,1), (-4,5,-7))$$
   Les opérations élémentaires précédentes montrent de plus : $m(1,-2,2) = 0$ et comme $Kerm$ est une droite (Théorème du rang), on conclut : $\operatorname{Ker} m = \mathrm{Vect}(1,-2,2)$.

   b) En observant comme ci-dessus les matrices $M - I_3$ et $M - 4I_3$, on obtient, avec les notations de 1.c) :
   $$\operatorname{Ker}(m - e) = \mathrm{Vect}(u_2) \text{ et } \operatorname{Ker}(m - 4e) = \mathrm{Vect}(u_3)$$

   c) On a : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$. La matrice D est alors immédiate grâce à 1.a) et 1.b) :
   $$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui répond à la question puisque $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice relativement à (u_1, u_2, u_3) de la projection sur $\mathrm{Vect}(u_2, u_3)$ suivant $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, celle de l'affinité par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ suivant $\mathrm{Vect}(u_3)$ et de rapport 4.

2. **Etude des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ qui commutent avec m**.
   On pose $C(m) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3),\ f \circ m = m \circ f\}$.

   a) L'application de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ vers $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ définie par $(f \mapsto f \circ m - m \circ f)$ est facilement linéaire et $C(m)$ est son noyau donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.

   b)
   - *Première méthode* (calculatoire)
     On considère une matrice quelconque, X, de $M_3(\mathbf{R})$: $X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$. On évalue XM et MX :
     $$XM = \begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & 4x_{1,3} \\ 0 & x_{2,2} & 4x_{2,3} \\ 0 & x_{3,2} & 4x_{3,3} \end{pmatrix} \quad MX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ 4x_{3,1} & 4x_{3,2} & 4x_{3,3} \end{pmatrix}$$
     On en déduit que X et D commutent si, et seulement si, $x_{2,1} = x_{3,1} = x_{1,2} = x_{3,2} = x_{1,3} = x_{2,3} = 0$ c'est à dire si, et seulement si, X est diagonale.
   - *Deuxième méthode* (sans calcul)
     On considère une matrice quelconque, X, de $M_3(\mathbf{R})$ et on note x l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice X relativement à la base (u_1, u_2, u_3). Si X et D commutent alors x et m commutent et donc les sous-espaces propres de m sont stables par x. Or $\mathrm{Vect}(u_1)$, $\mathrm{Vect}(u_2$ et $\mathrm{Vect}(u_3)$ sont sous-espaces propres de m associés respectivement à 0, 1 et 4. Ces trois droites sont donc stables par x donc dirigées par des valeurs propres de x, ce qui prouve que X est diagonale. La réciproque est immédiate, si X est diagonale alors elle commute avec toute matrice diagonale donc avec D.

c) On note $\mathcal{D}$, le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$ constitué des matrices diagonales. La question précédente montre que l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} C(m) & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ x & \mapsto & Mat\,((u_1,u_2,u_3)\,;\,x) \end{array}$$

où $Mat\,((u_1,u_2,u_3)\,;\,x)$ est la matrice de x relativement à la base (u_1,u_2,u_3) est bijective.
On en déduit : $\dim C(m) = \dim \mathcal{D} = 3$ puisque $C(m)$ et $\mathcal{D}$ sont isomorphes.

d) Il suffit de trouver les antécédents par l'isomorphisme ci-dessus des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{D}$. Une base de $C(m)$ est donc (p_1,p_2,p_3) avec

$$\begin{cases} p_1 \text{ est la projection sur } \operatorname{Vect}(u_1) \text{ suivant } \operatorname{Vect}(u_2,u_3) \\ p_2 \text{ est la projection sur } \operatorname{Vect}(u_2) \text{ suivant } \operatorname{Vect}(u_3,u_1) \\ p_3 \text{ est la projection sur } \operatorname{Vect}(u_3) \text{ suivant } \operatorname{Vect}(u_1,u_2) \end{cases}$$

e) D'abord tout polynôme en m commute avec m donc : $\{P(m),\, P \in \mathbf{R}_2[X]\} \subset C(m)$.
Réciproquement, soit x dans $C(m)$, d'après 2.b) $Mat\,((u_1,u_2,u_3)\,;\,x)$ est diagonale :

$$Mat\,((u_1,u_2,u_3)\,;\,x) = diag(\alpha,\beta,\gamma)$$

On sait (polynômes interpolateurs de Lagrange) qu'il existe un (unique) polynôme de $\mathbf{R}_2[X]$, L, tel que :

$$\begin{cases} L(0) = \alpha \\ L(1) = \beta \\ L(4) = \gamma \end{cases}$$

On en déduit $diag(\alpha,\beta,\gamma) = L\,(D)$, soit : $x = L(m)$ et finalement : $C(m) = \{P(m),\, P \in \mathbf{R}_2[X]\}$.

3. **Etude de l'équation $\mathbf{X^2 = M}$ dans $\mathbf{M_3}(\mathbf{R})$.**

a) P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à (u_1,u_2,u_3), elle est donc inversible.

b) On suppose qu'il existe une matrice N de $M_3(\mathbf{R})$ telle que : $N^2 = M$ et on pose $\Delta = P^{-1}NP$.

i. $\Delta^2 = P^{-1}NPP^{-1}NP = P^{-1}N^2P = P^{-1}MP$, donc d"après les formules de changement de bases : $\Delta^2 = D$.

ii. D est un polynôme en Δ donc D et Δ commutent.

iii. D'après 2.b), Δ est diagonale d'où les 4 matrices possibles :

$$diag(0,1,2),\ diag(0,1,-2),\ diag(0,-1,2),\ diag(0,-1,-2)$$

c) On vérifie que les les quatre matrices trouvées ci-dessus vérifient $\Delta^2 = D$, ce qui donne quatre endomorphismes x solutions de $x \circ x = m$ et donc quatre solutions $X^2 = M$ dans $M_3(\mathbf{R})$.

d) La somme des quatre matrices diagonales trouvées est la matrice nulle, donc la somme des solutions de $X^2 = M$ est 0.
Le produit des quatre matrices diagonales trouvées est D^2, donc le produit des solutions de $X^2 = M$ est M^2.

e) Conférer en annexe, une solution sous Maple.

4. **Calcul des puissances de $\mathbf{M}$.**

Pour tout n de $\mathbf{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$ (formule de changement de bases) et D^n est immédiate d'où :

$$M^n = \begin{pmatrix} 4^{n+1} & 4^n & -4^n \\ -2-4^{n+1} & -4^n & 1+4^n \\ -2+2.4^{n+1} & 2.4^n & 1-2.4^n \end{pmatrix}$$

Il est impossible de généraliser à n dans $\mathbf{Z}$ puisque M n'est pas inversible.

Deuxième partie

1. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Il s'agit de trouver une base (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$ telle que : $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. Or facilement, on a : $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}((1, -1))$ et $u(1, 0) = (-1, 1)$. On pose donc $e_1 = (1, -1)$ et $e_2 = (1, 0)$. On constate que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ et la matrice de u dans cette base est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui termine la question.

2. Soit A une matrice non nulle de $M_2(\mathbf{R})$ de carré nul et a son endomorphisme canoniquement associé. Il s'agit de trouver une base (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$ telle que : $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. Or on a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ puisque $A^2 = 0$ et donc $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$. Le théorème du rang montre donc $rg(u) \leqslant 1$ et même puisque $u \neq 0$: $\operatorname{rg}(u) = 1$. De là on déduit que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont les mêmes droites vectorielles. Notons e_1 un vecteur de base de cette droite, on a : $u(e_1) = 0$, mais puisque e_1 est dans $\operatorname{Im} u$, on peut choisir un vecteur e_2 tel que $u(e_2) = e_1$. Il ne reste plus qu'à vérifier que la famille (e_1, e_2) est libre. Or si e_2 était colinéaire à e_1, on aurait $e_2 \in \operatorname{Ker} u$ et donc $u(e_2) = 0$, ce qui est contradictoire. Finalement : A est semblable à : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Notons, à nouveau, u l'endomorphisme canoniquement associé à A et (c_1, c_2, c_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On a $u(c_2) = c_1$, $u(c_1) = c_3$ et $u(c_3) = c_2$ ce qui montre que dans la base (c_2, c_1, c_3), la matrice de u est A^2. A est donc semblable à A^2.

4. Soit b dans $\mathbf{R}^*$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & b & b \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On procède de même en notant encore u l'endomorphisme canoniquement associé à B. On cherche d'abord un vecteur e_1 tel que $u(e_1) = -e_1$. On constate (quitte à résoudre un petit système) que $e_1 = (0, 1, -1)$ convient. On cherche alors un vecteur e_2 tel que : $u(e_2) = -e_2 + e_1$. On résout le système obtenu et on constate que $e_2 = (-1, 0, 0)$ convient. On cherche alors un vecteur e_3 tel que $u(e_3) = -e_3 + e_2$, ce qui mène à un nouveau système dont $e_3 = (0, -\frac{1}{b}, 0)$ est solution. Enfin, on vérifie que la famille (e_1, e_2, e_3) est bien un base de $\mathbf{R}^3$ en calculant, par exemple, son déterminant, d, dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$:

$$d = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{b} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{b} \neq 0$$

En conclusion B est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Soit M dans $M_n(\mathbf{R})$, telle que : $\begin{cases} M^n = 0 \\ M^{n-1} \neq 0. \end{cases}$. On note une dernière fois u l'endomorphisme canoniquement associé à M et on cherche une base $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que : $\begin{cases} u(e_1) = 0 \\ u(e_2) = e_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = e_{n-1} \end{cases}$, ce qui s'écrit encore : $\begin{cases} u(e_n) = e_{n-1} \\ u^2(e_n) = e_{n-2} \\ \vdots \\ u^{n-1}(e_n) = e_1 \\ u^n(e_n) = 0 \end{cases}$. Or, par hypothèse, il existe un vecteur x non nul tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.
Posons alors : $e_n = x$, $e_{n-1} = u(x)$, $e_{n-2} = u^2(x)$,..., $e_1 = u^{n-1}(x)$. La famille obtenue remplit les conditions voulues pourvu que ce soit une base de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire qu'il reste à vérifier sa liberté. On forme donc une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille et on suppose qu'elle est nulle :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{k-1}(x) = 0$$

On y applique u^{n-1} ce qui donne compte tenu que toutes les puissances de u supérieures ou égales à n sont nulles : $\alpha_1 u^{n-1}(x) = 0$, puis $\alpha_1 = 0$. On itère le procédé (la somme débute à $k = 2$ et on applique u^{n-2}), on obtient $\alpha_2 = 0$ et puis successivement tous les coefficients sont nuls, ce qui termine la question et le problème.

Annexe
Une solution sous Maple de la question 2.e)

```
> restart:with(LinearAlgebra):
> M:=Matrix(3,3,[[16,4,-4],[-18,-4,5],[30,8,-7]]);V:=Vector([0,epsilon1,2*epsilon2]);Delta:=Matrix(
shape=diagonal);
```

$$M := \begin{bmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathit{epsilon1} \\ 2\,\mathit{epsilon2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathit{epsilon1} & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\mathit{epsilon2} \end{bmatrix}$$

```
> P:=Matrix(3,3,[[1,0,1],[-2,1,-1],[2,1,2]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> X:=P.Delta.P**(-1);
```

$$X := \begin{bmatrix} 8\,\mathit{epsilon2} & 2\,\mathit{epsilon2} & -2\,\mathit{epsilon2} \\ -2\,\mathit{epsilon1} - 8\,\mathit{epsilon2} & -2\,\mathit{epsilon2} & \mathit{epsilon1} + 2\,\mathit{epsilon2} \\ -2\,\mathit{epsilon1} + 16\,\mathit{epsilon2} & 4\,\mathit{epsilon2} & \mathit{epsilon1} - 4\,\mathit{epsilon2} \end{bmatrix}$$

```
> solutions:=seq(seq(subs(epsilon1=k,epsilon2=h,X),k=-1,1),h=-1,1);
```

$$\mathit{solutions} := \left\{ \begin{bmatrix} -8 & -2 & 2 \\ 10 & 2 & -3 \\ -14 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \\ -18 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & 1 \\ 18 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ -10 & -2 & 3 \\ 14 & 4 & -3 \end{bmatrix} \right\}$$

```
> somme:=evalm(add(solutions[i],i=1..4));
```

$$\mathit{somme} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> verifproduit=solutions[1].solutions[2].solutions[3].solutions[4]-M**2;
```

$$\mathit{verifproduit} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Question I.4.

```
> Dn:=Matrix(3,Vector([0,1,4^n]), shape=diagonal);:Mn:=P.Dn.P^(-1);
```

$$\mathit{Dn} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix}$$

$$Mn := \begin{bmatrix} 4\,4^n & 4^n & -4^n \\ -2-4\,4^n & -4^n & 1+4^n \\ -2+8\,4^n & 2\,4^n & 1-2\,4^n \end{bmatrix}$$

```
> inverseP:=P^(-1);
```

$$inverseP := \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

FIN