But: Le but ce problème est d'illustrer sur des exemples la notion de matrices semblables. On rappelle que deux matrices sont semblables quand elles représentent le même endomorphisme.

Première partie

On considère dans $M_3(\mathbf{R})$ la matrice M suivante : $\begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et on note m son endomorphisme canoniquement associé. On note également e l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$.

1. **Etude de m**.
   a) Déterminer les rang, noyau et image de m.
   b) Déterminer $\mathrm{Ker}(m-e)$ et $\mathrm{Ker}(m-4e)$
   c) On pose $u_1 = (1,-2,2)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,-1,2)$. Vérifier que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et écrire la matrice D de m dans cette base. M et D sont donc des matrices semblables.
   d) Démontrer que m est la composée commutative d'une projection et d'un affinité que l'on précisera.
2. **Etude des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ qui commutent avec m**.
   On pose $C(m) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3),\ f \circ m = m \circ f\}$.
   a) Démonter que $C(m)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
   b) Démontrer qu'une matrice de $M_3(\mathbf{R})$ commute avec D si, et seulement si, elle est diagonale.
   c) En déduire la dimension de $C(m)$.
   d) Exhiber une base de $C(m)$ et caractériser géométriquement les éléments qui la constituent.
   e) Démontrer : $C(m) = \{P(m),\ P \in \mathbf{R}_2[X]\}$.
3. **Etude de l'équation $\mathbf{X^2 = M}$ dans $\mathbf{M_3(R)}$**.
   a) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, que l'on note P, est-elle inversible ?
   b) On suppose qu'il existe une matrice N de $M_3(\mathbf{R})$ telle que : $N^2 = M$ et on pose $\Delta = P^{-1}NP$.
      i. Que vaut Δ^2 ?
      ii. Démontrer que Δ commute avec D.
      iii. En déduire les valeurs possibles de Δ.
   c) Quel est le nombre de solutions de $X^2 = M$ dans $M_3(\mathbf{R})$? (On ne demande pas le calcul explicite des solutions)
   d) Calculer, s'il y a lieu en fonction de M, la somme et le produit de ces solutions.
   e) Calculer explicitement les solutions (utiliser les calculatrices) et vérifier les résultats de la question précédente.
4. **Calcul des puissances de M**.
   Calculer M^n pour tout n de $\mathbf{N}$. Peut-on généraliser à n dans $\mathbf{Z}$?

Deuxième partie

Après avoir illustrer en première partie l'intérêt de la notion de matrices semblables, cette deuxième partie propose des exemples de matrices semblables. Pour répondre à cette partie, il sera bon, pour toute matrice donnée, de considérer son endomorphisme canoniquement associé.

1. Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Plus généralement, démontrer que tout matrice non nulle de $M_2(\mathbf{R})$ de carré nul est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que A est semblable à A^2.

4. Soit b dans $\mathbf{R}^*$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & b & b \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Démontrer que toute matrice M de $M_n(\mathbf{R})$, telle que : $\begin{cases} M^n = 0 \\ M^{n-1} \neq 0. \end{cases}$, est semblable à la matrice A avec : $A = (a_{p,q})$ où le coefficient $a_{p,q}$ de la $p^{\text{ème}}$ligne et $q^{\text{ème}}$colonne est défini par : $\begin{cases} \text{si q=p+1, } a_{p,q} = 1 \\ \text{sinon } a_{p,q} = 0. \end{cases}$

FIN