ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2011
Institut National des Postes et Télécommunications
INPT

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2011

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice

On note I l'un des intervalle $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ et on considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0. \tag{$\mathcal{H}$}$$

1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour que la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ soit une solution sur I de $(\mathcal{H})$.
2. Déterminer $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ soit solution sur I de $(\mathcal{H})$.
3. Préciser l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{H})$.
4. L'équation différentielle $(\mathcal{H})$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ autres que la solution nulle ?
5. Déterminer $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ soit solution sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{L})$
$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{1+x^2}. \tag{$\mathcal{L}$}$$
6. Rappeler la structure de l'ensemble des solutions sur I de l'équation $(\mathcal{L})$ et le préciser.
7. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 ; on précisera les coefficients de cette série entière ainsi que son rayon de convergence.
8. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et la préciser.