Exercice : Résolution d'une équation différentielle

1. Notons $y_\alpha(t) = t^\alpha$, alors y_α est solution de (H) sur I si et seulement si
$$\forall\, t \in I,\quad t^2 y_\alpha''(t) + 3t y_\alpha'(t) + y_\alpha(t) = 0 \Longleftrightarrow \forall\, t \in I,\quad t^\alpha\left(\alpha^2 + 2\alpha + 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -1$$
Ainsi $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est la seule solution sur I de (H) qui soit de la forme $t \longmapsto t^\alpha$.

2. Un calcul simple donne : $\forall\, t \in I,\ t\lambda''(t) + \lambda'(t) = \left(t\lambda'(t)\right)' = 0$, càd :
il existe $A \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in I,\ t\lambda'(t) = A$, en intégrant une seconde fois :
$$\exists\, A, B \in \mathbb{R},\quad \lambda(t) = A \ln|t| + B$$
Ainsi les solutions de (H) sur I de la forme $\dfrac{\lambda(t)}{t}$ sont
$$y(t) = \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t},\ \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

3. (H) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène dont les coefficients sont continues sur I avec celui de y'' : $x \longmapsto x^2$ ne s'annule jamais sur I, ainsi l'ensemble $S_H(I)$ des solutions de (H) sur I est $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2, contenant la famille libre $\left(\dfrac{\ln|t|}{t}, \dfrac{1}{t}\right)$ des deux fonctions trouvées à la question (2). D'où $S_H(I) = vect\left(\dfrac{\ln|t|}{t}, \dfrac{1}{t}\right)$.
Ainsi les solutions de (H) sur I sont
$$y(t) = \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t},\ \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

4. Il s'agit ici de prolonger les solutions obtenues en 0. Or on a $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{A\ln|t|}{t} + \dfrac{B}{t}$ existe si et seulement si $A = B = 0$ puisque $\dfrac{1}{t} = o\left(\dfrac{\ln|t|}{t}\right)$ en 0. La seule solution sur $\mathbb{R}$ de (H) est la solution nulle.

5. Ce calcul est déjà fait à la question (2), $t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ est solution de (L) si et seulement si
$$\forall\, t \in I,\ t\lambda''(t) + \lambda'(t) = \left(t\lambda'(t)\right)' = \frac{1}{1+t^2}$$
Une première intégration donne : $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in I,\ t\lambda'(t) = \arctan(t) + A. \quad (1)$

[1]

La fonction $t \longmapsto \dfrac{\arctan(t)}{t}$ est continue sur I et admet une limite finie en 0, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$, soit

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du, \text{ la primitive s'annulant en } 0$$

Une deuxième intégration de (1) donne :

$$\exists\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, B \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in I,\ \lambda(t) = \phi(t) + A \ln|t| + B$$

6. L'espace $S_L(I)$ des solutions de (L) sur I est plan affine de direction $S_H(I)$: $S_L(I) = y_p + S_H(I)$, où $y_p(t) = \dfrac{\phi(t)}{t} = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du$ une solution particulière de (L) et $S_H(I) = vect\left(\dfrac{\ln|t|}{t}, \dfrac{1}{t}\right)$.

7. **Méthode 1 :** La solution générale de (L) sur I est :

$$y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du + \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t}, \text{ où } A, B \in \mathbb{R}$$

On a $\forall u \in \left]-1,1\right[$, $\dfrac{\arctan(u)}{u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{2n+1}$ est la somme d'une série entière de rayon 1, donc s'intégre terme à terme sur $\left]-1,1\right[$, donc

$$\forall t \in \left]-1,1\right[,\ y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)^2} + \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t}, \text{ où } A, B \in \mathbb{R}$$

Ainsi la seule solution DSE à l'origine est :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)^2},\ R = 1 \text{ selon D'Alembert et } a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},\ a_{2n+1} = 0$$

Méthode 2 : Soit $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, alors y est solution de (L) sur $\left]-R,R\right[$ si et seulement si

$$\forall\, x \in \left]-R,R\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Par unicité d'un développement en série entière ceci est réalisé si et seulement si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \text{ et } a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

on retrouve la solution $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)^2}$, définie sur $\left]-1,1\right[$.

8. On a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du = \lim_{t\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)^2} = 1$$

Donc $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du + \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t}$ existe si et seulement si $A = B = 0$.

Ainsi $y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (coïncident avec la somme d'une série enitère sur $\left]-1,1\right[$ et produit de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^*$), elle est donc la seule solution de (L) sur $\mathbb{R}$ tout entier.