Plan

****

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espace vectoriel - sous espace vectoriel

1.1 Notion d'espace vectoriel

***Définition* 1.1.** On appelle Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}-$ espace vectoriel ,tout triplet $(E,+,.)$ où E est un ensemble non vide, $+$ est une loi de composition interne sur E et . est une une loi de composition externe sur E à base dans $\mathbb{K}$ c.à. d une application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

telles que

(1) $(E,+)$ est un groupe commutative

(2) pour tout $x,y\in E$ et pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

- **(i)** $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
- **(ii)** $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$
- **(iii)** $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

(2) pour tout $x\in E$; $1_{\mathbb{K}}x=x$

Vocabulaire :

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel (en abrégé : $\mathbb{K}$.e.v).

- Les éléments de E sont appelés vecteurs.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.
- L'élément neutre de l'addition $+$ de E est noté 0_E' ou tout simplement 0, et appelé vecteur nul.
- L'inverse d'un élément x de E pour l'addition se note $-x$: $x+(-x)=0_E$.
- La multiplication par un scalaire $\lambda.x$ est souvent notée avec absence de loi : λx.

Proposition 1.1 (Règles de calculs)**.** Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

1. $\forall x \in E;\quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K};\quad \lambda.0_E = 0_E.$
3. $\forall x \in E;\quad (-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
4. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K};\quad [\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E].$
5. $\forall x \in E\setminus\{0_E\}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K};\quad [\lambda.x = \mu x \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu].$
6. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}^*;\quad [\lambda.x = \lambda y \Leftrightarrow \quad x = y].$

1.2 Exemples de références

***Exemple* 1.1** (L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}-$ e.v, pour les lois + et . définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n \forall \lambda \in \mathbb{K} \begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

Le vecteur nul $\mathbb{K}^n$ est $0_{\mathbb{K}}^n = (0, \dots, 0)$.

***Exemple* 1.2** (L'espace vectoriel produit)**.** Plus généralement si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1, \dots, x_n) / \forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i \in E_i\}.$$

le produit cartésien des E_i ; alors E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel pour les lois :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in E \forall \lambda \in \mathbb{K} \begin{cases} x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

Le vecteur nul $\mathbb{K}^n$ est $0_{\mathbb{K}}^n = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Remarque 1.1. Lorsque $E_1 = \dots = E_n = E$ alors l'espace vectoriel $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est noté E^n.

***Exemple* 1.3** (L'espace vectoriel $\mathbb{K}^D$)**.** Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble K^D des applications de D à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}-$ e.v pour les lois :

$$\forall f \in \mathbb{K}^D, \forall g \in \mathbb{K}^D \forall \lambda \in \mathbb{K} \begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) & (\forall x \in D) \\ \lambda f(x) = \lambda f(x) & (\forall x \in D) \end{cases}$$

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^D$ est la fonction nulle sur D : $0_{\mathbb{K}^D} : D \to \mathbb{K}, x \mapsto 0$.

***Exemple* 1.4** (L'espace vectoriel des suites numériques $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$)**.** l'ensemble $K^{\mathbb{N}}$ des suites numériques à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}-$ e.v pour les lois :

$$\forall u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall v = (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \forall \lambda \in \mathbb{K} \begin{cases} u + v = (u_n + v_n) \\ \lambda u = (\lambda u_n) \end{cases}$$

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle : $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} : (0)_{n \in \mathbb{N}}$.

***Exemple* 1.5** (L'espace vectoriel E^X)**.** Plus généralement , si X est un ensemble non vide et E est un $\mathbb{K}-$ e. v alors lensemble E^X des applications de X à valeurs dans E est un $\mathbb{K}-$ e.v pour les lois :

$$\forall f \in E^X, \forall g \in E^X \forall \lambda \in \mathbb{K} \begin{cases} (f+g)(x) = f(x)+g(x) & (\forall x \in X) \\ \lambda f(x) = \lambda f(x) & (\forall x \in X) \end{cases}$$

Le vecteur nul de E^X est la fonction nulle sur X : $0_{E^X} : X \to E, x \mapsto 0_E$.

***Exemple* 1.6** (Le $\mathbb{K}-$ e.v $\mathbb{K}[X]$). $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}-$ e.v pour l'addition usuelle des polynômes et la multiplication : $(\lambda, P) \mapsto \lambda P$ obtenue en multipliant le polynôme P par la constante λ .

***Exemple* 1.7** (Le $\mathbb{K}-$ e.v $\mathbb{K}(X)$). $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}-$ e.v pour l'addition usuelle des fractions rationnelles et la multiplication : $(\lambda, F) \mapsto \lambda F$ obtenue en multipliant la fraction F par la constante λ .

Commentaire :

Dans la suite, lorsqu on se réfère à l'un des exemples cités précédemment, on supposera que ses lois et son vecteur nul sont connues, il faut donc **les retenir !!**

1.3 Sous - espaces vectoriel

***Définition* 1.2** (s.e.v). Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\boxed{F \subset E}$. On dit que F est un sous espace vectoriel (**sev**) de E si

$$\begin{cases} (i) & F \neq \emptyset \\ (ii) & \forall x, y \in F \quad \boxed{x+y \in F} \\ (ii) & \forall x \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad , \boxed{\lambda . x \in F} \end{cases}$$

Remarque 1.2. • Si F est un sous espace vectoriel (**sev**) de E alors les lois + et. induisent des lois sur F de sorte que $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}-$ e.v . Ainsi un s.e.v est un e.v

• Dans la pratique , pour montrer qu'un ensemble est est espace vectoriel , il suffit de montrer que c'est un **s.e.v** d'un espace vectoriel connue

Proposition 1.2 (Caractérisation). Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\boxed{F \subset E}$

F est un **sev** de E si et seulement si $\begin{cases} 1) & 0_E \in F \\ 2) & \forall x, y \in F \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad , \boxed{\lambda . x + \mu . y \in F} \end{cases}$

***Exemple* 1.8.**
1. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v du $\mathbb{K}$-ev E, on les appelles les sous espaces triviaux de E.
2. $C(I, \mathbb{K})$,$C^n(I, \mathbb{K})$, $D^n(I, \mathbb{K})$ et $C^\infty(I, \mathbb{K})$ sont des s.e.v de $\mathbb{K}^I$
3. $\mathbb{K}_n[X]$ est un s.e.v de $(\mathbb{K}[X], +, .)$

***Exercice* 1.** Montrer que F_i est un espace vectoriel dans les cas suivants
1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$;
2. $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z = 4t\}$;
3. $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = P(2)\}$;
4. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A|P\}$;
5. F_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
6. $F_6 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - n u_n\}$.

Solution : 1. • $(0,0,0) \in F_1$
• Soient $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$ éléments de F_1et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $X+\lambda X'=(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$ est aussi élément de F_1 . En effet,

$$(x+\lambda x')+(y+\lambda y')+3(z+\lambda z')=(x+y+3z)+\lambda(x'+y'+3z')=0.$$

Ainsi F_1 est s.e.v de $\mathbb{R}^3$ donc c'est un $\mathbb{R}$e.v.

2. • $(0,0,0) \in F_2$
• Soient $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$ éléments de F_2et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $X+\lambda X'=(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$ est aussi élément de F_2 . En effet,
$$x+\lambda x'=y+\lambda y'=2(z+\lambda z')=4(t+\lambda t').$$
Ainsi F_2 est s.e.v de $\mathbb{R}^4$ donc c'est un $\mathbb{R}$e.v.
3. On va prouver que F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Pour cela,
   - $0_{\mathbb{R}[X]} \in F_3$
   - Soient P et Q deux éléments de F_3, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(P+\lambda Q)(0)=P(0)+\lambda Q(0)=P(2)+\lambda Q(2)=(P+\lambda Q)(2)$ et donc $P+\lambda Q \in F_3$
4. On va prouver que F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Pour cela,
   - $0_{\mathbb{R}[X]} \in F_4$
   - Soient P et Q deux éléments de F_4, et $\lambda \in \mathbb{R}$. on a $A|P$ et $A|Q$ donc $A|(P+\lambda Q)$ par suite $(P+\lambda Q) \in F_3$
5. Remarquons d'abord que F_5 est une partie de $C^1(I,\mathbb{R})$ est que la fonction nulle est bien solution de l'équation différentielle. Soient y_1, y_2 deux solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $y=y_1+\lambda y_2$. Alors
$$y'+a(x)y=(y_1'+a(x)y_1)+\lambda(y_2'+a(x)y_2)=0$$
ce qui prouve que $y \in F_5$. Ainsi, F_5 est un sous-espace vectoriel de $C^1(I,\mathbb{R})$.
6. Remarquons d'abord que F_6 est une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est que la suite nulle est dans F_6. Soient $u=(u_n), v=(v_n)$ deux suites de F_6 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $w=u+\lambda v=(u_n+\lambda v_n)$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+2}=u_{n+2}+\lambda v_{n+2}=u_{n+1}-nu_n+\lambda(v_{n+1}-nv_n)=(u_{n+1}+\lambda v_{n+1})-n(u_n+\lambda v_n)=w_{n+1}-nw_n$$
ce qui prouve que $w \in F_6$. Ainsi, F_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

***Exercice* 2.** justifier que les ensembles suivants ne sont pas des sous-espaces vectoriels

1. $E_1=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+3z=2\}$;
2. $E_2=\{P \in \mathbb{R}[X];\ P'(0)=2\}$;
3. $E_3=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \leq y\}$;
4. $E_4=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy=0\}$;
5. $E_5=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y=x^2\}$;

Solution : 1. E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(0,0,0)$ n'est pas élément de E_1.
2. E_2 n'est pas un espace vectoriel car le polynôme nul n'est pas élément de E_2.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel car $(-1,1) \in E_3$ mais $-(-1,1)=(1,-1) \notin E_3$.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. En effet, $X=(1,0)$ et $Y=(0,1)$ sont tout les deux éléments de E_4, mais $X+Y=(1,1)$ n'est pas élément de E_4.
5. Les éléments $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0,2)$ qui n'est pas élément de E_5 : E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est une droite passant par $(0,0)$, ou $\mathbb{R}^2$ lui-même, ou encore le singleton $\{(0,0)\}$.. E_5 est une parabole et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

□

***Exercice* 3.** Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$

Solution : • Si $F \subset G$, $F \cup G=G$ est un sous-espace vectoriel ce qui prouve une implication.
• Réciproquement, supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et que F n'est pas inclus dans G et G n'est pas inclus dans F. Prenons x dans $F \backslash G$ et y dans $G \backslash F$. Alors, puisque $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition et donc $x+y \in F \cup G$. Mais, si $x+y$ est dans F, alors $y=(x+y)-x \in F$ (car F est un sev) ce qui n'est pas le cas. De même, si $x+y$ est dans G, alors $x=(x+y)-y \in G$ ce qui est impossible. On obtient donc une contradiction et l'autre implication. □

Remarque 1.3. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors C_E^F n'est pas s.e.v puisqu'il ne contient pas 0_E

Théorème 1.1. Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous espaces vectoriels de E. Alors

$$\boxed{\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est sous espace vectoriel de } E}$$

Preuve : Posons $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ alors

- $0 \in F$ puisque pour tout $i \in I$, F_i est s.e.v donc contient 0.
- Soit $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x + \lambda y \in F$ car pour tout $i \in I$, $x, y \in F_i$ et F_i s.e.v donc $x + \lambda y \in F_i$

On rappel que :

$$\boxed{x \in \bigcap_{i\in I} F_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I;\ \ x \in F_i}$$

□

1.4 Combinaison linéaire - Sous-espace vectoriel engendre par une partie

***Définition* 1.3.** Soit E un espace vectoriel et soient $(u_1, ..., u_n)$ une famille finie d'éléments de E. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $u_1, ..., u_n$ tout vecteur x de E qui est de la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \qquad \text{où} \ \ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, ..., u_n$ est noté $\text{Vect}(u_1, u_2 \ldots, u_n)$:

$$\begin{aligned} \text{Vect}(u_1, u_2 \ldots, u_n) &= \left\{x \in E \,\middle|\, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \,\middle|\, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n\right\} \end{aligned}$$

***Exemple* 1.9.**

1. Dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \text{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$.
2. si $u \in E$, $\quad \text{Vect}(u) = \{\lambda u / \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}.u$ et on a

$$v \in \text{Vect}(u) \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad v = \lambda u$$

Proposition 1.3. Soit $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ une famille d' un $\mathbb{K}-$e.v E.Alors

1. $\text{Vect}(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $x_1, x_2 \ldots, x_n$ sont dans F alors

$$\text{Vect}(x_1, x_2 \ldots, x_n) \subset F$$

Ainsi $\text{Vect}(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ le plus petit sous espace vectoriel de E contenant les vecteurs $x_1, x_2 \ldots, x_n$. On l'appelle le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$.

***Définition* 1.4.** Soit A une partie d'un $\mathbb{K}-$e.v E. L'intersection de tous les s.e.v de E contenant A est un s.e .v de E . On l'appelle sous-espace vectoriel de E engendré par A et on le note Vect(A). Ainsi

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{F sev; A\subset F} F$$

Remarque 1.4. On montre que

$$x \in \text{Vect}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists a_1, ..., a_n \in A, \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

***Exemple* 1.10.**

1. $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}((X^k)_{k\in\mathbb{N}})$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire de $(1, X, ..., X^n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$
2. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$

Remarque 1.5. Une façon de montrer que F est s.e.v est de montrer que $F = \text{Vect}(A)$ où A est une partie de A.

***Exemple* 1.11.** Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad |z = x + y\}$.

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) \in F \quad &\Leftrightarrow \quad z = x + y \\ &\Leftrightarrow \quad u = (x, y, x + y) \\ &\Leftrightarrow \quad u = x(1,0,1) + y(0,1,1) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \{x(1,0,1) + y(0,1,1) | x, y \in \mathbb{R} = \text{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$ donc F est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendre par les vecteurs $u_1 = (1,0,1)$ et $u_2 = (0,1,1)$.

***Exercice* 4.** Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad |x + y = 0\}$. Posons $u = (1,-1,0,0)$ et $v = (0,0,1,2,)$. Montrer que

$$\text{Vect}(u, v) \subset F$$

Solution : Il suffit de remarquer que u et v appartiennent à F et que F est sous espace vectoriel pour conclure que $\text{Vect}(u, v) \subset F$. □

***Exercice* 5.** Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1,1,3)$, $u_2 = (1,-1,-1)$, $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (2,-1,0)$. Montrer que $\text{vect}(u_1, u_2) = \text{vect}(v_1, v_2)$.,

Solution : Pour montrer que $\text{vect}(u_1, u_2) \subset \text{vect}(v_1, v_2)$, il suffit de montrer que u_1 et u_2 sont tous deux combinaison linéaire de v_1 et v_2. L'équation $u_1 = xv_1 + yv_2$ est équivalente à

$$\begin{cases} 1 &= x + 2y \\ 1 &= -y \\ 3 &= x \end{cases}$$

dont la solution est donnée par $x = 3$ et $y = -1$. L'équation $u_2 = xv_1 + yv_2$ est équivalente à

$$\begin{cases} 1 &= x + 2y \\ -1 &= -y \\ -1 &= x \end{cases}$$

dont la solution est donnée par $x = -1$ et $y = 1$. Donc, $\text{vect}(u_1, u_2) \subset \text{vect}(v_1, v_2)$. Réciproquement, pour prouver que $\text{vect}(v_1, v_2) \subset \text{vect}(u_1, u_2)$, il suffit de prouver que v_1 et v_2 sont combinaison linéaire de u_1 et u_2. L'équation $v_1 = xu_1 + yu_2$ est équivalente à

$$\begin{cases} 1 &= x + y \\ 0 &= x - y \\ 1 &= 3x - y. \end{cases}$$

On résoud ce système en faisant $L_1 + L_2$ qui donne $x = 1/2$, on obtient ensuite $y = 1/2$ et on vérifie que cela fonctionne dans la dernière équation. De même, on peut prouver que v_2 est combinaison linéaire de u_1 et u_2. □

***Exercice* 6.** Soit E un $\mathbb{K}$ ev et $u,v \in E$. Montrer que

$$\text{Vect}(u,v) = \text{Vect}(u+v,u-v)$$

Solution : • D'une part $u+v \in \text{Vect}(u,v)$ et $u-v \in \text{Vect}(u,v)$ donc on a l'inclusion

$$\text{Vect}(u+v,u-v) \subset \text{Vect}(u,v)$$

• D'autre part on a $u = \frac{1}{2}[(u+v)+(u-v)] \in \text{Vect}(u+v,u-v)$ et $v = \frac{1}{2}[(u+v)-(u-v)] \in \text{Vect}(u+v,u-v)$ donc on a l'inclusion

$$\text{Vect}(u,v) \subset \text{Vect}(u+v,u-v)$$

□

Proposition 1.4. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v , $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)$ une famille de E, $x \in E$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors

1. $$\text{Vect}(u_1,\ldots.,u_n) = \text{Vect}(u_1,\ldots.,u_{i-1},u_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \lambda_j u_j, u_{i+1},\ldots,u_n)$$

2. $$x \in \text{Vect}(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n) \iff \text{Vect}(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n) = \text{Vect}(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n,x)$$

***Exemple* 1.12.**

1. $\text{Vect}(X,2X+X^2,X^2) = \text{Vect}(X,X^2)$
2. $\text{Vect}(1+2X+X^2,X,X^2) = \text{Vect}(1,X,X^2)$
3. Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ soient $f_1 : x \longmapsto \sin(x+1)$, $f_2 : x \longmapsto \sin(x)$, $f_3 : x \longmapsto \cos(x)$. puisque f_1 est combinaison linéaire de f_3 et f_2, alors

$$\text{Vect}(f_1,f_2,f_3) = \text{Vect}(f_2,f_3)$$

2 Famille : Libre - génératrice - Base

2.1 Famille génératrice

***Définition* 2.1.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1. Une famille $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)$ de E est dite **génératrice** de E si et seulement si

$$\boxed{E = Vect(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)}$$

ie : $\forall x \in E$,$\exists \lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tq $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$

2. Plus généralement, une famille $(u_i)_{i\in I}$ de E est dite **génératrice** de E si et seulement si

$$\boxed{E = Vect(u_i)_{i\in I}}$$

***Exemple* 2.1.** 1. $(e_1,\ldots,e_n)$ où $e_i = (0,\ldots,0,\overbrace{1}^{i\ ieme\ position},0,\ldots,0)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. En effet : Si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ se qui assure l'inclusion $\mathbb{K}^n \subset \text{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$, l'autre inclusion étant évidente donc

$$\mathbb{K}^n = \text{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$$

2. La famille $(1,X,...,X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. en effet tout élément P de $\mathbb{K}_n[X]$ s' écrit comme combinaison linéaire de $(1,X,...,X^n)$.
3. pour tout $a \in \mathbb{K}$ fixé , La famille $(1,X-a,...,(X-a)^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet la formule de Taylor pour un polynôme assure que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X]; \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

4. pour tout $a \in \mathbb{K}$ fixé , La famille $\left((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 2.1.
1. Si $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)$ est **génératrice** de E et $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i$ alors $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_{n-1})$ est aussi **génératrice** de E.
2. Si $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)$ est **génératrice** de E et $u_n = 0$ alors $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_{n-1})$ est aussi **génératrice** de E
3. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice .

Remarque 2.1. En d'autres termes
— Si on retranche d'une famille génératrice les vecteurs nuls et les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres on obtient une famille génératrice.
— Si on ajoute à une famille génératrice une autre famille de vecteurs , on obtient une famille génératrice.

Exercice 7. Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:
1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$;
2. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$.

Solution :
1. On a
$$u=(x,y,z)\in F \iff x=-2y+z \iff u=(-2y+z,y,z) \iff u=yu_1+zu_2$$
avec $u_1=(-2,1,0)$ et $u_2=(1,0,1)$, on a donc $F=\text{vect}(u_1,u_2)$. Cette solution n'est (bien sûr !) pas unique.
2. On a
$$(x,y,z)\in G \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 0 \\ 2x-y-z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 0 \\ y-3z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{r} x=2z \\ y=3z \\ z=z \end{array}\right.$$
On a donc $G=\text{vect}(u)$, avec $u=(2,3,1)$.

□

2.2 Famille Libre

Définition 2.2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n \in E$
1. On dit que la famille $(u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)$ est **libre** si et seulement si pour tout $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$
$$\boxed{\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ldots\ldots+\lambda_nu_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\ldots\ldots=\lambda_n=0}$$
2. Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque 2.2. Pour montrer que la famille $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$ est **libre** :
— On considère une famille de scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$
— On suppose que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_n u_n = 0$
— On montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_n = 0$

Remarque 2.3. La famille $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$ est **liée** si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_n u_n = 0$. Cette dernière relation s'appelle alors une relation de liaison de la famille $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$.

***Exemples* 2.1.**

1. $(1, i)$ est libre et génératrice dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. C'en est donc une base
2. $(\sin, \cos)$ sont libres dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$ en considérant $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Pour $a \in K$, la famille $\left(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right)$ est libre alors dans $K_n[X]$
4. $\left((1,1), (0,1), (0,1)\right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ puisque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) = x(1,0) + y(0,1) + 0 \cdot (1,1)$. Par contre, elle n'est pas libre puisque $(1,1) = (0,1) + (0,1)$
5. Soit $a_1 < \cdots < a_n$ des réels et soit $f_i : x \mapsto |x - a_i|$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   La famille $\left(f_1, \ldots, f_n\right)$ est libre dans $C^0(\mathbb{R})$
   En effet, soit $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_i = 0$ c 'est - à - dire
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x - a_k| = 0 \tag{1}$$
   On a alors $\forall x > a_{n-1}, \ \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x - a_k) = -\lambda_n |x - a_n|$
   Mais le terme de gauche est dérivable en a_n mais pas la fonction f_n. Donc $\lambda_n = 0$.
   On termine par récurrence.

***Définition* 2.3.** Une famille infinie $(u_i)_{i\in I}$ de E est libre si et seulement si toute sous famille finie $(u_i)_{i\in I}$ est libre .
C.à. D : pour tout J finie $\subset I$ la famille finie $(u_i)_{i\in J}$ est libre .

***Exemple* 2.2.** La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

***Exercice* 8.** Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : a \mapsto e^{ax}$

1. Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ des nombres réels . Montrer que $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$ est libre dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. En déduire que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Solution :

1. Considérons une relation de liaison $\lambda_1 e^{a_1 x} + \cdots + \lambda_p e^{a_p x}$. On factorise par le terme dominant, c'est-à-dire $e^{a_p x}$. On obtient
   $$e^{a_p x}(\lambda_p + \lambda_{p-1} e^{(a_{p-1} - a_p)x} + \cdots + \lambda_1 e^{(a_1 - a_p)x}) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
   On simplifie par $e^{a_p x}$, qui ne s'annule jamais, et on fait tendre x vers $+\infty$. Puisque $e^{(a_j - a_p)x}$ tend vers 0 pour $j < p$, le membre de gauche converge vers λ_p qui vaut donc 0. On répète le procédé en factorisant ensuite par $e^{a_{p-1} x}$ pour prouver que $\lambda_{p-1} = 0$, et on obtient successivement que $\lambda_p, \lambda_{p-1}, \ldots$ et finalement λ_1 sont nuls (on peut aussi effectuer une récurrence).
2. On vient de montrer que toute sous famille finie de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre donc elle est libre.

□

Proposition 2.2. Toute sous famille d'une famille libre est libre

***Remarques* 2.1.** 1. Une famille qui contient 0 est liée

2. Une famille qui contient un vecteur qui est combinaison linéaire des autres est liée
3. Une famille qui contient deux vecteurs identiques est liée
4. la famille (a) est libre si et seulement si $a \neq 0$.
5. $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$ est libre alors $u_i \neq 0_E \quad \forall i$ et $\quad u_i \neq u_j \quad \forall i \neq j$

Proposition 2.3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$ une famille libre

1. $x \in vect(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n) \Longrightarrow (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, x)$ est liée.
2. $x \notin vect(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n) \Longrightarrow (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, x)$ est libre.
3. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \lambda_i = \mu_i$$

***Exercice* 9.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose , $\quad f_n(x) = \cos(nx)$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre (pourra procéder par récurrence)
2. En déduire que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Solution : 1. On va démontrer par récurrence sur N pour $N = 0$ $(\cos(0.x) = 1)$ n 'est pas la fonction nulle donc libre . Supposons le résultat vrai au rang $N-1$, et prouvons-le au rang N en écrivant une relation de liaison :

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_N f_N = 0.$$

$$i.e \qquad \lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \cdots + \lambda_N \cos(Nx) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On dérive deux fois et on trouve

$$\lambda_1 \cos(x) + \cdots + N^2 \lambda_N \cos(Nx) = 0.$$

En retranchant N^2 fois la première équation à la deuxième, on trouve

$$-N^2 \lambda_0 + (1 - N^2)\lambda_1 \cos(x) + \cdots + (N - 1^2 - N^2)\lambda_{N-1} \cos(N - 1x) = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $(j^2 - N^2)\lambda_j = 0$ pour tout $j = 0, \ldots, N-1$, soit finalement $\lambda_j = 0$. De retour à l'équation initiale, on retrouve aussi $\lambda_N = 0$, ce qui prouve bien que la famille est libre.

2. Soit $(n_1, \ldots, n_p)$ une famille finie d'entiers deux à deux distincts.
posons $N = \max(n_1, \ldots, n_p)$, alors la famille $(f_{n_1}, \ldots, f_{n_p})$ est une sous famille de la famille $(f_0, \ldots, f_N)$.
D'après 1) la famille $(f_0, \ldots, f_N)$ est libre donc $(f_{n_1}, \ldots, f_{n_p})$ est libre comme sous famille d'une famille libre.

□

***Exercice* 10.** (Polynômes échelonnés en degré :)
Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, c'est-à-dire

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$

Montrer que $(P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

Solution : Considérons une relation $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. Si $\lambda_n \neq 0$, le membre de gauche de l'inégalité est un polynôme de degré $\deg(la_n P_n) \neq -\infty$. Ce ne peut pas être le polynôme nul. Donc $\lambda_n = 0$. En itérant le raisonnement, on trouve successivement $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$.

Remarque 2.4. À retenir :

1. Toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est libre
2. Toute famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts est libre.

□

2.3 Base d ' un espace vectoriel

***Définition* 2.4.** Soit E un $\mathbb{K}-$ e.v .
On appelle base de E toute famille de E qui est libre et génératrice

Remarque 2.5. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $(u_1,u_2,\dots\dots,u_n)$ une famille de E Alors

$$(u_1,u_2,\dots\dots,u_n) \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (u_1,u_2,\dots\dots,u_n)\ libre \\ (u_1,u_2,\dots\dots,u_n)\ génératrice \end{array} \right.$$

Proposition 2.4. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $(u_1,u_2,\dots\dots,u_n)$ une famille de E. Si $F = \text{Vect}(u_1,u_2,\dots\dots,u_n)$ Alors

$$(u_1,u_2,\dots\dots,u_n) \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow (u_1,u_2,\dots\dots,u_n) \text{ libre}$$

***Exemples* 2.2.** 1. $(e_1,...,e_n)$ où $e_i = (0,...,0,\overbrace{1}^{i\ ieme\ position},0,...,0)$ est une Base de $\mathbb{K}^n$,on l'appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$.

2. La famille $(1,X,...,X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, on l'appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. pour tout $a \in \mathbb{K}$ fixé , La famille $(1,X-a,...,(X-a)^n)$ base de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. pour tout $a \in \mathbb{K}$ fixé , La famille $\left((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
5. La famille $(\cos,\sin)$ est une base de l'e.v $vect(\cos,\sin)$.

Théorème - Définition 2.1 (coordonnées dans une base)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $B = (u_1,u_2,\dots\dots,u_n)$ une famille de E

B est une base de E si et seulement si

$$\forall x \in E; \exists!(x_1,x_2,\dots\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n; \qquad x = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$$

On note $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$,on l'appelle les coordonnées de x dans la base B

***Exemples* 2.3.** 1. Si $u = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{K}^n$ et B la base canonique de $\mathbb{K}^n$ alors

$$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. Soit $a_0,a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, Soit L_i le i^{eme} polynôme de Lagrange définie par :

$$L_i = \frac{(X-a_0)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(X-a_j)}{(a_i-a_j)}$$

Alors $B=(L_0,\dots L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et pour tout $P\in\mathbb{K}_n[X]$.

$$[P]_B=\begin{pmatrix} P(a_0)\\ .\\ .\\ .\\ P(a_n)\end{pmatrix}$$

En effet :

- Soient $\lambda_1,\dots\lambda_n\in\mathbb{K}$, tels que $\sum_{i=0}^{n}\lambda_iL_i=0$.

On a $\forall x\in K,\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_iL_i(x)=0$. Notamment pour $x=a_j$ ($j\in[\![1,n]\!]$), il vient $\lambda_j=0$ puisque $L_i(a_j)=\delta_{i,j}$.
La famille est donc libre

- D'après un DL traité en classe on sait que pour tout $P\in\mathbb{K}_n[X]$

$$P=\sum_{i=0}^{n}P(a_i)L_i$$

D'où le résultat.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

3.1 Somme de deux s.e.v

3.1.1 définition et propriétés

***Définition* 3.1.** Soient E_1,E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.
On appelle somme des espaces vectoriels E_1,E_2 l'ensemble noté E_1+E_2 et défini par :

$$E_1+E_2=\{x_1+x_2\ |\ (x_1,x_2)\in E_1\times E_2\}$$

Remarque 3.1.

$$u\in E_1+E_2 \quad\Leftrightarrow\quad \exists(x_1,x_2)\in E_1\times E_2;\quad u=x_1+x_2$$

l'existence n'est pas forcement unique !

Proposition 3.1. Soient E_1,E_2 des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. Alors
(i) E_1+E_2 est un sous-espace vectoriel de E.
(ii) $E_1\subset E_1+E_2$ et $E_2\subset E_1+E_2$
(iii) E_1+E_2 est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient $E_1\cup E_2$. Cà.d :

$$E_1+E_2=\text{Vect}(E_1\cup E_2)$$

Preuve : (i) Montrons que E_1+E_2 est un sous-espace vectoriel de E :

- $0_E=\underbrace{0_E}_{\in E_1}+\underbrace{0_E}_{\in E_2}\in E_1+E_2$
- Soient $u,v\in E_1+E_2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Il existe $(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$ et $(y_1,y_2)\in E_1\times E_2$ tels que

$$\begin{cases} u=x_1+x_2\\ v=y_1+y_2\end{cases}$$

par suite

$$u+\lambda v = x_1+x_2+\lambda(y_1+y_2) = \underbrace{(x_1+\lambda y_1)}_{\in E_1}+\underbrace{(x_2+\lambda y_2)}_{\in E_2}$$

donc $u+\lambda v \in E_1+E_2$ et E_1+E_2 est un s.e.v de E

(ii) Si $x\in E_1$ alors $x = x+0\in E_1+E_2$.

(iii) Soit G un s.e.v de E qui contient $E_1\cup E_2$, alors

$$\forall (x_1,x_2)\in E_1\times E_2;\quad x_1+x_2\in G$$

ceci assure que $E_1+E_2\subset G$ par suite E_1+E_2 est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient $E_1\cup E_2$

□

***Exemple* 3.1.** Soit $(e_1,2_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ et $G=\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$ alors

$$F+G=\mathbb{R}^3$$

en effet :

- $F+G\subset\mathbb{R}^3$ est claire
- pour l'autre inclusion soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on a

$$u = xe_1+ye_2+ze_3 = \underbrace{(xe_1+\frac{1}{2}ye_2)}_{\in F}+\underbrace{(\frac{1}{2}ye_2+ze_3)}_{\in G}\in F+G$$

On remarque qu' on a aussi

$$u=\underbrace{(xe_1+ye_2)}_{\in F}+\underbrace{(ze_3)}_{\in G}=\underbrace{(xe_1)}_{\in F}+\underbrace{(ye_2+ze_3)}_{\in G}$$

ce qui montre que dans ce cas la décomposition de u en somme de deux vecteurs de $F\times G$ n'est pas unique dans ce cas.

3.1.2 Somme directe - sous espaces supplémentaires

***Définition* 3.2.** On dit que Deux sous-espaces E_1,E_2, sont en somme directe, (ou encore que la somme E_1+E_2 est directe) si

$$\boxed{\mathrm{E}_1\cap E_2=\{0_E\}}$$

dans ce cas la somme E_1+E_2 est notee $E_1\oplus E_2$

Remarque 3.2. $E_1\oplus E_2$ n' est autre que E_1+E_2 et $\oplus$ ne sert qu'à distinguer les sommes directes de celles qui ne le sont pas .

Proposition 3.2 (caractérisation d 'une somme directe)**.** Soit E un $\mathbb{K}-$ e.v et E_1,E_2 deux s.e.v de E. Il y équivalence entre

1. E_1+E_2 est une somme directe.
2. Pour tout $u\in E_1+E_2$ il existe un unique $(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$ t.q $u=x_1+x_2$.
   On dit que u se décompose de manière unique en somme de d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2
3. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E_1\times E_2\times & \to & E_1+E_2 \\ (x_1,x_2) & \mapsto & x_1+x_2\end{array}\right.$ est bijective
4. $\forall x\in E_1,\forall y\in E_2\quad [x+y=0\quad\Rightarrow\quad x=y=0]$

Preuve : • $1 \Rightarrow 2$: Supposons la somme directe. Soit $u \in E_1 + E_2$ s'écrivant de deux manières

$$u = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

où (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont éléments de $E_1 \times E_2$.

Il vient alors

$$(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2).$$

Or $(x_1 - y_1) \in E_1$ et $(x_2 - y_2) \in E_1$ donc

$$(x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$$

il vient , $x_1 = y_1$ et , $x_2 = y_2$. D'où l'unicité de la décomposition.

- $2 \Rightarrow 3$: Claire d'après la caractérisation d'une application bijective par l'existence et l' unicité de l' antécédent de tout élément de l'ensemble d' arrivé.
- $3 \Rightarrow 4$: Notons Ψ l'application de 2.

$$x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(x, y) = 0 = \Psi(0, 0) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Psi \text{ inj}} (x, y) = (0, 0)$$

- $4 \Rightarrow 1$: Soit $x \in E_1 \cap E_2$ on a $x + (-x) = 0$ et $x \in E_1$ et $-x \in E_2$ donc $x = 0$ par suite $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et la somme $E_1 + E_2$ est une somme directe.

□

***Exemple* 3.2.** 1. Dans l'exemple 3.1 la somme de F et G n'est pas directe puisque $e_2 \in F \cap G$

2. Dans $\mathbb{R}^3$ soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ alors la somme $F + G$ est directe.
   En effet : Soit $u \in F \cap G$. De $u \in G$ on déduit que $u = \lambda(1, 1, 1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ et de $u \in F$ on déduit que $3\lambda = \lambda + \lambda + \lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ par suite $u = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.

***Définition* 3.3.** Soit E un $\mathbb{K}-$ e.v et E_1, E_2 deux s.e.v de E. On dit que E_1 et E_2 supplémentaires dans E si

$$E = E_1 \oplus E_2$$

Proposition 3.3.

$$\begin{aligned} E = E_1 \oplus E_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ E = E_1 + E_2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ \forall u \in E \;\; \exists (x, y) \in E_1 \times E_2; \;\; u = x + y \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall u \in E \;\; \exists\, !(x, y) \in E_1 \times E_2; \;\; u = x + y \end{aligned}$$

***Exercice* 11.** Soit $P \in K[X]$ de degré $n + 1$. Notons $PK[X]$ l'ensemble des polynômes multiples de P.

$$PK[X] = \{A \in K[X] \mid P|A\} = \{PQ \mid Q \in K[X]\}$$

Montrer que

$$K[X] = PK[X] \oplus K_n[X].$$

Solution : Ceci est une conséquence immédiate du théorème de division euclidienne puisque :
$\forall A \in K[X], \exists!(Q, R) \in K[X]^2 \mid A = PQ + R$ et $\deg R < \deg P$. □

***Exercice* 12.** Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Solution : Remarquons d'abord que $F\cap G=\{0\}$. En effet, si f est élément de $F\cap G$, alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a à la fois $f(-x)=f(x)$ et $f(-x)=-f(x)$, d'où $f(x)=-f(x)$ ce qui entraîne $f(x)=0$.
D'autre part, tout élément h de E se décompose sous la forme $h=f+g$, avec f dans F et g dans G. Pour cela, on utilise un **raisonnement par analyse-synthèse** :

- **Partie Analyse** (cette partie peut être considéré comme une recherche "au brouillon")

Admettons que $h=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $h(x)=f(x)+g(x)$ et $h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)$. Des deux équations précédentes, on tire facilement que $f(x)=\big(h(x)+h(-x)\big)/2$ et $g(x)=\big(h(x)-h(-x)\big)/2$.

- **Partie synthèse**

On pose $f(x)=\big(h(x)+h(-x)\big)/2$ et $g(x)=\big(h(x)-h(-x)\big)/2$. Alors on vérifie facilement que :
— $h=f+g$;
— f est paire : en effet $f(-x)=\big(h(-x)+h(-(-x))\big)=\big(h(x)+h(-x)\big)=f(x)$;
— g est impaire (même raisonnement).
Ainsi, on a bien $F+G=E$.
Remarquons que la partie 'analyse' du raisonnement montre aussi l'unicité de la décomposition, et redémontre donc que la somme est directe.

□

***Exercice* 13.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a\in\mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.

Solution : On remarque d'abord que $F\cap G_a=\{0\}$ (une fonction constante qui s'annule en un point est forcément identiquement nulle). Ensuite, prenons $h\in E$, on doit prouver que h se décompose sous la forme $h=g+C$, où C est une constante et $g(a)=0$. Admettons que ce soit le cas. Alors, nécessairement, $h(a)=C$ et $g(x)=h(x)-C=h(x)-h(a)$. On pose donc $C=f(a)$ et $g(x)=h(x)-h(a)$. Clairement, $h=g+C$ et $g(a)=0$ ce qui prouve que $g\in G_a$. □

3.2 Somme de plusieurs s.e.v

3.2.1 définition et propriétés

***Définition* 3.4.** Soient $E_1,E_2,\dots,E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.
On appelle *somme des espaces vectoriels* $E_1,E_2,\dots,E_n$ l' ensemble

$$E_1+E_2+\cdots+E_n=\left\{x_1+x_2+\cdots+x_n \;\middle|\; (x_1,x_2,\dots,x_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n\right\}$$

On le note également $\sum\limits_{k=1}^{n}E_i$.

Proposition 3.4. Soient $E_1,E_2,\dots,E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. Alors
- $\sum\limits_{k=1}^{n}E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\sum\limits_{k=1}^{n}E_i$ est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}E_i=\operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)$$

***Attention* 3.1.** On rappelle que l'union d'espaces vectoriels n'est pas à priori un espace vectoriel .

Proposition 3.5 (associativité et commutativité)**.** Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espaces vectoriel E. On a pour $1 \leq p < n$:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{p} E_i + \sum_{i=p+1}^{n} E_i \qquad \text{(associativité)}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=p+1}^{n} E_i + \sum_{i=1}^{p} E_i \qquad \text{(Commutativité)}$$

***Exemples* 3.1.** 1. $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(1,0,0) + \text{Vect}(0,1,0) + \text{Vect}(0,0,1)$
En effet $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = \underbrace{x(1,0,0)}_{\in \text{Vect}(1,0,0)} + \underbrace{y(0,1,0)}_{\in \text{Vect}(0,1,0)} + \underbrace{z(0,0,1)}_{\in \text{Vect}(0,0,1)}$

2. $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(1,0) + \text{Vect}(0,1) + \text{Vect}(1,1)$
En effet $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = \underbrace{x(1,0)}_{\in \text{Vect}(1,0)} + \underbrace{y(0,1)}_{\in \text{Vect}(0,1)} + \underbrace{0(1,1)}_{\in \text{Vect}(1,1)}$
Remarquons qu'on a aussi la décomposition $(x,y) = -\underbrace{y(1,0)}_{\in \text{Vect}(1,0)} - \underbrace{x(0,1)}_{\in \text{Vect}(0,1)} + \underbrace{(x+y)(1,1)}_{\in \text{Vect}(1,1)}$

3.2.2 Somme directe de plusiers sous espaces vectoriels

***Définition* 3.5.** On dit que les sous-espaces $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont en somme directe, (ou encore que la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe) si pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

la somme est alors notée

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i}$$

Proposition 3.6. La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si tout vecteur x de $\sum_{i=1}^{p} E_i$ se décompose de manière unique comme somme d'éléments de $E_1, E_2, \dots, E_n$ c'est - à - dire

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i, \ \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, \ x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Preuve : Supposons la somme directe. Soit $x \in \sum_{i=1}^{p} E_i$ s'écrivant de deux manières

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont éléments de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Il vient alors

$$(x_1-y_1)+(x_2-y_2)-\cdots-(x_n-y_n)=0.$$

Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i-y_i\in E_i$ puisque les E_i sont des espaces vectoriels .

Par hypothèse il vient $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i-y_i=0$. D'où l'unicité de la décomposition.

Réciproquement Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ tel que $x_1+x_2+\ldots+x_n=0=0+0+\ldots+0$.Comme $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $0\in E_i$, l'unicité de la décomposition donne alors $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$

□

Remarque 3.3. $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si l'application

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & E_1\times E_2\times\cdots\times E_n & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n}E_i\\ & (x_1,x_2,\ldots,x_n) & \longmapsto & x_1+x_2+\cdots+x_n\end{array}$$

est bijective.

***Exemples* 3.2.** la somme $\mathrm{Vect}(1,0)+\mathrm{Vect}(0,1)+\mathrm{Vect}(1,1)$ n'est pas directe puisqu'on a pas unicité de la décomposition

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)=\underbrace{x(1,0)}_{\in\mathrm{Vect}(1,0)}+\underbrace{y(0,1)}_{\in\mathrm{Vect}(0,1)}+\underbrace{0(1,1)}_{\in\mathrm{Vect}(1,1)}=-\underbrace{y(1,0)}_{\in\mathrm{Vect}(1,0)}-\underbrace{x(0,1)}_{\in\mathrm{Vect}(0,1)}+\underbrace{(x+y)(1,1)}_{\in\mathrm{Vect}(1,1)}$

***Exercice* 14.** Montrer que $\beta=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est une base de E si et seulement si $E=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Vect}(e_i)$.

Solution : β est une base de E, si et seulement si tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme

$$x=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\lambda_i e_i}_{\in\mathrm{Vect}(e_i)}\quad.$$

Par exemple, $K_n[X]=\bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Vect}\left(X^i\right)$ ou $\mathbb{R}^3=\mathrm{Vect}(1,0,0)\oplus\mathrm{Vect}(0,1,0)\oplus\mathrm{Vect}(0,0,1)$.

Proposition 3.7. Si la somme $\sum_{i=1}^{p}E_i$ est directe alors pour tout $i\neq j$

$$E_i\cap E_j=\{0\}$$

***Attention* 3.2.** **La réciproque est fausse pour $p\geq 3$ mais elle est vraie pour $p=2$**

***Exemple* 3.3.** Considérons l'exemple $\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}(1,0)+\mathrm{Vect}(0,1)+\mathrm{Vect}(1,1)$. La somme n'est pas directe mais

$$\mathrm{Vect}(1,0)\cap\mathrm{Vect}(0,1)=\mathrm{Vect}(1,0)\cap\mathrm{Vect}(1,1)=\mathrm{Vect}(0,1)\cap\mathrm{Vect}(1,1)=\{0\}$$

Plan

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Dans tout ce chapitre :

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel
- On aura besoin de quelques résultats élémentaires sur les ensembles finis
  1. Un ensemble X est fini s'il est vide ou contient un nombre fini d'éléments qu 'on appelle cardinale de X et qu'on note $\text{Card}(X)$. Par convention $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
  2. Si X est fini et $Y \subset X$ alors Y est fini et $\text{Card}(Y) \leq \text{Card}(X)$.
  3. Si X est fini et $Y \subset X$ tq et $\text{Card}(Y) = \text{Card}(X)$ alors $X = Y$.
  4. Si X et Y sont finis alors $X \cup Y$ est finie et on a
  $$\text{Card}(X \cup Y) = \text{Card}(X) + \text{Card}(Y) - \text{Card}(X \cap Y)$$
  5. Si A une partie non vide de $\mathbb{N}$ alors :
  $$\begin{aligned} A \text{ est finie} &\Leftrightarrow A \text{ majorée .} \\ &\Leftrightarrow A \text{ admet un plus grand élément.} \end{aligned}$$

1 Espace vectoriel de dimension finie- Dimension

1.1 Notion de la dimension finie

***Définition* 1.1.** On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Sinon on dit qu' il est de dimension infinie.

Remarque 1.1. E est de dimension finie si et seulement si il existe une famille finie $\mathcal{G} = (u_1, ..., u_n)$ de E telle que
$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n; \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

***Exemples* 1.1.**
- $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie puisque sa base canonique est finie .
- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie puis que sa $(1, X, ..., X^n)$ est finie .
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie puis qu'il admet $(1, i)$ comme base.

Théorème 1.1. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Si $\mathscr{L}$ est une famille libre telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$ alors il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$$

Preuve : Remarquons d'abord que toute partie liber L contenue dans $\mathscr{G}$ est fini et vérifie $\text{Card}(L) \leq \text{Card}(\mathscr{G})$

Posons

$$A = \{\text{Card}(L) \mid L \text{ libre et } L \subset \mathscr{G}\}.$$

Alors A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car contient $\text{Card}(\mathscr{L})$) et majorée par $\text{Card}(\mathscr{G})$), donc A admet un plus grand éléments . Soit maintenant $\mathscr{B}$ une partie libre telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ et $\text{Card}(\mathscr{B}) = \max(A)$, on va montrer dans la suite que $\mathscr{B}$ est une base de E :

- $\mathscr{B}$ est déjà libre.
- Pour montrer que $\mathscr{B}$ est génératrice on vas montrer par l'absurde que $\mathscr{G} \subset \text{Vect}(\mathscr{B})$. En effet si $\mathscr{G}$ n'est pas contenue dans $\text{Vect}(\mathscr{B})$ alors il existe $g \in \mathscr{G}$ tel que $g \notin \text{Vect}(\mathscr{B})$ or

$$g \notin \text{Vect}(\mathscr{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{B} \cup \{g\} \quad \text{est libre}$$

Ainsi $\mathscr{B} \cup \{g\}$ est une parie libre contenue dans $\mathscr{G}$ et de cardinal $\text{Card}(\mathscr{B}) + 1$ ce qui contredit le fait que $\text{Card}(\mathscr{B}) = \max(A)$. En conclusion on a $\mathscr{G} \subset \text{Vect}(\mathscr{B})$ par suite $E = \text{Vect}(\mathscr{G}) \subset \text{Vect}(\mathscr{B})$ ce qui assure que $\mathscr{B}$ est génératrice de E et termine la démonstration. □

Remarque 1.2. Le théorème précédent donne, comme conséquences , deux théorèmes hyper-importants à savoir **le théorème de la base incomplète** et **le théorème de la base extraite** suivants :

Théorème 1.2 (Théorème de la base incomplète). Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie .

$$\boxed{\text{Toute famille libre de } E \text{ peut être complétée en une base de } E}$$

En d'autres termes : si $(u_1, ..., u_p)$ est une famille libre de E il existe des vecteurs $v_1, ..., v_q$ dans E tels que la famille $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$ soit base de E

Preuve : Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{L}$ est une famille libre . La famille $\mathscr{G}' = \mathscr{G} \cup \mathscr{L}$ est encore une famille génératrice finie de E qui contient $\mathscr{L}$ donc d'après le théorème 1.2 précédent, E admet une base finie $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$. □

Théorème 1.3 (Théorème de la base extraite). Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie .

$$\boxed{\text{De toute famille génératrice de } E \text{ on peut extraire une base de } E}$$

En d'autres termes : si $(u_1, ..., u_p)$ est une famille génératrice de E il existe des vecteurs $J \subset [\![1, p]\!]$ tel que la famille $(u_i)_{i \in J}$ soit base de E

Preuve : Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et u un vecteur non nul de $\mathscr{G}$ donc $\mathscr{L} = (u)$est une famille libre contenue dans $\mathscr{G}$, donc d'après le théorème 1.2 précédent, E admet une base finie $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

N.B : Si $\mathscr{G} = \{0\}$ alors $E = \{0\}$ on prend par convention $\emptyset$ comme base de E. □

Proposition 1.1 (Existence d'une base). Tout espace vectoriel de dimension finie non nul admet une base finie

Preuve : Il suffit de compléter un vecteur non nul en une base finie par le théorème de la base incomplète □

Théorème 1.4. Si $\mathscr{G} = (u_1, ..., u_n)$ est une famille génératrice à n éléments de E, alors toute famille de $n + 1$ éléments de E est liée.

Preuve : Par récurrence sur n

- Si $n=1$ et x,y$\in$ Vect$(u_1) alors$ x=αu_1 et $y=\lambda u_1$ par suite $\lambda x-\alpha y=0$ et (x,y) liée.
- Supposons le résultat vrai à l'ordre $n-1$
- Supposons $E=\text{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ et considérons $\mathscr{F}=(v_1,\dots,v_n,v_{n+1})$ une famille à $n+1$ éléments dans E, on va montrer dans la suite de $\mathscr{F}$ est liée.

Puisque $E=\text{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ on peut écrire chaque V_j, $j=1,\dots,n+1$ sous la forme $v_j=a_j+\lambda_j u_n$ où $a_j\in\text{Vect}(u_1,\dots,u_{n-1})$ et $\lambda_j\in\mathbb{K}$

- Si $\forall j=1,\dots,n+1;\ \lambda_j=0$ alors $\mathscr{F}$ est une famille famille à $n+1$ éléments dans $\text{Vect}(u_1,\dots,u_{n-1})$ donc liée d'après l'hypothèse de récurrence.
- Si les λ_j ne sont pas tous nuls, on suppose pour simplifier que $\lambda_{n+1}\neq 0$. De $v_{n+1}=a_{n+1}+\lambda_{n+1}u_n$ on tire

$$u_n=\frac{1}{\lambda_{n+1}}(v_{n+1}-a_{n+1})$$

En remplacent u_n par cette dernière expression dans $v_j=a_j+\lambda_j u_n$ pour $j=1,\dots,n$ on a :

$$\forall j=1,\dots,n\quad v_j=a_j+\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}(v_{n+1}-a_{n+1})$$

ce qui donne

$$\forall j=1,\dots,n\quad v_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}v_{n+1}=a_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}a_{n+1}\in\text{Vect}(u_1,\dots,u_{n-1})$$

Ainsi la famille $(v_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}v_{n+1})_{j=1,\dots,n}$ est est une famille famille à n éléments dans $\text{Vect}(u_1,\dots,u_{n-1})$ donc liée d'après lhypothèse de récurrence, par suite il existe $\alpha_1,\dots\alpha_n\in\mathbb{K}$ non tous nuls tq

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(v_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}v_{n+1})=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\lambda_j}{\lambda_{n+1}}v_{n+1}=0$$

ce qui montre que $\mathscr{F}=(v_1,\dots,v_n,v_{n+1})$ est liée et termine la démonstration.

□

Corollaire 1.1. Si $\mathscr{G}=(u_1,\dots,u_n)$ est une famille génératrice à n éléments de E. Alors toute famille libre de E est de cardinale $\leq n$

1.2 Dimension d'un espace de dimension finie

Théorème - Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie . Alors

- Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.
- Le nombre d'éléments commun à toutes les bases de E s'appelle la dimension de E et noté $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou tout simplement $\dim(E)$
- Si $E=\{0_E\}$, on pose par convention $\dim(E)=0$

Preuve : Soient B,B' deux bases de E

Du fait que B libre et B' génératrice on déduit par 1.4 et son corollaire que $\text{Card}(B)\leq\text{Card}(B')$, Par symétrie on a $\text{Card}(B')\leq\text{Card}(B)$ donc $\text{Card}(B)=\text{Card}(B')$ □

Remarque 1.3. La dimension d'un espace vectoriel est tout simplement le cardinale d'une base (n'importe laquelle)

Exemples 1.2.

1. $\boxed{\dim\mathbb{K}^n=n}$ puisque sa base canonique contient n éléments.
2. $\boxed{\dim\mathbb{K}_n[X]=n+1}$ puisque sa base canonique contient $n+1$ éléments.
3. $\boxed{\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1}$
4. $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2}$ puisque $(1,i)$ est base de $\mathbb{C}$ en tant de $\mathbb{R}-$espace vectoriel .

Notation 1.1. L'écriture $\boxed{\dim E<+\infty}$ veut dire que E est de dimension finie dans la cas contraire on écrit $\boxed{\dim E=+\infty.}$

Proposition 1.2. Si $\dim E = n \in$ alors

1. Toute famille libre est de cardinal $\leq n$
2. Toute famille génératrice est de cardinal $\geq n$
3. Toute base est de cardinal n

***Remarques* 1.1.** — Une base est la famille libre qui contient le plus grand nombre déléments et la famille génératrice qui contient le plus petit nombre déléments , on dit qu' **une base est libre maximale et génératrice minimale.**

— Si E contient une famille libre infinie alors E est de dimension infinie.

***Exemples* 1.3.** $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{K}^I$, $\mathbb{K}^N$, $\mathbb{C}^n(I,\mathbb{K})$, $\mathbb{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ sont des espace vectoriel de dimension $+\infty$.

***Exercice* 1.** Determiner une base et la dimension de F dans les cas suivants :

1. $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ b - 2c + d = 0\}$
2. $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a = d \text{ et } b = 2c\}$.
3. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ /\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = 3u_n\}$
4. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ /\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n\}$

Solution : 1. Il faut d'abord en trouver un système générateur. On a

$$u = (a,b,c,d) \in \iff b - 2c + d = 0 \iff u = (a, 2c-d, c, d) = a(1,0,0,0) + c(0,2,1,0) + d(0,-1,0,1)$$

La famille constituée par les vecteurs $(1,0,0,0)$, $(0,2,1,0)$ et $(0,-1,0,1)$ est donc une famille génératrice de F. On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de F par suite $\dim F = 3$.

2. $u = (a,b,c,d) \in F \iff a = d$ et $b = 2c \iff u = (a, 2c, c, a) = a(1,0,0,1) + c(0,2,1,0)$
La famille constituée par les vecteurs $(1,0,0,1)$ et $(0,2,1,0)$ est une famille génératrice de F. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille est libre, et donc il s'agit d'une base de F par suite $\dim F = 2$.

3. Remarquer que dans ce cas les élément de F sont les suites géométrique de raison 3 donc

$$u = (u_n) \in F \iff \forall n \in \mathbb{N}; /u_{n+1} = 3u_n \iff \forall n \in \mathbb{N};\ u_n = u_0 3^n \iff u = u_0.(3^n)$$

donc $F = \text{Vect}(w)$ où $w = (3^n)$ et comme w n'est pas la suite nulle, elle constitue une famille libre donc base de F par suite $\dim F = 1$

4. Remarquer que dans ce cas les élément de F sont les suites récurrentes linéaire d'ordre 2 tell que

$$\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

d'équation caractéristique $z^2 - 3z + 2 = 0$ qui a pour solutions 1 et 2 donc

$$u = (u_n) \in F \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N};\ u_n = \alpha + \beta 2^n$$

donc $F = \text{Vect}(u,w)$ où $w = (2^n)$ et $u = (1)$ est la suite constante par 1, et comme (u,w) est libre elle constitue une base de F par suite $\dim F = 2$

□

Théorème 1.5. Soit E une $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie tel que $\boxed{\dim E = n}$ et soit $\mathscr{F} = (u_1, .., u_n)$ une faille de E tell que $\boxed{\text{Card}(\mathscr{F}) = \dim E = n}$. alors

$$\underset{(i)}{\mathscr{F} \text{ libre}} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{(ii)}{\mathscr{F} \text{ génératrice}} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{(iii)}{\mathscr{F} \text{ Base}}$$

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons $\mathscr{F}$ libre, si $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice alors il existe $x \in E$ tel que $x \notin \text{Vect}(\mathscr{F})$ par suite $\mathscr{F} \cup \{x\}$ est une famille libre à $n+1$ éléments , ceci étant impossible puisque $\dim E = n$ donc toute famille à $n+1$ éléments est liée , d'où $\mathscr{F}$ est génératrice.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Supposons $\mathscr{F}$ est génératrice , si $\mathscr{F}$ n'est pas libre alors l'un des u_i est combinaison linéaire des autres , supposons pour simplifier que ce vecteur est u_n donc $(u_1, ..., u_{n-1})$ est génératrice à $n-1$ éléments , absurde donc $\mathscr{F}$ libre donc base de E

$(iii) \Rightarrow (i)$: Évident : Toute base est par définition libre.

□

Remarque 1.4. lorsque $\boxed{\text{Card}(\mathscr{F}) = \dim E = n,}$ pour montrer que $\mathscr{F}$ est une base de E, il suffit de montrer que qu 'il est libre **ou** génératrice

***Exemple* 1.1.** Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note L_i le i^{ieme} polynôme de Lagrange

$$L_i = \frac{(X-a_0)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(X-a_j)}{(a_i-a_j)}$$

Alors $(L_0, \ldots L_n)$ est une base de $K_n[X]$.

En effet : soient $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$.

donc $\forall x \in K$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0$. Notamment pour $x = a_j$ ($j \in [\![1, n]\!]$), on a $\lambda_j = 0$ puisque $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
La famille est donc libre et comme $\text{Card}\{L_0, \ldots, L_n\} = n+1 = \dim K_n[X]$, on en déduit le résultat.

***Exercice* 2.** On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1,-1,1),\ v_2 = (2,-2,2),\ v_3 = (2,-1,2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Solution : 1. On a $v_2 = 2v_1$. La famille (v_1, v_2) est donc liée. Quel que soit le vecteur w, la famille (v_1, v_2, w) restera liée, puisqu'on aura toujours $2v_1 - v_2 + 0w = 0$, combinaison linéaire dont qui n'a pas tous ses coefficients nuls.

2. A contrario, la famille (v_1, v_3) est libre. Pour $w = (1,0,0)$, il est facile de voir que la famille (v_1, v_3, w) est libre. En effet, si $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+2b+c & = & 0 \\ a-b & = & 0 \\ a+2b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+2b+c & = & 0 \\ a-b & = & 0 \\ 3b & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où on tire $a = b = c = 0$ et la famille est libre à trois éléments donc base de $\mathbb{R}^3$. Le guide pour être sûr que l'on peut réaliser cela est le théorème de la base incomplète, qui nous dit qu'on peut compléter la famille libre à deux vecteurs (v_1, v_3) pour en faire une base (à trois vecteurs) de $\mathbb{R}^3$. De plus, on peut choisir le vecteur qui complète dans n'importe quel système générateur de $\mathbb{R}^3$. Le plus naturel est bien entendu la base canonique.

□

***Exercice* 3.** Les systèmes suivants forment-ils des bases de $\mathbb{R}^3$?

$S_1 = \{(1,-1,0),(2,-1,2)\}$;
$S_2 = \{(1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a)\}$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a) ;
$S_3 = \{(1,0,0),(a,b,0),(c,d,e)\}$ avec a,b,c,d,e réels (on discutera suivant leur valeur) ;
$S_4 = \{(1,1,3),(3,4,5),(-2,5,7),(8,-1,9)\}$.

Solution : S_1 est une famille à deux éléments dans un espace de dimension 3. Ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$. De même, S_4 qui comporte quatre éléments ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$. Pour S_2 et S_3, il suffit de savoir si ce sont des familles libres ou non. Résolvons d'abord l'équation

$$\lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(2,-1,2) + \lambda_3(1,0,a) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_2 + a\lambda_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

Ce système est successivement équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0\ (L2)+(L1) \to (L2) \\ 2\lambda_2 + a\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ (a-2)\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Si $a \neq 2$, on obtient $\lambda_3 = 0$ et en remontant les calculs $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille est donc libre. Si $a = 2$, alors le choix $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = -1$ et $\lambda_1 = 1$ donne une solution au système. La famille n'est alors pas libre. On conclut que S_2 est une base si et seulement si $a \neq 2$.
Etudions maintenant S_3, en résolvant l'équation

$$\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(a,b,0) + \lambda_3(c,d,e) = 0$$

qui est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + a\lambda_2 + c\lambda_3 &=& 0 \\ b\lambda_2 + d\lambda_3 &=& 0 \\ e\lambda_3 &=& 0. \end{array}\right.$$

Si $e \neq 0$, on obtient $\lambda_3 = 0$. Si de plus $b \neq 0$, on obtient $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$: la famille est libre. D'autre part, si $b = 0$, le deuxième vecteur est proportionnel au premier et la famille est liée. Enfin, si $e = 0$, toute combinaison linéaire des trois vecteurs est telle que la troisième coordonnée est nulle : la famille n'est pas génératrice. Ainsi, (S_3) est une base si et seulement si $e \neq 0$ et $b \neq 0$.

□

1.3 Dimension d'un produit d'espaces de dimension finie

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espace vectoriels sur $\mathbb{K}$. On pose

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1, ..., x_n) / \forall i \in [\![1,n]\!] x_i \in E_i\}.$$

pour $u = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, $v = (y_1, \ldots, y_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on définit $u + v$ et λv par :

$$u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda v = (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n) to$$

Théorème 1.6. $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ est un espace vectoriels sur $\mathbb{K}$
Si de plus chaque E_i est de dimension finie alors E est aussi de dimension finie et on :a

$$\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

Remarque 1.5. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E_1 et $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de E_2 alors ,

$$\big((e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_p)\big)$$

est une base $E \times E_2$
Remarque 1.6. Lorsque $E_1 = ... = E_n = E$ alors l'espace vectoriel $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est noté E^n. Si E est de dimension finie alors $\dim E^n = n \dim E$.
En particulier si $E = \mathbb{K}$ on retrouve, $\dim K^n = n$.

2 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.1 Dimension d' un sous espace vectoriel

Théorème 2.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie . Soient F sous espace vectoriel de E. Alors

1. F est dimension finie .
2. $\dim F \leq \dim E$.
3. $\dim F = \dim E \quad \Leftrightarrow \quad F = E$

Preuve : 1. Si $F=\{0\}$ alors F est dimension finie . Si non toute famille libre de F est libre dans E donc elle est finie et de cardinal $\leq \dim E$. Soit $\mathscr{F}$ une faille libre de E de cardinal maximal, si $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice de F alors $\exists x \in F \setminus \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ par suite $\mathscr{F} \cup \{x\}$ est encore libre dans F ce qui contredit la maximalité de $\mathscr{F}$. Ainsi $\mathscr{F}$ est génératrice donc base de F et comme $\mathscr{F}$ est finie F est de dimension finie

2. Une base de $\mathscr{F}$ de F est une famille libre de E donc $\dim F = \mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leq \dim E$.
3. Soit une base de $\mathscr{F}$ de F. Si $\dim F = \dim E$ alors $\mathscr{F}$ est libre dans E et $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim E$ donc base de E aussi. par suite $E=F$.
   La réciproque est évidente.

□

Corollaire 2.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie . Soient F, G deux sous espaces vectoriels de E

1. $F \subset G \Rightarrow \dim F \leq \dim G$.
2. Si $F \subset G$ alors $[\ \dim F = \dim G \Leftrightarrow F = G\ ]$.

***Exercice* 4.** Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$,
$G = \mathrm{vect}\{(1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5)\} \subset \mathbb{R}^4$.

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.

Solution : 1. On va déterminer une base de F. Pour cela, on écrit que

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x+y+z-t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x-t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & -x-z \\ z & = & z \\ t & = & x \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

On en déduit qu'une base de F est donnée par les vecteurs $u_1 = (1,-1,0,1)$ et $u_2 = (0,-1,1,0)$.

2. On commence par vérifier que les vecteurs qui engendrent G, à savoir $(1,-2,1,1),(1,2,-3,1)$ et $(5,-3,-2,5)$ sont éléments de F, ce qui est très facile en utilisant l'équation de F. Ceci prouve alors que $G \subset F$. Pour prouver que $G = F$, il suffit de prouver que $\dim F = \dim G$. Mais F a pour dimension 2, et G est de dimension supérieure ou égale à 2 car les deux vecteurs $(1,-2,1,1)$ et $(1,2,-3,1)$ ne sont pas colinéaires. Comme $G \subset F$, on sait que la dimension de G est inférieure ou égale à la dimension de F. On trouve finalement que $\dim F = \dim G = 2$, et puisque $G \subset F$, ceci entraine $F = G$.

□

2.2 Somme de s.e.v et en dimension finie

Proposition 2.1. Soit $(f_1,\ldots,f_p,g_1,\ldots,g_q)$ une famille libre de E Posons $F = \mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_p)$ et $F = \mathrm{Vect}(g_1,\ldots,g_q)$ Alors $\boxed{F \cap G = \{0\}}$.

ie : La somme $F+G$ est directe.

Preuve : Soit $x \in F \cap G$ donc $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$; $x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i}_{x \in F} = \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i g_i}_{x \in G}$, ceci implique que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i = 0$ et puisque $(f_1,\ldots,f_p,g_1,\ldots,g_q)$ est libre , on déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ par suite $x = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.

□

Proposition 2.2. Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E tels que $\boxed{F \cap G = \{0\}}$.

Si $(f_1, ..., f_p)$ est une base de F et $(g_1, ..., g_q)$ est une base de G alors

$$\boxed{(f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_q) \text{ est une base de } F \oplus G.}$$

Preuve : Posons $B = (f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_q)$
- **B libre :** Soient $\alpha_1, ...\alpha_p, \lambda_1, ...\lambda_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i = 0$$

donc

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i}_{x \in F} = \underbrace{-\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i g_i}_{x \in G}$$

par suite les vecteurs $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i$ et $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i g_i$ sont dans $F \cap G = \{0\}$ donc sont tout les deux nuls et comme $(f_1, ..., f_p)$ et $(g_1, ..., g_q)$ sont libres on déduit que $\alpha_1 = ... = \alpha_p = \lambda_1 = ... = \lambda_q = 0$.
- **B génératrice :** Soit $u = x + y \in F + G$ avec $x \in F$ et $y \in G$ puisque $(f_1, ..., f_p)$ est une base de F et $(g_1, ..., g_q)$ est une base de G il existe $\alpha_1, ...\alpha_p, \lambda_1, ...\lambda_q \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i$ et $y = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i$. Par conséquence :

$$u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i \in \text{Vect}(B)$$

□

Proposition 2.3. En dimension finie, tout sous-espace vectoriel de F, admet un supplémentaire.

Preuve : Si $F = E$, il suffit de poser $G = \{0\}$, et inversement $G = E$ si $F = \{0\}$.
Sinon, soit $(e_1, \dots e_p)$ une base de F. C'est notamment une famille libre de E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $n - p$ vecteurs notés $(e_{p+1}, \dots e_n)$ tels que $(e_1, \dots e_n)$ soit une base de E.
Posons $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots e_n)$. Montrons que G est un supplémentaire de F
- d'après 2.1 $F \cap G = \{0\}$
- Soit $x \in E$, puisque $(e_1, \dots e_n)$ est une base de E, il existe $\alpha_1, ...\alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i}_{x \in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i}_{x \in G} \in F + G$$

□

Proposition 2.4. Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E .

1. Si $F \cap G = 0$ alors
$$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$$
2. Si G est un supplémentairement de F dans E alors
$$\dim G = \dim E - \dim F \overbrace{=}^{Notation} \text{codim} F$$

Théorème 2.2 (Formule de Grassmann). Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E alors :

$$\dim F+G=\dim F+\dim G-\dim F\cap G$$

Preuve : • Si $F\cap G=\{0\}$ alors $\dim F+G=\dim F+\dim G$ d'après 2.4.

- Si $F\cap G\neq\{0\}$ considérons H un supplémentairement de $F\cap G$ dans F : $F=F\cap G\oplus H$ et montrons que $F+G=H\oplus G$.

— Soit $x\in H\cap G$ alors $x\in H\subset F$ et $x\in G$ donc $x\in H\cap F\cap G=\{0\}$ par suite $x=0$ et $H\cap G=\{0\}$

— Soit $u\in F+G$ donc $u=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$ on a $F=F\cap G\oplus H$ donc $f=h+g'$ avec $h\in H$ et $g'\in F\cap G$ par suite $u=\underbrace{h}_{\in H}+\underbrace{(g+g')}_{\in G}$ D'où $F+G=H\oplus G$.
D'après 2.4 on a

$$\dim F+G=\dim H+\dim G=(\dim F-\dim F\cap G)+\dim G$$

□

Remarque 2.1. Une base de $F+G$ peut construite de la façon suivante .

— On prend une base de base $B_0=(e_1,\dots,e_r)$ de $F\cap G$

— On la complète en une base $B_1=(e_1,\dots,e_r,f_1,\dots,f_p)$de F

— On complète B_0 en une base $B_2=(e_1,\dots,e_r,g_1,\dots,g_q)$de G

et on obtient :

$$B=(e_1,\dots,e_r,f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q) \text{ est une base de de } F+G$$

Proposition 2.5. Soient E de dimension finie et F,G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\text{(i)}: E=F\oplus G \iff (ii):\begin{cases} F\cap G=\{0\}\\ \dim E=\dim F+\dim G\end{cases} \iff (iii):\begin{cases} F+G=E\\ \dim E=\dim F+\dim G\end{cases}.$$

***Exemples* 2.1.** 1. $F=\mathrm{Vect}((1,0,0))$ et $G=\mathrm{Vect}((0,-1,1),\ (0,1,1))$. On vérifie que la famille $((1,0,0),(0,-1,1),\ (0,$
est libre donc $F\cap G=\{0\}$ et $\dim F+\dim G=3$. D'où $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.

2. $\mathbb{K}_4[X]=\mathrm{Vect}(1+X,X^3)\oplus\mathrm{Vect}(1+X^2,X^4-X,1)$.
En effet, la relation

$$\lambda_1(1+X)+\lambda_2X^3+\lambda_3(1+X^2)+\lambda_4(X^4-X)+\lambda_5=0$$

entraîne $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$ (en regardant les termes dominants.) La somme est donc directe.
De plus $\dim K_4[X]=\dim\mathrm{Vect}(1+X,X^3)+\dim\mathrm{Vect}(1+X^2,X^4-X,1)$

***Exercice* 5.** Soient F,G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$,
$G=\mathrm{vect}\{(1,0,0,0),(0,0,0,1),\}\subset\mathbb{R}^4$.

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que G un supplémentaire de F.

Solution : 1. comme précédemment, on montre qu'une base de F est donnée par les vecteurs $u_1=(1,-1,0,1)$ et $u_2=(0,-1,1,0)$ donc $\dim F=2$.

2. Il est claire que $\dim F+\dim G=4=\dim\mathbb{R}^4$ il suffit de montrer que $F\cap G=\{0\}$. Soit $u\in F\cap G$ le fait que $u\in G$ montre que $u=(a,0,0,b)$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ en remplaçant dans les équations de F on obtient $a=0$ et $b=0$ ce qui assure que $F\cap G=\{0\}$.

□

2.3 Somme de plusieurs en dimension finie

Théorème 2.3. Soit E de dimension finie admettant une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.
Si pour tout i de $[\![1,q]\!]$, β_i désigne une base de E_i, alors la réunion β des β_i est une base de E.
Elle est dite *base adaptée a la décomposition* $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.

Preuve : En remarquant, par associativité, que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i = \bigoplus_{i=1}^{q-1} E_i \oplus E_q$$

on a, par une simple récurrence :

$$\dim E = \sum_{i=1}^{q} \dim E_i = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Card} \beta_i = \operatorname{Card} \beta$$

Ici Les β_i sont deux à deux disjointes puisque $\forall i \neq j;\quad \operatorname{Vect}(\beta_i) \cap \operatorname{Vect}(\beta_j) = \{0\}$.
Ils suffit alors de montrer que β est génératrice.
Or, pour $x \in E$, il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots +, x_n$. De plus $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in E_i = \operatorname{Vect}(\beta_i)$, d'où par sommation $x \in \operatorname{Vect}(\beta)$. □

***Définition* 2.1.** Soit E de dimension finie et F un de E. On dit qu'une base de E est adaptée à F si ses premiers éléments forment une base de F

Proposition 2.6. Si les sous-espaces vectoriels $E_1, ..., E_r$ sont de dimensions finies alors la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie et on a

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \qquad \textbf{(1)}$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe ; c 'est - à - dire :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \Leftrightarrow \quad \textit{la somme } \sum_{i=1}^{n} E_i \textit{ est directe} \qquad \textbf{(2)}$$

Remarque 2.2. 1. Si la somme n'est pas directe, $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) < \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

2. On rappelle à ce propos la formule de Grassmann

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Corollaire 2.2. Soient E de dimension finie et $E_1, E_2, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels .

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \iff \begin{cases} \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \\ \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ est directe} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \\ E = \sum_{i=1}^{n} E_i \end{cases}$$

3 Rang d'une famille de vecteurs

***Définition* 3.1.** On appelle rang de n vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ l'entier positif défini par

$$\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \dim \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

Proposition 3.1. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ des vecteurs de E

1. $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) \leq \dim E$.
2. $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) \leq q$
3. $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = q$ si et seulement si $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ est libre.
   Notamment, $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) < q$ si et seulement si la famille est liée.
4. $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \dim E$ si et seulement si $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ est génératrice de E
5. Si e_q est nul ou combinaison linéaire des autres : $e_q = \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i e_i$ alors
   $$\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_{q-1})$$
6. $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_{q-1}, e_q + \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i e_i) \qquad \lambda_i \in \mathbb{K}$
7. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*; \quad \operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \operatorname{rg}(\alpha e_1, e_2, \ldots, e_q)$

Preuve :
1. $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) \subset E$ donc $\dim \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) \leq \dim E$
2. $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ est génératrice de $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ donc $\operatorname{Card}(e_1, e_2, \ldots, e_q) \geq \dim(e_1, e_2, \ldots, e_q)$
3. • Si $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = q$ alors $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ est une famille génératrice de $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ qui à $\dim F$ éléments. C'est donc une base de F. Elle est donc libre
   Si $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ est libre, comme elle est génératrice de F (par définition de $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$) c'est donc une base de F. D'où $\dim F = \operatorname{Card}\{e_1, e_2, \ldots, e_q\} = q$
4. • Si $rg(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \dim E$ alors comme de plus $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) \subset E$, on a $F = E$. $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ est donc une famille génératrice de E.
   • Si $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ une famille génératrice de E, on a $E = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = F$ d'où $\dim E = \dim F = \operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$.
5. Découle de $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{q-1})$
6. Découle $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{q-1}, e_q + \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i e_i)$
7. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*; \quad \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q) = \operatorname{Vect}(\alpha e_1, e_2, \ldots, e_q)$

□

***Exemple* 3.1.** $(e_1, e_2, e_3) = ((1,2,3), (2,3,4), (3,5,7))$.
$\operatorname{rg}(e_1, e_2, e_3) = \operatorname{rg}(e_1, e_2) = 2$ puisque $e_3 = e_1 + e_2$ et que (e_1, e_2) est libre.
Remarque 3.1. Par le théorème de la base incomplète , $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ est le cardinale de la plus sous famille libre de $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$

***Exercice* 6.** Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux famille finie de E

1. Montrer que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G} \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leq \operatorname{rg}(\mathscr{G})$
2. Montrer que $\max(\operatorname{rg}(\mathscr{F}), \operatorname{rg}(\mathscr{G})) \leq \operatorname{rg}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G}) \leq \operatorname{rg}(\mathscr{F}) + \operatorname{rg}(\mathscr{G})$

Solution :
1. Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ alors $\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{G})$ donc par passage au dimensions on a $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leq \operatorname{rg}(\mathscr{G})$
2. • De $\mathscr{F} \subset \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ on déduit $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leq \operatorname{rg}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$ de même $\operatorname{rg}(\mathscr{G}) \leq \operatorname{rg}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$ ce qui donne la première égalité.
   • En remarquant que $\operatorname{Vect}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G}) \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) + \operatorname{Vect}(\mathscr{G})$ on obtient
   $$\operatorname{rg}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G}) \leq \dim(\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) + \operatorname{Vect}(\mathscr{G})) \leq \dim(\operatorname{Vect}(\mathscr{F})) + \dim(\operatorname{Vect}(\mathscr{G})) = \operatorname{rg}(\mathscr{F}) + \operatorname{rg}(\mathscr{G})$$

□

Plan

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Dans tout ce chapitre :

- $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- E, F et G des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels

1 Généralité sur les applications linéaire

1.1 Définitions et caractérisation

***Définition* 1.1.** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application

$$f \text{ est une application linéaire} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \forall x,y\in E & f(x+y)=f(x)+f(y) \\ \forall x\in E\,\forall\lambda\in\mathbb{K} & f(\lambda x)=\lambda f(x)\end{cases}$$

On note alors $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F

Proposition 1.1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application . f est une application linéaire si et seulement si

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

VOCABULAIRE : Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que f est un :

- **Isomorphisme si** f est bijective.
- **Endomorphisme** de E **si** $E = F$. On note $\in \mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$ des endomorphismes de E
- **Automorphisme** de E **si** $E = F$ et f bijective. L'ensemble des automorphismes est appelé *groupe linéaire de* E et est noté $GL(E)$
- **Forme linéaire** sur E **si** $F = \mathbb{K}$ .On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des Forme linéaire sur E

Exemples 1.1.

1. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array} \right.$ est une application linéaire appelée application linéaire nulle .
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + 2y \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.
   En effet : Soit $u = (x, y)$ et $v = (a, b)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$f(u + \lambda V) = f((x + \lambda a, y + \lambda b)) = x + \lambda a + 2(y + \lambda b) = \underbrace{x + 2y}_{f(u)} + \lambda \underbrace{(a + 2b)}_{f(v)} = f(u) + \lambda f(v)$$
   donc f est une application linéaire, et puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, il s'agit d'une forme linéaire
3. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme, car φ est de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même et :
   $$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$$
4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites convergente à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors $\mathscr{F}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\lim : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \to & \mathbb{K} \\ (x_n) & \mapsto & \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathscr{F}$.
5. $I : \left\{ \begin{array}{ccc} C([a, b], \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Proposition 1.2. Soit $f \in L(E, F)$ alors :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; pour tout $u_1, ..., u_n \in E$ et pour tout $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ on a
   $$f(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(u_k)$$

Preuve :

1. $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$ donc $f(0_E) = 0_F$
2. Par récurrence sur n. □

1.2 L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ - Composition

Proposition 1.3. Soit $f,g \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

1. $f+g \in \mathscr{L}(E,F)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda f \in \mathscr{L}(E,F)$

Preuve : 1. $f+g \in \mathscr{L}(E,F)$ car :

$$\forall x,y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (f+g)(x+\lambda y) = f(x+\lambda y)+g(x+\lambda y) = f(x)+\lambda f(y)+g(x)+\lambda g(y) = (f+g)(x)+\lambda(f+g)(y).$$

2. De même.

□

Corollaire 1.1. $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

Proposition 1.4 (Composition). Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
c'est à dire :

$$\boxed{E \longrightarrow f \text{ lin} F \xrightarrow{g \text{ lin}} G} \Longrightarrow \boxed{E \xrightarrow{gof} G \text{ est } \textbf{linéaire}}$$

Preuve :

$$\forall x,y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad g \circ f(x+\lambda y) = g(f(x+\lambda y)) = g(f(x)+\lambda f(y)) = g \circ f(x)+\lambda g \circ f(y).$$

□

1.3 Isomorphismes

***Définition* 1.2.** 1. Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ qui est bijective. c'est à dire

$$\boxed{f \text{ isomorphisme de } E \text{ dans } F} \Leftrightarrow \boxed{f : \ E \longrightarrow F \text{ est } \textbf{linéaire bijective}}$$

2. On dit que E et F sont isomorphe s'il existe un isomorphisme de de E dans F.

***Attention* 1.1.** Deux espaces quelconques ne sont pas forcement isomorphes.

Proposition 1.5. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

Preuve :

$$\forall x,y \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x))+\lambda f(f^{-1}(y)) = x+\lambda y$$

donc $\quad f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y) = f^{-1}(x+\lambda y).$ □

2 Endomorphismes d'un espace vectoriel

2.1 Définitions et exemples

***Définition* 2.1.** 1. Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui même on note $f \in \mathscr{L}(E)$.
c'est à dire

$$\boxed{f \text{ endomorphisme de } E} \Leftrightarrow \boxed{f: E \longrightarrow E \text{ est } \textbf{linéaire}}$$

2. Un automorphisme de E est un endomorphisme de E qui est bijective.

$$\boxed{f \text{ automorphisme de } E} \Leftrightarrow \boxed{f: E \longrightarrow E \text{ est } \textbf{linéaire bijective}}$$

Notation 2.1. • On note $\in \mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$ des endomorphismes de E

• L'ensemble des automorphismes est appelé *groupe linéaire de* E et est noté $GL(E)$

***Exemples* 2.1.** les applications suivantes sont des endomorphismes.

$$1) \quad \varphi: \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \quad 2) \quad \psi: \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (x \mapsto \int_0^x f) \end{array}$$

et on a

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}); \quad \varphi o \psi(f) = f \quad \text{et} \quad \psi o \varphi(f) = f - f(0)$$

***Définition* 2.2.** 1. L'application $Id_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E appelé identité de E.

2. L'application $\lambda.Id_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E appelé homothétie de rapport λ.

2.2 Opérations dans $L(E)$

Corollaire 2.1. 1. $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel
2. $\forall f, g \in \mathscr{L}(E), \quad f \circ g \in \mathscr{L}(E) \quad \text{et} \quad g \circ f \in \mathscr{L}(E)$

Remarque 2.1. La composition o définie une loi de composition interne sur $\mathscr{L}(E.)$

Proposition 2.1 (Régles de calcul dans $\mathscr{L}(E)$). Soit $f,g,h \in \mathscr{L}(E)$ $\quad ,\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. Alors

1. Bilinéarité :
   - $ho(\alpha f+\beta g) = \alpha hof + \beta hog$
   - $(\alpha f+\beta g)oh = \alpha foh + \beta goh$
2. Associativité : $\quad fo(goh) = (fog)oh$
3. Élément neutre : $foId_E = Id_E of = f$
4. Les seuls éléments inversibles dans $\mathscr{L}(E)$ pour o sont les automorphismes de E. et si f est un automorphismes alors l'inverse de f pour o est sa bijection réciproque f^{-1}

***Attention* 2.1.** — En générale

$$\boxed{\mathrm{f} \circ g \neq g \circ f}$$

— Si $f \circ g = g \circ f$ on dit que f et g commutent entre eux.

— Souvent, on note fg au lieux de fog

***Définition* 2.3.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. On definit f^n par

$$\boxed{f^n \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \underbrace{fof\ldots\ldots of}_{nfois} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ Id_E & \text{si } n = 0 \end{cases}}$$

Proposition 2.2. Soit $f,g \in \mathscr{L}(E)$ et $n,p \in \mathbb{N}$.

1. $$\boxed{(f^n)^p = f^{(np)}.}$$
2. $$\boxed{f^n \circ f^p = f^{(n+p)}.}$$

Proposition 2.3. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. Si **f o g = g of** alors :

1. $$\boxed{(fog)^n = f^n og^n.}$$
2. Formule de binôme de Newton
$$\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k og^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{n-k} og^k}$$
3. **Factorisation :** Si $n \in \mathbb{N}^*$
$$\boxed{f^n - g^n = (f-g)o(f^{n-1} + f^{n-2}og + \ldots\ldots + g^{n-1}) = (f-g)\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{(n-1-k)}}$$
En particulier :
$$\boxed{Id_E - g^n = (Id_E - g)o(Id_E + g + \ldots\ldots + g^{n-1}) = (f - Id_E)\sum_{k=0}^{n-1} g^k}$$

***Attention* 2.2.** Les résultats de la proposition précédente sont **fausses** si $fog \neq gof$.
Notamment $(fog)^n \neq f^n og^n$, mais en cas de besoin on peut utiliser la relation suivante, valable pour tout $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\boxed{(\mathrm{f\ o\ g})^n = fo(gof)^{n-1}og}$$

***Exemples* 2.2.** On a en particulier pour $n = 2$ Lorsque $fg = gf$
$$(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2 \tag{1}$$
$$(f-g)^2 = f^2 - 2fg + g^2 \tag{2}$$
$$f^2 - g^2 = (f-g)(f+g) \tag{3}$$

si $fg \neq gf$ (1) et (2)deviennent
$$(f+g)^2 = f^2 + fg + gf + g^2 \tag{4}$$
$$(f-g)^2 = f^2 - fg - gf + g^2 \tag{5}$$

2.3 Automorphisme - Groupe linéaire

On rappel que si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors

$$\begin{aligned} f \in GL(E) \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{bijective} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists g \in \mathscr{L}(E);\quad fog = gof = Id_E \end{aligned}$$

On a alors $g = f^{-1}$.

Proposition 2.4. Soit $f, g \in GL(E)$

1. $Id_E \in GL(E)$
2. $f^{-1} \in GL(E)$
3. $fog \in GL(E)$

Corollaire 2.2. $(GL(E), o)$ est un groupe (*Ce qui jstifie la nomination " Groupe lineaire "*)

2.4 Polynômes d'un endomorphisme

E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

***Définition* 2.4.** $f \in L(E)$ endomorphisme de E et $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme.

- On définit $P(f)$ par
$$P(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k \qquad \in \mathscr{L}(E)$$
- On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Proposition 2.5. Soient $f, g \in L(E)$. Alors pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a
$$(P + \lambda Q)(f) = P(f) + \lambda Q(f)$$
$$(PQ)(f) = P(f)Q(f)$$
$$fog = gof \quad \Rightarrow P(f)oQ(g) = Q(g)oP(f)$$
En particulier f et $P(f)$ commutent.

***Exemple* 2.1.** Si $P = 3 + 2X - 5X^2 + X^4$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ alors
$$P(f) = 3Id_E + 2f - 5f^2 + f^4$$
Attention au terme constant : $\quad 3 = 3X^0 \quad \longrightarrow \quad 3f^0 = 3Id_E$

***Exercice* 1.** Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Développer $(id - f^2)o(id + f^2)$.
2. Montrer que si $f^4 = 0$ alors $id - f$ est bijective .

Solution : 1. Puisque $(1 - X^2)(1 + X^2) = 1 - X^4$, en composant avec f, on a $(Id - f^2)o(Id + f^2) = Id - f^4$

2. Supposons que $f^4 = 0$ alors $(Id - f^2)o(Id + f^2) = Id$ et puisque $(Id - f^2)$ et $(Id + f^2)$ commutent alors $(Id - f^2)$ est un automorphisme et $(Id - f^2)^{-1} = (Id + f^2)$.

□

***Exercice* 2.** Montrer que Si $f^m = 0$ pour $m \geq 1$ alors $id - f$ est **bijective**

Solution : on a
$$\begin{aligned} f^m = 0 \quad &\Rightarrow \quad Id - f^m = Id \\ &\Rightarrow \quad (Id - f)\sum_{k=0}^{m-1} f^k = Id \end{aligned}$$
et puisque $(Id - f)$ et $\sum_{k=0}^{m-1} f^k$ commutent on déduit que $(Id - f)$ est bijective et $(Id - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} f^k$ □

***Exercice* 3.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ on suppose que $f^2 - 3f + 2Id = 0$.

1. Justifier que $(f-Id)(f-2Id)=0$.
2. Déterminer f^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Montrer que f est un automorphisme.
4. Déterminer f^{-n} pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Solution : 1. On a $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$ donc $(f-Id)(f-2Id)=f^2-3f+2Id=0$.

2. On effectue la division euclidienne de X^n sur $(X-1)(X+2)$:
$$X^n=(X-1)(X+2)Q+aX+b \qquad a,b\in\mathbb{K}$$
On remplace successivement par 1 et 2 et on obtient le système
$$\begin{cases} a+b=1\\ 2a+b=2^n\end{cases}$$
qui donne $a=2^n-1$ et $b=2-2^n$. Ainsi
$$X^n=(X-1)(X+2)Q+(2^n-1)X+(2-2^n)$$
En composant avec f on obtiant :
$$f^n=\underbrace{(f-Id)(f-2Id)}_{=0}Q(f)+(2^n-1)f+(2-2^n)Id=(2^n-1)f+(2-2^n)Id$$

3. De $f^2-3f+2Id=0$, en faisant passer $2Id$ de l'autre cote de égalité et en divisant par -2, on déduit que
$$\frac{1}{2}(f^2-3f)=Id$$
En factorisant par f
$$f o\left[\frac{1}{2}(f-3Id)\right]=Id$$
et comme f et $\left[\frac{1}{2}(f-3Id)\right]$ commutent, on déduit que f est bijective et que
$$f^{-1}=\frac{1}{2}(f-3Id)$$

4. En composant $f^2-3f+2Id=0$ avec f^{-2} et par bilinéarité de la composition on a
$$Id-3f^{-1}+2f^{-2}=0.$$
en posant $g=f^{-1}$ et en remarquant que $1-3X+2X^2=(X-1)(X-\frac{1}{2})$, on peut refaire la démarche de 2- et déterminer $f^{-n}=g^n$.

□

3 Noyau et Image d'une application linéaire

E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels .

Théorème 3.1 (Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel .). Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

1. $\boxed{A \text{ sev de } E} \Longrightarrow \boxed{f(A) \text{ est un sev de } F}$
2. $\boxed{B \text{ sev de } F} \Longrightarrow \boxed{f^{-1}(B) \text{ est un sev de } E}$

Preuve : 1. Soit A sev de E
- $0_E\in A$ et $0_F=f(0_E)$ donc $0_F\in f(A)$
- Soient $y_1,y_2\in f(A)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. posons $y_1=f(x_1)$, et $y_2=f(x_2)$ avec $x_1,x_2\in A$. Alors
$$y_1+\lambda y_2=f(x_1)+\lambda f(x_2)=f(\underbrace{x_1+\lambda x_2}_{\in A})\in f(A)$$

2. Soit B sev de F
   - $0_F \in B$ et $0_F = f(0_E)$ donc $0_E \in f^{-1}(B)$
   - Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. posons $y_1 = f(x_1) \in B$, et $y_2 = f(x_2) \in B$.

$$f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2) = y_1 + \lambda y_2 \in B$$

Donc

$$x_1 + \lambda x_2 \in f^{-1}(B)$$

□

***Définition* 3.1.** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1) On appelle $\boxed{\text{image}}$ de f,l'ensemble noté et définie par :

$$\boxed{Im(f) \overset{\text{déf}}{=} \{f(x)/ \quad x \in E\} = f(E)}$$

2) On appelle $\boxed{\text{Le noyau}}$ de f,l'ensemble noté et définie par :

$$\boxed{Ker(f) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E/ \quad f(x) = 0_F\}}$$

Corollaire 3.1. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

1. Imf est un **sous-espace vectoriel** de F.
2. $Kerf$ est un **sous-espace vectoriel** de E.

Remarque 3.1. On a les équivalences :

$$\boxed{y \in Imf \Longleftrightarrow \exists x \in E, f(x) = y}$$

$$\boxed{x \in Kerf \Longleftrightarrow f(x) = 0_F}$$

***Exemple* 3.1.** $H = \{f \in C^0([a;b],\mathbb{R}) / \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ est le noyau de l'application lineaire $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ donc c'est un s.e.v de $C^0([a;b],\mathbb{R})$

***Exercice* 4.** Soit f l'application linéaire définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2y-4z) \end{array}$$

1. Déterminer le noyau de f.
2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est libre puis en déduire l'image de l'application linéaire f

Solution : 1. Soit$u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in \ker(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(u) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y-z, 2y-4z) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ y=2z \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=2z \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad u = z(-1,2,1)$$

Ainsi $\ker(f) = \text{Vect}((-1,2,1))$.

2. $f(e_1)=(1,0)$ et $f(e_2)=(1,2)$ on vérifie aisément que$(f(e_1),f(e_2))$ est libre. D'autre par $f(e_1),f(e_2)$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2))\subset \mathrm{Im}(f)$par passage aux dimensions, puisque $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ on a :

$$2=\dim \mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2))\leq \dim \mathrm{Im}(f)\leq \dim \mathbb{R}^2=2$$

donc $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$ et f surjective.

□

Théorème 3.2. Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$

1. $\boxed{f \text{ est } \textbf{injective}} \iff \boxed{ker(f)=\{0_E\}}$
2. $\boxed{f \text{ est } \textbf{serjective}} \iff \boxed{Im(f)=F}$

Preuve : 1. • supposons que f injective et montrer que $ker(f)=\{0_E\}$. Soit $x\in ker(f)$ donc $f(x)=0_F=f(0_E)$ et puisque f injective on a $x=0_E$. Ainsi $ker(f)=\{0_E\}$.
• Supposons $\ker(f)=\{0_E\}$ et montrer que f injective . Soient $u,v\in E$ tels que $f(u)=f(v)$. f étant linéaire donc

$$f(u-v)=f(u)-f(v)=0$$

par suite $u-v\in ker(f)=\{0_E\}$ ce qui preuve que $u=v$ et donc f injective.

2. f surjective $\Leftrightarrow$ $f(E)=F$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f)=F$

□

***Exemples* 3.1.** Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications linéaires suivantes :

1) $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y)\end{array}\right.$

2) $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]\\ P & \longmapsto & P'\end{array}\right.$

Solution : 1. • soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$u\in\ker f \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}x+y=0\\ x-y=0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}x+y=0\\ x-y=0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad u=(0,0)$$

Ainsi $\ker f=\{(0,0)\}$ et f est injective
• Soit (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ona $f(e_1)=(1,1)$ et $f(e_2)=(1,-1)$, on vérifie que $(f(e_1),f(e_2))$ est libre donc base de $\mathbb{R}^2$ par suite

$$\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}((f(e_1),f(e_2)))\subset \mathrm{Im}(f)\subset\mathbb{R}^2$$

Par suite $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2$ et f est surjective.

2. $Kerf=\mathbb{R}_0[X]$; $\quad Imf=\mathbb{R}[X]$ donc f est surjective et non injective.

□

***Exercice* 5.** Montrer que $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X],\ P\mapsto P-XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image

Solution : • Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{rcl}f(\lambda P+Q) & = & (\lambda P+Q)-X(\lambda P+Q)'\\ & = & \lambda P+Q-X(\lambda P'+Q')\\ & = & \lambda(P-XP')+Q-XQ'=f(P)+\lambda f(Q).\end{array}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire.

• P est dans $\ker(f)$ si et seulement si $P-XP'=0$. Ecrivons $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. Alors on a :

$$P-XP'=\sum_{k=1}^{n}(a_k-ka_k)X^k+a_0.$$

On en déduit que la suite (a_k) vérifie $a_0 = 0$ and $a_k(1-k) = 0$ pour k allant de 1 à n. Ainsi, $a_k = 0$ pour $k \neq 1$, la valeur de a_1 étant quelconque. On en déduit que $\ker(f) = \text{vect}(X)$.

- Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Si $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ est élément de $\text{Im}(f)$, il existe $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $Q = P' - XP$ soit, d'après le calcul précédent,

$$b_k = a_k(1-k).$$

On en déduit $b_1 = 0$ et donc $Q \in F = \text{vect}(X^k;\ k \neq 0)$. Réciproquement, soit $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ un élément de F, c'est-à-dire un polynôme sans terme en X. Alors, si on pose $a_k = (1-k)^{-1} b_k$, $k \neq 0$, et $a_1 = 0$, le calcul précédent montre que $P' - XP = Q$ et donc $Q \in \text{Im}(f)$. Ainsi, $\text{Im}(f) = F$. □

Proposition 3.1 (Deux inclusionsà retenir)**.** Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors

$$\boxed{\ker(f) \subset \ker(gof)} \qquad \boxed{\text{Im(g o f)} \subset \text{Im}(g)}$$

4 Applications linéaires en dimension finie

Dans cette section E,F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels

4.1 Applications linéaires et famille génératrice

Proposition 4.1. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\boxed{(u_1,\dots,u_n) \text{ est génératrice de } E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(f(u_1),\dots,f(u_n)) \text{ est génératrice de } \text{Im}(f)}$$

Preuve : Supposons que $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille génératrice de E

- $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ est une famille de $\text{Im}(f)$ qui est un sous-espace vectoriel , donc $\text{Vect}(f(u_1),\dots,f(u_n)) \subset \text{Im}(f)$
- Soit $y \in \text{Im}(f)$, il exite $x \in E$ tel que $f(x) = y$, or $(u_1,\dots,u_n)$ est une génératrice de E donc $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ donc, par linéarité de f,

on a

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) \in \text{Vect}(f(u_1),\dots,f(u_n))$$

ce qui assure l'autre inclusion □

***Exercice* 6.** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1-X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution : 1. Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E. Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que u est linéaire. Mais, si $P,Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
u(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q) + (1-X)(P+\lambda Q)' \\
&= P + \lambda Q + (1-X)(P' + \lambda Q') \\
&= P + (1-X)P' + \lambda(Q + (1-X)Q') \\
&= u(P) + \lambda u(Q).
\end{aligned}$$

u est donc bien linéaire.

2. Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E, on sait que $u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. On va pouvoir en extraire une base. On a :
$$u(1) = 1,\ u(X) = 1,\ u(X^2) = -X^2 + 2X,\ u(X^3) = -2X^3 + 3X^2.$$
On en déduit que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une famille libre (ce sont des polynômes de degrés différents) et que $u(X)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ceux-ci (on a même $u(X) = u(1)$). Ainsi, ceci prouve que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Ecrivons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et calculons $u(P)$:
$$u(P) = -2aX^3 + (3a - 2b)X^2 + 2bX + c + d.$$
Ainsi, on obtient
$$u(P) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2a & = & 0 \\ 3a - 2b & = & 0 \\ 2b & = & 0 \\ c + d & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & c \\ d & = & -c \end{array}\right.$$
Ainsi, $P \in \ker(u) \iff \exists c \in \mathbb{R},\ P = c(X - 1)$. Une base de $\ker(u)$ est donné par le polynôme $X - 1$.
4. La réunion des bases de $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ trouvées précédemment est $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2, X - 1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment une base de E. Ceci prouve que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires.

□

Corollaire 4.1. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. il y a équivalence entre :
1. f est surjective
2. l'image de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F

Corollaire 4.2. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est surjective et $\dim E < \infty$. Alors F est de dimension finie et
$$\dim F \leq \dim E$$

Remarque 4.1. Si $\dim F > \dim E$ Alors il ne peut y avoir une application linéaire surjective de E dans F.

4.2 Applications linéaires et les famille Libres

***Attention* 4.1.** l'image par une application linéaire d'une famille libre n'est forcement une famille libre

Proposition 4.2. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. il y a équivalence entre :
1. f est injective
2. l'image de toute famille libre de E est une famille libre de F

Corollaire 4.3. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective et $\dim F < \infty$. Alors E est de dimension finie et
$$\dim E \leq \dim F$$

Remarque 4.2. Si $\dim F < \dim E$ Alors il ne peut y avoir une application linéaire injective de E dans F.

4.3 Applications linéaires et les bases

Proposition 4.3. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. il y a équivalence entre :

1. f est bijjective
2. l'image de **toute** base de E est une base de F
3. l'image de **UNE** base de E est une base de F

Corollaire 4.4. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective et $\dim E < \infty$. Alors F est de dimension finie et

$$\dim E = \dim F$$

Remarque 4.3. Si $\dim F \neq \dim E$ Alors il ne peut y avoir une application linéaire bijective de E dans F.

***Exemple* 4.1.** Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, z+x) \end{cases}$. Alors f est une application linéaire qui transforme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en la famille $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ qui constitue une base de $\mathbb{R}^3$. Donc f est un automorphisme

Théorème 4.1. Si $\dim E = n$ et que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. Alors pour tout $(y_1,\dots,y_n)$ dans F^n il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad f(e_i) = y_i$$

De plus f est déterminée pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ par

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Remarque 4.4. Pour construire une application linéaire , il suffit de donner ses valeurs sur une base.

***Exemple* 4.2.** Soit E un espace de $\dim E = 2n$, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tels que $\dim F = \dim G = n$. Construire un automorphisme f de E qui vérifie $f(F) = G$ et $f(G) = F$

Solution : Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une base de F et $(v_1,\dots,v_n)$ une base de G. Puisque F et G sont supplémentaires dans E alors $(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)$ est une base de E

On considère f l'endomorphisme de E définie par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad f(u_i) = v_i \qquad \text{et} \qquad f(v_i) = u_i$$

Alors f est un automorphisme de E, car il trans forme une base de E en une base de E . de plus

$$f(F) = \text{Vect}((f(u_1),\dots,f(u_n))) = \text{Vect}((v_1,\dots,v_n)) = G$$
$$f(G) = \text{Vect}((f(v_1),\dots,f(v_n))) = \text{Vect}((u_1,\dots,u_n)) = F$$

□

Proposition 4.4. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie . Alors

$$\boxed{E \text{ et } F \text{ sont isomorphes}} \iff \boxed{\dim E = \dim F.}$$

Preuve : • Si f est un isomorphisme de E dans F, et $(u_1,...,u_n)$ une base de E alors $(f(u_1),...,fu(_n))$ est une base de F donc $\dim E = \dim F$.

• Supposons que $\dim E = \dim F$. Soit $(u_1,...,u_n)$ une base de E et $(v_1,...,v_n)$ une base de F.
On considère l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ définie par

$$\forall i \in [\![1,n]\!]; \qquad f(u_i) = v_i$$

Alors f est un isomorphisme puisqu'elle transforme une base de E en une base de F. □

Remarque 4.5. Tous les espaces vectoriels de dimension finie égale à n sont isomorphes à $\mathbb{K}^n$

Théorème 4.2. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies .
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et on a

$$\boxed{\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E . \dim F}$$

Preuve : Soit $B = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E avec $n = \dim E$. Soit

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1),...,u(e_1)) \end{array} \right.$$

Alors Ψ est linéaire et vérifie, d'après le théorème 4.1 :

$$\forall (y_1,...,y_n) \in F^n \quad \exists! u \in \mathscr{L}(E,F); \forall i \in [\![1,n]\!] \qquad u(e_i) = y_i$$

c'est à dire

$$\forall (y_1,...,y_n) \in F^n \quad \exists! u \in \mathscr{L}(E,F); \Psi(u) = (u(e_1),...,u(e_n)) = (y_1,...,y_n)$$

Ce qui veut dire que Ψ est bijective. Ainsi $\mathscr{L}(E,F)$ et F^n sont isomorphe donc

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = F^n = n \dim F = \dim E . \dim F$$

□

4.4 Application linéaire entre espaces de même dimension

Théorème 4.3. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tel que $\boxed{\dim E = \dim F.}$
Soit $f \in L(E,F)$. Alors :

(i) : $\boxed{f \text{ est } \textbf{injective.}}$ $\Leftrightarrow$ (ii) : $\boxed{f \text{ est } \textbf{surjective.}}$ $\Leftrightarrow$ (iii) : $\boxed{f \text{ est } \textbf{bijective.}}$

Preuve : Posons $\dim E = \dim F = n$

• $(i) \Leftrightarrow (iii)$:
Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, si f est injective alors $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une famille libre de F et comme elle est de cardinale n c'est une base de F. Ainsi f transforme une base de E en une base de F,donc bijective . La réciproque est évidente

• $(ii) \Leftrightarrow (iii)$:
Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, si f est surjective alors $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une famille génératrice de F et comme elle est de cardinale n c'est une base de F. Ainsi f transforme une base de E en une base de F,donc bijective . La réciproque est évidente

□

Remarque 4.6. Lorsque $\boxed{\dim E = \dim F.}$ Pour montrer que $f \in L(E,F)$ est un isomorphisme il suffit de montrer que f est injective . Notamment ceci est valable lorsque f est un endomorphisme d' espace vectoriel de dimension finie .

***Exemple* 4.3.** Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; (x,y)\mapsto(x+y,x)$alors f est un automorphisme .
En effet :

$$(x,y)\in\ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$$

Ainsi f est injective et comme c'est un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie alors f est un automorphisme .

Proposition 4.5. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $f\in\mathscr{L}(E)$ .Les les propositions suivantes sont équivalentes

1. f est bijective
2. $g\in\mathscr{L}(E)$ tel que $gof=Id_E$.
3. $g\in\mathscr{L}(E)$ tel que $fog=Id_E$.

Lorsque l'une des l'une des deux dernières propriétés est vérifiée alors $f^{-1}=g$

Preuve : • $1 \Leftrightarrow 2$: Si $gof=Id_E$ alors f est injective et puisque c'est un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie , f est bijective et en composant avec f^{-1} on a $f^{-1}=g$. La réciproque est évidente

• $1 \Leftrightarrow 3$: Si $fog=Id_E$ alors f est surjective et puisque c'est un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie , f est bijective et en composant avec f^{-1} on a $f^{-1}=g$. La réciproque est évidente

□

Remarque 4.7. Le résultat précédent est faux en dimension infinie. (voir l'exemple 2.1)

5 Applications linéaires et somme de sous-espaces vectoriels

E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

5.1 Une caractérisation des sommes directes

Proposition 5.1. Soi E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On considère l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} E_1\times E_2 & \longrightarrow & E \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & x_1+x_2 \end{array}$$

Alors

1. φ est linéaire
2. $\mathrm{Im}\varphi=E_1+E_2$
3. E_1+E_2 est une somme directe si et seulement si φ est injective
4. $E=E_1+E_2$ si et seulement si φ est surjective
5. E_1 et E_2 sont supplémentaires si et seulement si φ est un isomorphisme.

5.2 Projections - projeteurs

***Définition* 5.1.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F,G deux sev supplémentaires dans E , $E = F \oplus G$ Ainsi

$$\forall x \in E, \quad \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G$$

On appelle **projection vectorielle sur** F **parallèlement** à G ,l'application

$$P_{FG} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F \end{array}$$

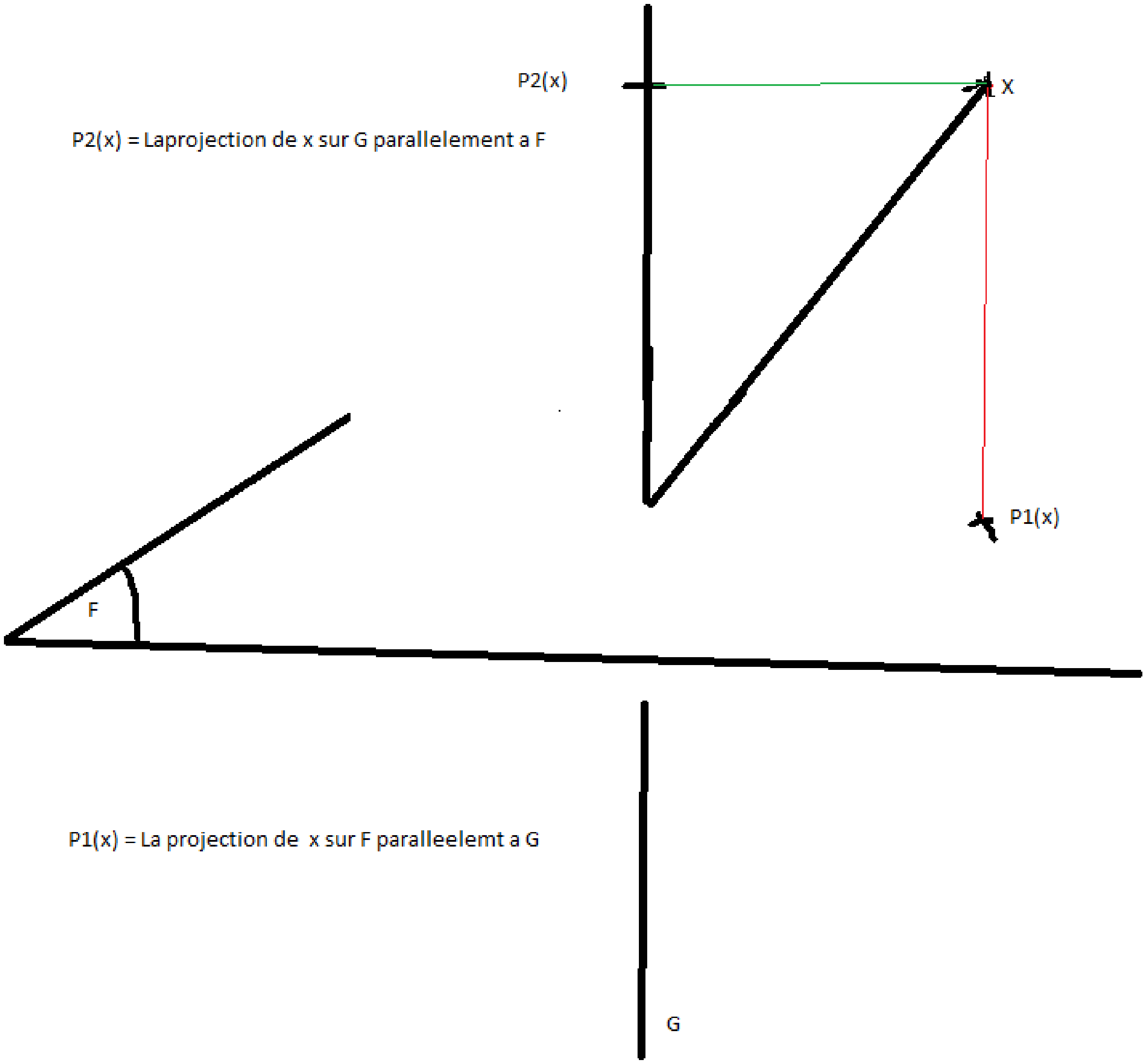
Remarque 5.1. Si $E = F \oplus G$ alors

$$\forall x \in E \qquad x = P_{FG}(x) + P_{GF}(x)$$

Ainsi

$$Id_E = P_{FG} + P_{GF}$$

Interprétation géométrique :
Si F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et G une droite vectorielle supplémentaire à F



Proposition 5.2 (**Propriété d'une projection :**). Soit p une projection sur F parallèlement à G. Alors

1. p est un endomorphisme ($p \in \mathscr{L}(E)$)
2. $\forall x \in E; \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in G$ ainsi $\quad \ker p = G$.
3. $\mathrm{Im} p = F$.
4. $pop = p$.
5. $\forall x \in E; \quad p(x) = x \Leftrightarrow x \in F$

***Définition* 5.2.** On appelle projeteur de E tout endomorphisme ($p \in \mathscr{L}(E)$) vérifiant $pop = p$

Proposition 5.3. Soit ($p \in \mathscr{L}(E)$) projeteur de E C.A.D : $pop = p$.Alors

1. $\ker(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im} p$
2. $\ker p \oplus \mathrm{Im} p = E$
3. p est la projection sur $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\ker(p)$.

***Définition* 5.3.** On suppose $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, pour $i \in [\![1, n]\!]$ on définit l'application linéaire

$$P_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k & \longmapsto & x_i \end{array}$$

La famille $(P_1, \ldots, P_n)$ s'appelle la famille des projecteurs associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

5.3 Symétries

***Définition* 5.4.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev supplémentaires dans E , $\quad E = F \oplus G$ Ainsi

$$\forall x \in E, \quad \exists! (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G$$

On appelle **symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement** à G ,l'application

$$S_{FG} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G \end{array}$$

Remarque 5.2. Si $E = F \oplus G$ alors

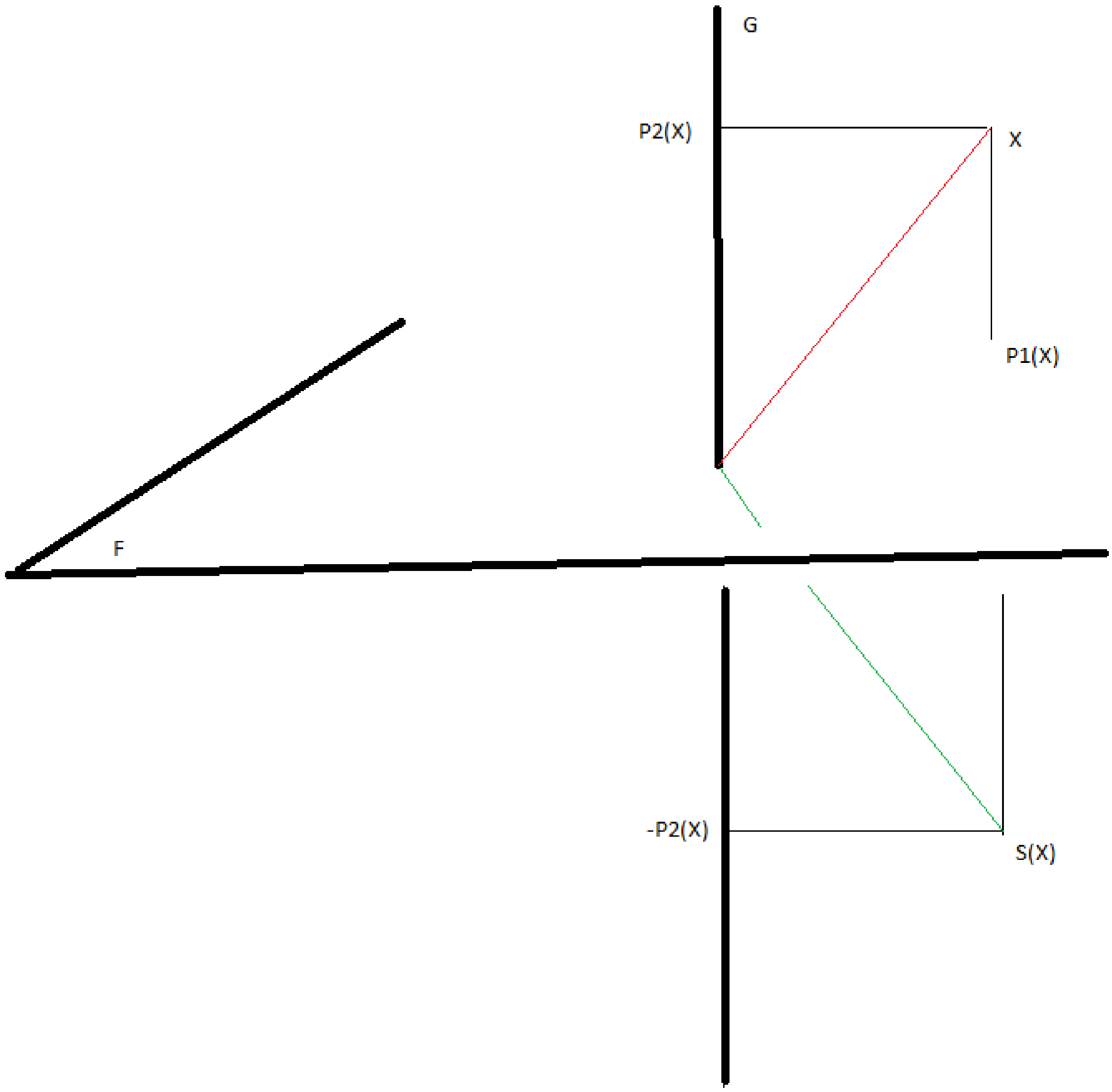
$$\forall x \in E \qquad S_{FG}(x) = P_{FG}(x) - P_{GF}(x)$$

Ainsi

$$\boxed{S_{FG} = P_{FG} - P_{GF}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{FG} = \frac{1}{2}(Id_E + S_{FG})}$$

Interprétation géométrique :
Dans le cas où F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et G une droite vectorielle supplémentaire à F

$$P1 = P_{FG} \qquad P2 = P_{GF} \qquad S = S_{FG}$$



Proposition 5.4 (**Propriété d'une symétrie :**). Soit S la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors

1. S est un endomorphisme ($S \in \mathscr{L}(E)$)
2. $SoS = \text{Id}$.
3. S est bijective (donc un automorphisme de E)
4. $\forall x \in E; \quad S(x) = x \Leftrightarrow x \in F$ ainsi $F = \ker(S - Id)$
5. $\forall x \in E; \quad S(x) = -x \Leftrightarrow x \in G$ ainsi $G = \ker(S + Id)$

***Définition* 5.5.** On appelle symétrie de E tout endomorphisme ($S \in \mathscr{L}(E)$) vérifiant $SoS = \text{Id}$

Proposition 5.5. Soit ($S \in \mathscr{L}(E)$) symétrie de E C.A.D : $SoS = \text{Id}$.Alors

1. $\ker(S - Id) \oplus \ker(S + Id) = E$
2. S est la symétrie par rapport à $\ker(S - Id)$ parallèlement à $\ker(S + Id)$.

5.4 Détermination d'une application linéaire par sa restriction au sous espaces supplémentaires

E et F des espaces vectoriels et $E_1, \ldots, E_k$ des sous-espaces vectoriels de E

Théorème 5.1. On suppose $E = E_i \oplus E_2$ et Soit $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$ alors

$$\exists \boxed{!} u \in L(E, F) \text{ tel que } \forall\, i \in [\![1, 2]\!],\ u_{|E_i} = u_i.$$

De plus si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ alors :

$$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2).$$

Remarque 5.3. Autrement dit, Pour définir une application linéaire sur tout E il suffit de la définir sur chaque E_i

***Exemple* 5.1.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul et non injective, on suppose que E de dimension finie . Construire un endomorphisme non nul g de E tel que

$$\forall x \in E \qquad fog(x) = 0$$

Solution : f non nul et non injective donc $\ker f$ est un sous espace stricte de E. Soit G un supplémentairement de $\ker f$ dans E, et soit $g \in L(E)$ définit par :

$$\forall x \in G, \quad g(x) = 0 \qquad \forall x \in \ker f, \quad g(x) = x \qquad \textit{(ceci détermine entièrement } g\textit{)}$$

alors $g \neq 0$ et

$$\forall x \in E \qquad fog(x) = 0$$

En effet

$$\forall x \in G, \quad fog(x) = f(0) = 0 \qquad \forall x \in \ker f, \quad fog(x) = f(x) = 0$$

□

Théorème 5.2 (Généralisation). On suppose $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et Si pur tout $i \in [\![1,n]\!]$; $u_i \in L(E_i,F)$ alors

$$\exists \boxed{!} u \in L(E,F) \text{ tel que } \forall i \in [\![1,n]\!],\ u_{|E_i} = u_i.$$

De plus si $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_i$ alors :

$$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \cdots + u_n(x_n).$$

5.5 Théorème du rang

E et F des espaces vectoriels

Théorème 5.3. Soit $u \in L(E,F)$ et G u supplémentairement de $\ker u$ dans E alors u induit un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} u$.

Preuve : Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$

- ϕ est linéaire(évident).
- ϕ est injective : $x \in \ker \phi \quad \Leftrightarrow \quad x \in G \text{ et } u(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in G \cap \ker u = \{0\} \Leftrightarrow \quad x = 0$
- ϕ est surjective : Si $y \in \operatorname{Im} u$ il existe $x \in E$ tq $u(x) = y$ or $E = \ker u \oplus G$ donc $x = a + b$ tq $a \in \ker u$ et $b \in G$.

Par suite $y = u(a+b) = u(a) + u(b) = u(b) = \phi(b)$

□

Le théorème suivant est fondamental :

Théorème 5.4 (théorème du rang). Si E de dimension finie et $f \in L(E,F)$

$$\boxed{\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)}$$

6 Rang d'une application linéaire

***Définition* 6.1.** Soit $f \in L(E,F)$, Lorsque $\operatorname{Im} f$ de dimension finie. On appelle *rang* de f, l'entier

$$\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f).$$

***Remarques* 6.1.** 1. Si $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$$

2. Le theoreme du randg devient :Si E de dimension finie et $f \in L(E,F)$

$$\boxed{\dim E = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f}$$

Proposition 6.1. Soit $f \in L(E,F)$ où E et F sont de dimensions finies

1. $f = 0$si et seulement si $\operatorname{rg} f = 0$
2. $\operatorname{rg} f \leq \min\left(\dim E, \dim F\right)$
3. f surjective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim F$
4. f injective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E$

Proposition 6.2. Soit $f \in L(E,F)$ et soit deux isomorphismes $h : H \to E$ et $g : F \to G$.

$$\operatorname{rg}\left(f \circ h\right) = \operatorname{rg}\left(f\right) \text{ et } \operatorname{rg}\left(g \circ f\right) = \operatorname{rg}\left(f\right)$$

“Le rang est invariant par composition avec un isomorphisme".

Preuve : — $h(H) = E$ donc $f\left(h(H)\right) = f \circ h(H) = f(E)$ d'où l'égalité des dimensions.

— Comme g est un isomorphisme de F vers G, alors $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F et on a $\dim g\left(f(E)\right) = \dim f(E)$ d'où $\operatorname{rg} g \circ f = \dim g \circ f(E) = \dim f(E) = \operatorname{rg} f$.

□

Remarque 6.1. En fait, on a d'une façon plus générale

$$\boxed{\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)}$$

car $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} f$ et que $\dim\left(f(\operatorname{Im} g)\right) \leq \dim \operatorname{Im} g$ par exemple avec le théorème du rang (ou puisque si $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ est une base de $\operatorname{Im} g$ alors $\left(f(g_1), f(g_2), \ldots, f(g_n)\right)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f_{|\operatorname{Im} g}$ ou de $\operatorname{Im} f \circ g$).

7 Formes linéaires - Hyperplans

7.1 Formes Linéaires

***Définition* 7.1.** Soit E un K-espace vectoriel .

1. Une formes linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
2. On appelle espace dual associé E l'espace vectoriel $E^* = L(E,K)$. C'est l'ensemble des formes linéaires sur E.

Remarque 7.1. On rappelle qu'en dimension finie $\dim E = \dim E^*$

Proposition 7.1. Une forme linéaire non nulle sur E est toujours surjective

Remarque 7.2. En particulier si $\varphi \in E^*$ est une forme linéaire non nulle sur E alors

$$\exists u \in E \setminus \{0\}; \quad \varphi(u) = 1$$

Théorème 7.1. Soient f et g deux formes linéaire sur un un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E telles que :

$$\ker(g) \subset \ker(f)$$

Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \alpha . g$

Preuve : • Si g est nulle alors $E = \ker(g) \subset \ker(f)$ par suite f nulle.

• Si g est non nulle, on procède par analyse synthèse :

Analyse : Si α existe alors nécessairement $\alpha = f(u)$ où $u \in E$ tel que $g(u) = 1$ et on remarquons que $g(x)$ est un scalaire $f = \alpha . g$ deviens pour tout $x \in E$; $f(x - g(x)u) = 0$.

Synthèse : Soit alors $u \in E$ tel que $g(u) = 1$ et posons $\alpha = f(u)$; on a pour tout $x \in E$:

$$g(x - g(x)u) = g(x) - g(x)g(u) = g(x) - g(x) = 0$$

Donc $x - g(x)u \in \ker g \subset \ker f$ Par suite $f(x - g(x)u) = 0$ qui deviens par linéarité $f(x) = f(u)g(x) = \alpha . g(x)$ □

7.2 Hyperplans

E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

***Définition* 7.2.** On appelle *hyperplan* de E, tout sous-espace vectoriel H qui est supplémentaire d'une droite vectorielle. En d'autre termes :

$$\boxed{\text{H hyperplan}} \quad \Leftrightarrow \boxed{\exists u \in E \setminus \{0\}; \quad E = H \oplus \text{Vect}(u)}$$

Proposition 7.2. Si $\dim E = n$ et Hsous-espace vectoriel de E alors

$$H \text{ hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad \dim H = n - 1$$

***Exemples* 7.1.** 1. En dimension 3, les hyperplans sont les plans vectoriels, d'où le nom en dimension quelconque.

2. En dimension 2, les hyperplans sont les droites vectorielles.

Proposition 7.3. Soit H est un hyperplan de E . Alors

1. $$\forall u \in E \setminus H, \quad H \oplus \mathbb{K}.u = E$$

2. Si F est un sous espace vectoriel contenant H alors ou bien $H = F$ ou bien $F = E$ (un hyperplan est un sous espace maximal pour l 'inclusion)

Proposition 7.4. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propositions sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E.
2. il existe une forme linéaire φ non nulle tel que $H = \ker \varphi$

Preuve : $1 \Longrightarrow 2$: Supposons que H est un hyperplan de E, il existe un vecteur non nul u de E tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(u)$. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & E = H \oplus \mathrm{Vect}(u) & \to & \mathbb{K} \\ & x = h + \lambda u & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

Alors f est une forme linéaire sur E, non nulle (puisque $f(u) = 1$) telle que $\ker(f) = H$

$2 \Longrightarrow 1$: Supposons qu'il existe une forme linéaire φ non nulle tel que $H = \ker\varphi$. Soit $u \in E\backslash\{0\}$ tel que $\varphi(u) = 1$. Montrons que $E = \ker\varphi \oplus \mathbb{K}.u$

- $x \in \ker\varphi \cap \mathbb{K}.u \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda u & /\lambda \in \mathbb{K} \\ \varphi(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda u & /\lambda \in \mathbb{K} \\ \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 0$

donc $\ker\varphi \cap \mathbb{K}.u = \{0\}$

- Pour $x \in E$ posons $x_1 = x - \varphi(x)u$ et $x_2 = \varphi(x)u$ Alors $x = x_1 + x_2$ et $x_2 \in \mathbb{K}.u$ et $x_1 \in \ker\varphi$ car $\varphi(x_1) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(u) = 0$

Donc $E = \ker\varphi + \mathbb{K}.u$

□

Exemples 7.2. 1. L'ensemble H des polynômes s'annulant en $a \in \mathbb{K}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$. Il suffit de considérer $\varphi(P) = P(a)$

2. $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

7.3 Équation d'un hyperplan

Proposition 7.5. On suppose $\dim E = n < +\infty$. Si l'on note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur x de E relativement à une base β, alors H est un hyperplan de E si et seulement si il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$ tel que :

$$x \in H \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

Cette relation est appelée *équation de l'hyperplan H relativement à β.*

Preuve : Soit $\beta = (e_1, ..., e_n)$ et ϕ la forme linéaire non nulle de E telle que $H = \ker\phi$.
Posons $a_i = \phi(e_i)$ poir $i = 1, ..., n$ Alors les a_i ne sont pas tous nuls (si non ϕ est nulle) et on a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \Longleftrightarrow \phi(x) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

□

Remarque 7.3. Si H est un hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ alors H est le noyau de la forme linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & \mathbb{K} \\ & x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$$

Exemples 7.3. 1. On retrouve qu'une droite vectorielle du plan admet une équation du type $ax + by = 0$

2. On retrouve qu'un plan vectoriel de l'espace admet une équation du type $ax + by + cz = 0$

3. $\{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(a) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$ d'équation $x + ay + a^2z = 0$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.

Proposition 7.6. Deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles

Preuve : Si $(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \lambda(b_1, b_2 \ldots, b_n)$ où $\lambda \neq 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$$

donc les équation représente bien le même hyperplan (on divise par λ).

Réciproquement : Soient $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$ deux équations de H et $f, g \in E^* \setminus \{0\}$ où $(a_1 \ldots a_n)$ est une matrice de f et $(b_1 \ldots b_n)$ est une matrice de g. alors $\ker f = \ker g = H$ et d' après le théorème 7.1 on a $f = \lambda g$ donc les équations sont proportionnelles □

***Exercice* 1.** Déterminer une base et la dimension de F dans les cas suivants :

1. $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ b - 2c + d = 0\}$
2. $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a = d \text{ et } b = 2c\}$.
3. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ /\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = 3u_n\}$
4. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ /\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n\}$

Solution :

1. Il faut d'abord en trouver un système générateur. On a

$$u = (a,b,c,d) \in \iff b - 2c + d = 0 \iff u = (a, 2c - d, c, d) = a(1,0,0,0) + c(0,2,1,0) + d(0,-1,0,1)$$

La famille constituée par les vecteurs $(1,0,0,0)$, $(0,2,1,0)$ et $(0,-1,0,1)$ est donc une famille génératrice de F. On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de F par suite $\dim F = 3$.

2. $u = (a,b,c,d) \in F \iff a = d$ et $b = 2c \iff u = (a,2c,c,a) = a(1,0,0,1) + c(0,2,1,0)$
La famille constituée par les vecteurs $(1,0,0,1)$ et $(0,2,1,0)$ est une famille génératrice de F. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille est libre, et donc il s'agit d'une base de F par suite $\dim F = 2$.

3. Remarquer que dans ce cas les élément de F sont les suites géométrique de raison 3 donc

$$u = (u_n) \in F \iff \forall n \in \mathbb{N};/u_{n+1} = 3u_n \iff \forall n \in \mathbb{N};\ u_n = u_0 3^n \iff u = u_0.(3^n)$$

donc $F = \mathrm{Vect}(w)$ où $w = (3^n)$ et comme w n'est pas la suite nulle, elle constitue une famille libre donc base de F par suite $\dim F = 1$

4. Remarquer que dans ce cas les élément de F sont les suites récurrentes linéaire d'ordre 2 tell que

$$\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

d'équation caractéristique $z^2 - 3z + 2 = 0$ qui a pour solutions 1 et 2 donc

$$u = (u_n) \in F \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N};\ u_n = \alpha + \beta 2^n$$

donc $F = \mathrm{Vect}(u,w)$ où $w = (2^n)$ et $u = (1)$ est la suite constante par 1, et comme (u,w) est libre elle constitue une base de F par suite $\dim F = 2$

□

***Exercice* 2.** On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1,-1,1),\ v_2 = (2,-2,2),\ v_3 = (2,-1,2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Solution :

1. On a $v_2 = 2v_1$. La famille (v_1, v_2) est donc liée. Quel que soit le vecteur w, la famille (v_1, v_2, w) restera liée, puisqu'on aura toujours $2v_1 - v_2 + 0w = 0$, combinaison linéaire dont qui n'a pas tous ses coefficients nuls.
2. A contrario, la famille (v_1, v_3) est libre. Pour $w = (1,0,0)$, il est facile de voir que la famille (v_1, v_3, w) est libre. En effet, si $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + 2b + c &=& 0 \\ a - b &=& 0 \\ a + 2b &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a + 2b + c &=& 0 \\ a - b &=& 0 \\ 3b &=& 0 \end{array}\right.$$

d'où on tire $a = b = c = 0$ et la famille est libre. Le guide pour être sûr que l'on peut réaliser cela est le théorème de la base incomplète, qui nous dit qu'on peut compléter la famille libre à deux vecteurs (v_1, v_3) pour en faire une base (à trois vecteurs) de $\mathbb{R}^3$. De plus, on peut choisir le vecteur qui complète dans n'importe quel système générateur de $\mathbb{R}^3$. Le plus naturel est bien entendu la base canonique.

□

***Exercice* 3.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$

Solution : Si c'était le cas, alors F et G seraient en somme directe, et on aurait

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 3 + 3 = 6.$$

Or, $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$, il est de dimension au plus 5. C'est donc impossible !

□

***Exercice* 4.** Les systèmes suivants forment-ils des bases de $\mathbb{R}^3$?
$S_1 = \{(1,-1,0),(2,-1,2)\}$;
$S_2 = \{(1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a)\}$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a) ;
$S_3 = \{(1,0,0),(a,b,0),(c,d,e)\}$ avec a,b,c,d,e réels (on discutera suivant leur valeur) ;
$S_4 = \{(1,1,3),(3,4,5),(-2,5,7),(8,-1,9)\}$.

Solution : S_1 est une famille à deux éléments dans un espace de dimension 3. Ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$. De même, S_4 qui comporte quatre éléments ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$. Pour S_2 et S_3, il suffit de savoir si ce sont des familles libres ou non. Résolvons d'abord l'équation

$$\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(2,-1,2)+\lambda_3(1,0,a)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 & = & 0\\ -\lambda_1-\lambda_2 & = & 0\\ 2\lambda_2+a\lambda_3 & = & 0.\end{array}\right.$$

Ce système est successivement équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_2+\lambda_3 & = & 0\ (L2)+(L1)\to(L2)\\ 2\lambda_2+a\lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_2+\lambda_3 & = & 0\\ (a-2)\lambda_3 & = & 0\end{array}\right.$$

Si $a\neq 2$, on obtient $\lambda_3=0$ et en remontant les calculs $\lambda_1=\lambda_2=0$. La famille est donc libre. Si $a=2$, alors le choix $\lambda_3=1, \lambda_2=-1$ et $\lambda_1=1$ donne une solution au système. La famille n'est alors pas libre. On conclut que S_2 est une base si et seulement si $a\neq 2$. Etudions maintenant S_3, en résolvant l'équation

$$\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(a,b,0)+\lambda_3(c,d,e)=0$$

qui est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+a\lambda_2+c\lambda_3 & = & 0\\ b\lambda_2+d\lambda_3 & = & 0\\ e\lambda_3 & = & 0.\end{array}\right.$$

Si $e\neq 0$, on obtient $\lambda_3=0$. Si de plus $b\neq 0$, on obtient $\lambda_2=0$ puis $\lambda_1=0$: la famille est libre. D'autre part, si $b=0$, le deuxième vecteur est proportionnel au premier et la famille est liée. Enfin, si $e=0$, toute combinaison linéaire des trois vecteurs est telle que la troisième coordonnée est nulle : la famille n'est pas génératrice. Ainsi, (S_3) est une base si et seulement si $e\neq 0$ et $b\neq 0$.

□

***Exercice* 5.** Soient F,G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$,
$G=\mathrm{vect}\{(1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5)\}\subset\mathbb{R}^4$.

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G\subset F$ et conclure que $G=F$.

Solution :

1. On va déterminer une base de F. Pour cela, on écrit que

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z,t)\in F & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0\\ 2x+y+z-t & = & 0\end{array}\right.\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0\\ x-t & = & 0\end{array}\right.\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x\\ y & = & -x-z\\ z & = & z\\ t & = & x\end{array}\right.\end{array}$$

On en déduit qu'une base de F est donnée par les vecteurs $u_1=(1,-1,0,1)$ et $u_2=(0,-1,1,0)$.

2. On commence par vérifier que les vecteurs qui engendrent G, à savoir $(1,-2,1,1),(1,2,-3,1)$ et $(5,-3,-2,5)$ sont éléments de F, ce qui est très facile en utilisant l'équation de F. Ceci prouve alors que $G\subset F$. Pour prouver que $G=F$, il suffit de prouver que $\dim F=\dim G$. Mais F a pour dimension 2, et G est de dimension supérieure ou égale à 2 car les deux vecteurs $(1,-2,1,1)$ et $(1,2,-3,1)$ ne sont pas colinéaires. Comme $G\subset F$, on sait que la dimension de G est inférieure ou égale à la dimension de F. On trouve finalement que $\dim F=\dim G=2$, et puisque $G\subset F$, ceci entraine $F=G$.

□

***Exercice* 6.** Soient F,G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$,
$G=\mathrm{vect}\{(1,0,0,0),(0,0,0,1),\}\subset\mathbb{R}^4$.

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que G un supplémentaire de F.

Solution :

1. comme précédemment, on montre qu'une base de F est donnée par les vecteurs $u_1 = (1,-1,0,1)$ et $u_2 = (0,-1,1,0)$ donc $\dim F = 2$.
2. Il est claire que $\dim F + \dim G = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ il suffit de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Soit $u \in F \cap G$ le fait que $u \in G$ montre que $u = (a,0,0,b)$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ en remplaçant dans les équations de F on obtient $a = 0$ et $b = 0$ ce qui assure que $F \cap G = \{0\}$.

□

***Exercice* 7.** Montrer que

$\mathbb{K}_4[X] = \mathrm{Vect}(1+X, X^3) \oplus \mathrm{Vect}(1+X^2, X^4 - X, \quad 1)$.

Solution : La famille $(1 \quad ,1+X, 1+X^2, X^3, X^4 - X)$ est libre (Car échelonnée en degré) et de cardinal $5 = \dim \mathbb{K}_4[X]$ donc constitue une base $\mathbb{K}_4[X]$ par suite

$$\mathbb{K}_4[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^3) \oplus \mathrm{Vect}(1+X^2, X^4 - X, 1).$$

□

***Exercice* 8.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un sous espace vectoriel de E de dimension $\dim H = n-1$. Montrer que pour tout $u \in E \setminus H$ on a

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(u).$$

Solution : remarquons d'abord que $u \neq 0$ car $0 \in H$ et $u \notin H$.
Posons $D = \mathrm{Vect}(u)$. Puisque $\dim D + \dim H = n$ il suffit de montrer que $D \cap H = \{0\}$. Pour cela soit $x \in D \cap H$ donc $x \in D$ et $x \in H$. Or $x \in D$ donne $x = \lambda u$ et si $\lambda \neq 0$ alors $u = \dfrac{1}{\lambda} x \in H$ ce qui n'est pas possible donc $\lambda = 0$ et $x = 0$ et finalement $F \cap G = \{0\}$

□

***Exercice* 1.** Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+3z=0\}$;
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+3z=2\}$;
3. $E_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x=y=2z=4t\}$;
4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy=0\}$;
5. $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y=x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$;
7. $E_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$.

Solution :

1. Soient $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$ éléments de E_1. Alors, $X+X'=(x+x',y+y',z+z')$ est aussi élément de E_1. En effet,
$$(x+x')+(y+y')+3(z+z')=(x+y+3z)+(x'+y'+3z')=0.$$
De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda X=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ est élément de E_1 puisque
$$\lambda x+\lambda y+3\lambda z=\lambda(x+y+3z)=0.$$
E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $\overrightarrow{0}=(0,0,0)$ n'est pas élément de E_2.
3. Soient $X=(x,y,z,t)$ et $X'=(x',y',z',t')$ deux éléments de E_3. Alors $X+X'=(x+x',y+y',z+z',t+t')$ est aussi élément de E_3. En effet,
$$x+x'=y+y'=2z+2z'=2(z+z')=4t+4t'=4(t+t').$$
De même, on prouve que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est élément de E_3. E_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. En effet, $X=(1,0)$ et $Y=(0,1)$ sont tout les deux éléments de E_4, mais $X+Y=(1,1)$ n'est pas élément de E_4.
5. Les éléments $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0,2)$ qui n'est pas élément de E_5 : E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est une droite passant par $(0,0)$, ou $\mathbb{R}^2$ lui-même, ou encore le singleton $\{(0,0)\}$.. E_5 est une parabole et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.
6. Posons $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$. Comme à la première question, on montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection $F\cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
7. Cette fois, aucun théorème du cours ne dit qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel. Ici, prenons $(5,0,2)\in F\subset F\cup G$ et $(1,1,0)\in G\subset F\cup G$. Alors $(5,0,2)+(1,1,0)=(6,1,2)\notin G$ car $6-1+2=5\neq 0$. Ainsi, $F\cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, on prouve qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

□

***Exercice* 2.** Trouver unee base des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

1. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$;
2. $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$.

Solution :

1. On a
$$u=(x,y,z)\in F \iff x=-2y+z \iff u=(-2y+z,y,z) \iff u=yu_1+zu_2$$
avec $u_1=(-2,1,0)$ et $u_2=(1,0,1)$, on a donc $F=\mathrm{vect}(u_1,u_2)$. De plus on verifie que cette famille est libre donc constitue une base de F
2. On a
$$(x,y,z)\in G \iff \begin{cases} x-y+z &= 0\\ 2x-y-z &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} x-y+z &= 0\\ y-3z &= 0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=2z\\ y=3z\\ z=z\end{cases}$$
On a donc $G=\mathrm{vect}(u)$, avec $u=(2,3,1)$. De plus $u\neq 0$ donc (u) est une base de G

□

***Exercice* 3.** Soit E un $\mathbb{K}$ ev et $u,v\in E$. Montrer que
$$\mathrm{Vect}(u,v)=\mathrm{Vect}(u+v,u-v)$$

Solution : • D'une part $u+v \in \text{Vect}(u,v)$ et $u-v \in \text{Vect}(u,v)$ donc on a l'inclusion

$$\text{Vect}(u+v,u-v) \subset \text{Vect}(u,v)$$

• D'autre part on a $u = \frac{1}{2}[(u+v)+(u-v)] \in \text{Vect}(u+v,u-v)$ et $v = \frac{1}{2}[(u+v)-(u-v)] \in \text{Vect}(u+v,u-v)$ donc on a l'inclusion

$$\text{Vect}(u,v) \subset \text{Vect}(u+v,u-v)$$

□

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $d \geq 1$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X];\ A \text{ divise } P\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_{d-1}[X]$

Solution :

1. Remarquons que $F = \{AQ;\ Q \in \mathbb{R}[X]\}$, ce qui permet facilement de prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $B \in \mathbb{R}[X]$. D'après la division euclidienne, il s'écrit de façon *unique* sous la $B = AQ+R$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, où d est le degré de d, c'est-à-dire de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$. Ceci signifie exactement que F et $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$.

□

Exercice 5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F+G=E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $F' \oplus G = E$.,

Solution : Prouvons d'abord que F' et G sont en somme directe, c'est-à-dire que $F' \cap G = \{0\}$. Prenons $x \in G \cap F'$. Alors, puisque $F \cap G$ et F' sont en somme directe, et que $x \in F \cap G$ (x est dans G et dans $F' \subset F$), on en déduit $x = 0$. D'autre part, il faut montrer que $F'+G=E$. Soit $z \in E$. On sait que $z = f+g$, avec $f \in F$ et $g \in G$ (car $F+G=E$). D'autre part, on peut décomposer f en $g'+f'$, avec $g' \in F \cap G$ et $f' \in F'$. Ainsi, on obtient

$$z = g'+f'+g = f'+(g+g')$$

avec $f' \in F'$ et $g+g' \in G$: $F'+G=E$ ce qui achève la preuve que F' et G sont supplémentaires. □

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-e

Solution : On remarque d'abord que $F \cap G_a = \{0\}$ (une fonction constante qui s'annule en un point est forcément identiquement nulle). Ensuite, prenons $h \in E$, on doit prouver que h se décompose sous la forme $h = g+C$, où C est une constante et $g(a) = 0$. Admettons que ce soit le cas. Alors, nécessairement, $h(a) = C$ et $g(x) = h(x)-C = h(x)-h(a)$. On pose donc $C = f(a)$ et $g(x) = h(x)-h(a)$. Clairement, $h = g+C$ et $g(a) = 0$ ce qui prouve que $g \in G_a$. □

Exercice 7. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, Soit L_i le i^{eme} polynôme de Lagrange définie par :

$$L_i = \frac{(X-a_0)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(X-a_j)}{(a_i-a_j)}$$

Montrer que $B = (L_0, \ldots L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et determiner les coordonees d'un polynome $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base .

Solution : • Soient $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$.

On a $\forall x \in K$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0$. Notamment pour $x = a_j$ ($j \in [\![1,n]\!]$), il vient $\lambda_j = 0$ puisque $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

La famille est donc libre

• D'après un DL traité en classe on sait que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$

D'où le résultat.

□

***Exercice* 8.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose , $f_n(x) = \cos(nx)$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(f_0, ..., f_n)$ est libre (pourra procéder par récurrence)
2. En déduire que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Solution :

1. On va démontrer par récurrence sur N pour $N = 0$ ($\cos(0.x) = 1$) n 'est pas la fonction nulle donc libre . Supposons le résultat vrai au rang $N-1$, et prouvons-le au rang N en écrivant une relation de liaison :
$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_N f_N = 0.$$
$$i.e \qquad \lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \cdots + \lambda_N \cos(Nx) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
On dérive deux fois et on trouve
$$\lambda_1 \cos(x) + \cdots + N^2 \lambda_N \cos(Nx) = 0.$$
En retranchant N^2 fois la première équation à la deuxième, on trouve
$$-N^2\lambda_0 + (1-N^2)\lambda_1 \cos(x) + \cdots + (N-1^2-N^2)\lambda_{N-1}\cos(N-1x) = 0.$$
Par hypothèse de récurrence, on a $(j^2 - N^2)\lambda_j = 0$ pour tout $j = 0, \ldots, N-1$, soit finalement $\lambda_j = 0$. De retour à l'équation initiale, on retrouve aussi $\lambda_N = 0$, ce qui prouve bien que la famille est libre.
2. Soit $(n_1, ..., n_p)$ une famille finie d'entiers deux à deux distincts.
posons $N = \max(n_1, ..., n_p)$, alors la famille $(f_{n_1}, ..., f_{n_p})$ est une sous famille de la famille $(f_0, ..., f_N)$.
D'après 1) la famille $(f_0, ..., f_N)$ est libre donc $(f_{n_1}, ..., f_{n_p})$ est libre comme sous famille d'une famille libre.

□

***Exercice* 9.** (Polynômes échelonnés en degré :)
Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, c'est-à-dire
$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$
Montrer que $(P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

Solution : Considérons une relation $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. Si $\lambda_n \neq 0$, le membre de gauche de l'inégalité est un polynôme de degré $\deg(la_n P_n) \neq -\infty$. Ce ne peut pas être le polynôme nul. Donc $\lambda_n = 0$. En itérant le raisonnement, on trouve successivement $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$.

Remarque 0.1. À retenir :

1. Toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est libre
2. Toute famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts est libre.

□

1 Étude pratique

***Exercice* 1.** On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z).$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Solution :

1. Utilisant la définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) &=& (1,-1,0,1) \\ f(e_2) &=& (0,1,1,1) \\ f(e_3) &=& (1,0,1,2) \end{array}$$

On sait que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or, $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ et donc $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $(f(e_1), f(e_2))$. Ainsi, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est déjà génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, elle est libre car les deux vecteurs sont non-nuls et ne sont pas proportionnels. On en déduit que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. On a :

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ -x+y &=& 0 \\ y+z &=& 0 \\ x+y+2z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y+z &=& 0 \\ y+z &=& 0 \\ y+z &=& 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -z \\ z &=& z \end{array} \right.$$

On en déduit que le vecteur $(-1,-1,1)$ engendre $\ker(f)$. Comme il est non-nul, c'est une base de $\ker(f)$. En particulier, on trouve que $\ker(f)$ est de dimension 1, ce que l'on peut aussi obtenir en utilisant le théorème du rang.

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. f n'est pas surjective, car son image n'est pas $\mathbb{R}^3$ tout entier. En effet, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est 2, et non 3.

□

***Exercice* 2.** Montrer que $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image

Solution : Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda P + Q) &=& (\lambda P + Q) - X(\lambda P + Q)' \\ &=& \lambda P + Q - X(\lambda P' + Q') \\ &=& \lambda(P - XP') + Q - XQ' = f(P) + \lambda f(Q). \end{array}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire. De plus P est dans $\ker(f)$ si et seulement si $P - XP' = 0$. Ecrivons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors on a :

$$P - XP' = \sum_{k=1}^{n} (a_k - k a_k) X^k + a_0.$$

On en déduit que la suite (a_k) vérifie $a_0 = 0$ and $a_k(1-k) = 0$ pour k allant de 1 à n. Ainsi, $a_k = 0$ pour $k \neq 1$, la valeur de a_1 étant quelconque. On en déduit que $\ker(f) = \mathrm{vect}(X)$.

D'autre part, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Si $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ est élément de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $Q = P' - XP$ soit, d'après le calcul précédent,

$$b_k = a_k(1-k).$$

On en déduit $b_1 = 0$ et donc $Q \in F = \mathrm{vect}(X^k;\ k \neq 0)$. Réciproquement, soit $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ un élément de F, c'est-à-dire un polynôme sans terme en X. Alors, si on pose $a_k = (1-k)^{-1} b_k$, $k \neq 0$, et $a_1 = 0$, le calcul précédent montre que $P' - XP = Q$ et donc $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = F$. □

***Exercice* 3.** Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathscr{E}_1) = -2\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_3\,, u(\mathscr{E}_2) = 3\mathscr{E}_2\,, u(\mathscr{E}_3) = -4\mathscr{E}_1 + 4\mathscr{E}_3.$$

1. Écrire $u((x,y,z))$ en fonction de x, y et z .
2. Déterminer une base de ker u.
   u est-il injectif ? u peut-il être surjectif ?

3. Determiner $\mathrm{rg}(u)$
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\ u$.
5. Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \mathrm{Im}\ u$.

Solution : 1. On commence par calculer $u(x,y,z)$. On a

$$u(x,y,z) = u(x\mathscr{E}_1 + y\mathscr{E}_2 + z\mathscr{E}_3) = xu(\mathscr{E}_1) + yu(\mathscr{E}_2) + zu(\mathscr{E}_3) = (-2x-4z)\mathscr{E}_1 + 3y\mathscr{E}_2 + (2x+4z)\mathscr{E}_3 = (-2x-4z, 3y, 2x+4z)$$

2. On a

$$(x,y,z) \in \ker(u) \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x-4z & = & 0 \\ 3y & = & 0 \\ 2x+4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2z \\ y & = & 0 \\ z & = & z \end{array}\right.$$

On a donc $\ker(u) = \mathrm{vect}(-2,0,1)$ et le vecteur $(-2,0,1)$ est une base de $\ker(u)$. $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif.}$$

3. On sait, d'après le théorème du rang, que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 2.
4. On sait aussi que $\big(u(\mathscr{E}_1), u(\mathscr{E}_2), u(\mathscr{E}_3)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}u$. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $\big(u(\mathscr{E}_1), u(\mathscr{E}_2)\big)$ est une telle famille. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$ qui est de rang 2.
5. Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $\big((-2,0,1),(-2,0,2),(0,3,0)\big)$ est une famille libre. C'est très facile et laissé au lecteur...

$\square$

***Exercice* 4.** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application définie sur E par $f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Quel est le degré de $f(X^p)$?
3. Déterminer $\ker(f)$
4. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
5. Soit Q un polynôme de $\mathrm{Im}f$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Solution : 1. f est clairement une application linéaire. Puisque $\deg(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)) \le \deg(P(X))$, elle est bien à image dans E.

2. On a

$$f(X^p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (1 + (-1)^k) X^{p-k} - 2X^p.$$

Le coefficient devant X^p est nul (il vaut 1+1-2), celui devant X^{p-1} aussi, et celui devant X^{p-2} vaut $p(p-1)$. Ainsi, si $p \ge 2$, le degré de $f(X^p)$ est $p-2$. Sinon, $f(X^p)$ est le polynôme nul. On en déduit, par linéarité, que $f(P)$ est de degré $\deg(P) - 2$ si $\deg(P) \ge 2$, et est le polynôme nul sinon.

3. D'après ce qui précède , $\ker(f) = \mathbb{R}_1[X]$.
4. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = p + 1 - 2 = p - 1$. De plus, on a vu que $\mathbb{R}_{p-1}[X] \subset \mathrm{Im}(f)$. C'est donc que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
5. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_p[X];\ P(0) = P'(0) = 0\}$. Alors G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_p[X]$. On vérifie facilement que, pour $P(X) = a_pX^p + \cdots + a_0$, $P \in G \iff a_0 = a_1 = 0$, et donc une base de G est $(X^2, X^3, \ldots, X^p)$. Ainsi, G est de dimension $p-1$. Notons $g : G \to \mathrm{Im}(f)$, $P \mapsto f(P)$. g est injective, car $G \cap \ker(f) = \{0\}$. De plus, $\dim(G) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Ainsi, g est une bijection de G sur $\mathrm{Im}(f)$. Ceci prouve le résultat.

$\square$

***Exercice* 5.** Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ qui vérifie les conditions :

C_1 : $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$.

C_2 : $\ker(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

où (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Solution : Un endomorphisme est uniquement défini par l'image d'une base. Il suffit donc de calculer quelles doivent être les valeurs de $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$. On sait déjà que :

- $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$.
- $f(3e_4) = e_2 - 2f(e_1)$, soit $f(e_4) = \dfrac{1}{3}(-2e_1 + 3e_2 - 2e_3)$.

Reste à définir $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Pour cela, on va chercher une base de $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$. On a aisément :

$$(x,y,z,t) \in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & y \\ z & = & -x-2y \\ t & = & x+3y \end{array}\right.$$

On en déduit que $\{(1,0,-1,1),(0,1,-2,3)\}$ est une base de F. Puisqu'on veut que $F=\ker(f)$, on doit donc avoir

$$f(e_1)-f(e_3)+f(e_4)=0 \Longrightarrow f(e_3)=\frac{1}{3}e_1+\frac{1}{3}e_3$$

et

$$f(e_2-2e_3+3e_4)=0 \Longrightarrow f(e_2)=2f(e_1)-f(e_4).$$

Donc l'endomorphisme f, s'il existe, est unique. Réciproquement, soit f l'endomorphisme défini par les formules précédentes. Alors le premier point est vérifié, et puisque l'image d'une base de F est envoyée par f sur 0, on sait que $F\subset\ker(f)$. Pour démontrer l'égalité, il suffit, puisque $\dim(F)=2$, de prouver que $\dim(\ker(f))\leq 2$. Par le théorème du rang, il suffit de prouver que $\dim(\mathrm{Im}(f))\geq 2$. Mais $f(e_1)$ et $f(e_4)$ sont deux vecteurs indépendants de $\mathrm{Im}(f)$. Et donc $\dim(\mathrm{Im}(f))\geq 2$, ce qui prouve le résultat.

□

***Exercice* 6.** (**Les polynômes de LAGRANGE autrement**.)

Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ une famille de n scalaires deux à deux distincts de $\mathbb{K}$, on pose $R=\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$.

On considère l'application

$$u:\begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X]\to\mathbb{K}^n \\ P\mapsto (P(x_1),P(x_2),\ldots,P(x_n))\end{cases}$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que u est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.
3. Soit $\mathscr{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on pose $L_i=u^{-1}(e_i)$ pour tout $i\in[|1,n|]$.
   (a) Vérifier que $\mathscr{B}'=\{L_1,L_2,\ldots,L_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
   (b) Donner l'expression de L_i pour tout $i\in[|1,n|]$.
   (c) Montrer que pour tout $(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{K}^n$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i)=y_i$ pour tout $i\in[|1,n|]$.
   P s'appelle le polynôme interpolateur de $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$.
   (d) Montrer que si $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $Q(x_i)=y_i$ pour tout $i\in[|1,n|]$, alors il existe $S\in\mathbb{K}[X]$ tel que $Q=P+RS$.

Solution :

1. Soit $P,Q\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ alors

$$u(P+\lambda Q)=((P+\lambda Q)(x_1),(P+\lambda Q)(x_2),\ldots,(P+\lambda Q)(x_n))=(P(x_1),P(x_2),\ldots,P(x_n))+\lambda(Q(x_1),Q(x_2),\ldots,Q(x_n))=u(P)+\lambda u(Q)$$

2. Puisque $\dim\mathbb{K}_{n-1}[X]=\dim\mathbb{K}^n=n$, il suffit de montrer que u est injective . Or

$$\begin{aligned} P\in\ker u \quad &\Rightarrow\quad (P(x_1),P(x_2),\ldots,P(x_n))=(0,\ldots,0)\\ &\Rightarrow\quad \forall i=1,\ldots,n;\quad P(x_i)=0\\ &\Rightarrow\quad P=0\quad (\textit{car}\quad \deg P\leq n-1\ \textit{et}\quad P\quad \textit{admet } n \textit{ racines})\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker u=\{0\}$ et u est injective.

3. (a) u^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ donc transforme toute bsae de $\mathbb{K}^n$ en une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
   Ainsi $\mathscr{B}'=\{L_1,L_2,\ldots,L_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
   (b) On a $L_i=u^{-1}(e_i)$ donc $u(L_i)=(L_i(x_1),L_i(x_2),\ldots,L_i(x_n))=e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ donc

$$\forall j=1\ldots,n\qquad L_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{si}\quad i\neq j\\ 1 & \text{si}\quad i=j\end{cases}$$

   Des racines de L_i on déduit que $L_i=\lambda\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(X-x_k)$, en tenant compte de $L_i(x_i)=1$ on déduit que $\lambda=\dfrac{1}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(x_i-x_k)}$ ce qui donne

$$L_i=\frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(X-x_k)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(x_i-x_k)}=\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{X-x_k}{x_i-x_k}$$

   (c) Tout élément $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ de $\mathbb{K}^n$ admet un unique antécédent P dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ par u.
   ***Attention* 1.1.** L' unicité de P est basée sur la condition $\deg P\leq n-1$.
   (d) Soit $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $Q(x_i)=y_i$; La division euclidienne de Q sur P (polynôme de la question précédente) s'écrit $Q=RS+B$ avec $S\in\mathbb{K}[X]$ et $B\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$. En composant avec x_i, puisque $R(x_i)=0$ on a

$$\forall i=1,\ldots,n\qquad B(x_i)=Q(x_i)=y_i$$

   Par unicité de P on conclut que $B=P$.

□

2 Étude Théorique

***Exercice* 7.** Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Démontrer que

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \ker g.$$

Solution : Supposons d'abord que $g \circ f = 0$, et prenons $y \in \mathrm{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $g(y) = g \circ f(x) = 0$, et donc $y \in \ker g$.
Reciproquement, supposons que $\mathrm{Im} f \subset \ker g$. Alors, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im} f \subset \ker g$, et donc $g(f(x)) = 0$, prouvant que $g \circ f = 0$.

□

***Exercice* 8.** Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie

Solution : L'hypothèse nous dit, que pour tout x non-nul, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. On doit prouver qu'il existe un scalaire λ tel que $\lambda_x = \lambda$ pour tout x de E, ou encore que $\lambda_x = \lambda_y$ quels que soient x et y non-nuls.

- Si la famille (x, y) est liée, c'est clair, car $y = \mu x$ et $\mu \lambda_y x = \lambda_y y = f(y) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$ et on peut simplifier par $\mu x \neq 0$. Si $x = y = 0$ on choisit λ_0 comme on veut.

- Si la famille $(x, f(x))$ est libre, calculons $f(x+y)$. D'une part,

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y,$$

d'autre part,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Puisque la famille (x, y) est libre, toute décomposition d'un vecteur à l'aide de combinaison linéaire de ces vecteurs est unique.
- On obtient donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$, ce qui est le résultat voulu.

□

***Exercice* 9.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soient α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E) + \mathrm{Im}(f - \beta Id_E)$.

On suppose de plus que

$$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0.$$

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1}.
3. Démontrer que $E = \ker(f - \alpha Id_E) \oplus \ker(f - \beta Id_E)$.
4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f - \alpha Id_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta Id_E)$.

Solution :

1. On remarque que
$$(\beta - \alpha) Id_E = (f - \alpha Id_E) - (f - \beta Id_E).$$
Autrement dit, si $x \in E$, on a $x = y + z$ avec
$$y = (f - \alpha Id_E)(y_1) \text{ et } y_1 = \frac{1}{\beta - \alpha} x$$
et
$$z = (f - \beta Id_E)(z_1) \text{ et } z_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} x.$$
2. La relation s'écrit encore
$$f^2 - (\alpha + \beta) f + \alpha\beta Id_E = 0$$
soit
$$f \circ \frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta) Id_E) = Id_E$$
et
$$\frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta) Id_E) circ f = Id_E$$
ce qui prouve que f est inversible, d'inverse $\frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta) Id_E)$.
3. On commence par prouver que les espaces vectoriels sont en somme directe. En effet, si $x \in \ker(f - \alpha Id_E) \cap \ker(f - \beta Id_E)$, alors
$$f(x) = \alpha x \text{ et } f(x) = \beta x$$
ce qui prouve que $(\beta - \alpha) x = 0 \implies x = 0$. D'autre part, la relation implique que $\mathrm{Im}(f - \beta Id_E) \subset \ker(f - \alpha Id_E)$. Mais dans cette relation, tout commute et on a aussi
$$(f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E) = 0$$
et donc $\mathrm{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \ker(f - \beta Id_E)$. Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la première question pour conclure. En effet, si $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(f - \beta Id_E)$, alors $x = y + z$ avec $y \in \ker(f - \beta Id_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E)$.

4. On utilise à nouveau le résultat de la question 1. En effet, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $p(x) = z$ et donc
$$p(x) = (f - \beta Id_E)\left(\frac{1}{\alpha-\beta}x\right).$$

$\square$

***Exercice* 10.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q = q\circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, on a $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p)\oplus\operatorname{Im}(q)$
3. Montrer que $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

Solution :

1. La condition est suffisante. En effet, si $p\circ q = q\circ p = 0$, alors
$$(p+q)^2 = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p+q$$
et donc $p+q$ est un projecteur.
Réciproquement, si $p+q$ est un projecteur, alors le calcul précédent donne
$$p\circ q + q\circ p = 0.$$
On a alors :
$$p\circ q = p^2\circ q = p\circ(p\circ q) = -p\circ(q\circ p) = -(p\circ q)\circ p = (q\circ p)\circ p = q\circ p.$$
On obtient donc $2p\circ q = 0$, ce qui entraîne $p\circ q = 0$ et par suite $q\circ p = 0$.
2. Prouvons d'abord que $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Im}(q)$ sont en somme directe. En effet, si $x\in\operatorname{Im}(p)\cap\operatorname{Im}(q)$, alors $x = p(x)$ et $x = q(x)$ d'où $x = p(x) = p(q(x)) = 0$.
D'autre part, il est clair que $\operatorname{Im}(p+q)\subset\operatorname{Im}(p)+\operatorname{Im}(q)$. Réciproquement, soit $z = p(x)+q(y)\in\operatorname{Im}(p)+\operatorname{Im}(q)$. Alors
$$p(z) = p^2(x) + p\circ q(y) = p(x) \text{ et } q(z) = q\circ p(x) + q^2(y) = q(y).$$
Ainsi, $z = (p+q)(z)\in\operatorname{Im}(p+q)$.
3. On a toujours $\ker(p)\cap\ker(q)\subset\ker(p+q)$. Réciproquement, si $p(x)+q(x) = 0$, alors puisque $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Im}(q)$ sont en somme directe, on a $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, d'où $x\in\ker(p)\cap\ker(q)$.

$\square$

***Exercice* 11.** **($\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires ?) :** Soit $f\in L(E)$

1. Montrer que
$$E = \ker f\oplus\operatorname{Im} f \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\ker f = \ker f^2\\ \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2\end{cases}$$
2. On suppose ici E de dimension finie .
   (a) Montrer que
   $$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$$
   (b) Que devient l'équivalence de 1.

Solution :

1. $\boxed{\Rightarrow}$
• On a toujours l' inclusion $\ker f\subset\ker f^2$, pour l'autre , soit $x\in\ker f^2$ c'est à dire $f(f(x)) = 0$ donc $f(x)\in\ker f$ or $f(x)\in\operatorname{Im} f$ donc $f(x)\in\ker f\cap\operatorname{Im} f = \{0\}$ par suite $x = 0$.
• On a toujours l' inclusion $\operatorname{Im} f^2\subset\operatorname{Im} f$, pour l'autre , soit $y\in\operatorname{Im} f$ c'est à dire il existe $x\in E$ tel que $f(x) = y$ donc or $E = \ker f\oplus\operatorname{Im} f$ donc
$$\exists(a,b)\in\ker f\times\operatorname{Im} f: \quad x = a+b$$
Posons $b = f(b')$ alors
$$y = f(x) = f(a+b) = f(b) = f^2(b')\in\operatorname{Im} f^2$$
$\boxed{\Leftarrow}$
• Soit $x\in\ker f\cap\operatorname{Im} f$ donc $x = f(a)$ avec $a\in E$ et $f^2(a) = f(x) = 0$ par suite $a\in\ker f^2 = \ker f$ et par conséquence $x = f(a) = 0$.
• Soit $x\in E$.On veut montrer que $x = a+b$ avec $(a,b)\in\ker f\times\operatorname{Im} f$.On a $f(x)\in\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ donc il existe $y\in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$ donc $f(x - f(y)) = 0$. Posons $a = x - f(y)$ et $b = f(y)$ alors $a\in\ker f$ et $b\in\operatorname{Im} f$ et $x = a+b$.
2. (a) $\boxed{\Rightarrow}$ supposons $\ker f = \ker f^2$ on sait que $\operatorname{Im} f^2\subset\operatorname{Im} f$,le theorem du rang applique à f et à f^2 donne
$$\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f \underbrace{=}_{Theo\ rang\ de\ f} \dim E \underbrace{=}_{Theo\ rang\ de\ f^2} \dim\ker f^2 + \dim\operatorname{Im} f^2$$
En tenant compte de $\dim\ker f = \dim\ker f^2$ on déduit que $\dim\operatorname{Im} f^2 = \dim\operatorname{Im} f$ par suite $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
$\boxed{\Leftarrow}$ On fait de même.
(b) Dans le cas $\dim E < \infty$
$$E = \ker f\oplus\operatorname{Im} f \quad\Leftrightarrow\quad \ker f = \ker f^2 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$$

Remarque 2.1. Cet exercice nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ soient supplémentaires . En dehors de ces conditions $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont jamais supplémentaires . $\square$

Exercice 1

Soient f, g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie .
On rappelle que que le rang d'un endomorphisme u est $\operatorname{rg} u = \dim \mathcal{I}mu$.

1. Écrire la formule du rang d'un endomorphisme u.
2. Montrer que $\mathcal{I}mgof \subset \mathcal{I}mg$. Que peut- on déduire sur $\operatorname{rg} g$ et $\operatorname{rg}(gof)$
3. Montrer que $\ker gof = f^{-1}(\ker g)$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \ker gof$
5. En déduire que $\operatorname{rg}(gof) \leq \operatorname{rg} f$.
6. Soit v La restriction de g à $\mathcal{I}mf$, identiquement équivalent

$$v \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{I}mf & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array} \right.$$

   a. Montrer que $\ker v = \mathcal{I}mf \cap \ker g$.
   b. Montrer que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(gof) + \dim \mathcal{I}mf \cap \ker g$

Exercice 2

Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longrightarrow & XP' \end{array} \right.$

1. Montrer que e Φ est bien définie.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme.
3. Déterminer $\ker \Phi$. L' endomorphisme Φ est - il injective ?
4. Justifier sans calcul supplémentaire que Φ n' est pas surjective .
5. Déterminer $\dim \mathcal{I}m\Phi$.
6. Déterminer une base de $\mathcal{I}m\Phi$.
7. Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \ker \Phi \oplus \mathcal{I}m\Phi$
8. Déterminer $\Phi^2(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
9. Montrer que $\ker \Phi^2 = \ker \Phi$.
10. En déduire que $\mathcal{I}m\Phi^2 = \mathcal{I}m\Phi$.
11. Soit $(1, X, ..., X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
    a. Calculer $\Phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
    b. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$; $\Phi^m(X^k) = k^m X^k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
    c. Déterminer pour $m \in \mathbb{N}$, $\ker \Phi^m$ et $\mathcal{I}m\Phi^m$
    d. Donner l'expression $\Phi^m(P)$ lorsque $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Exercice 1

Soient f, g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie .
On rappelle que que le rang d'un endomorphisme u est $\operatorname{rg} u = \dim \mathcal{I}mu$.

1. La formule du rang d'un endomorphisme u est

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \ker u$$

2.

- Montrons que $\mathcal{I}m(gof) \subset \mathcal{I}mg$.
  Si $y \in \mathcal{I}m(gof)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(f(x))$, en posant $x' = f(x)$ on a $y = g(x') \in \mathcal{I}mg$.
  Ainsi $\mathcal{I}m(gof) \subset \mathcal{I}mg$.
- On prenant les dimensions dans l'inclusion précédente on déduit que $\dim \mathcal{I}m(gof) \leq \dim \mathcal{I}mg$ ce qui identiquement équivalent à

$$\operatorname{rg}(gof) \leq \operatorname{rg} g$$

3.

$$x \in \ker gof \quad \Leftrightarrow \quad g(f(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \ker g \quad \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(\ker g)$$

d' où $\ker gof = f^{-1}(\ker g)$.

4. Montrons $\operatorname{Ker} f \subset \ker gof$. Si $x \in \operatorname{Ker} f$ alors $f(x) = 0$, comme g est lineaire on a

$$gof(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$$

donc $x \in \ker gof$ par suite $\operatorname{Ker} f \subset \ker gof$.

5. En passant à la dimension dans l'inclusion précédente on obtient

$$\dim \operatorname{Ker} f \leq \ker gof. \qquad (*)$$

par le théorème du rang appliqué à f et gof on a

$$\dim \ker f = \dim E - \operatorname{rg} f \qquad \text{et} \qquad \dim \ker gof = \dim E - \operatorname{rg}(gof)$$

puis en remplaçant dans $(*)$ on obtient

$$\operatorname{rg}(gof) \leq \operatorname{rg} f.$$

6. Soit v La restriction de g à $\mathcal{I}mf$, identiquement équivalent

$$v \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{I}mf & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array} \right.$$

a.

$$x \in \ker v \Leftrightarrow x \in \mathcal{I}mf \text{et } v(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{I}mf \text{et } g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{I}mf \cap \ker g.$$

D'où

$$\ker v = \mathcal{I}mf \cap \ker g$$

b. En appliquant le théorème du rang à v on obtient

$$\dim \mathcal{I}mf = \dim \mathcal{I}mv + \dim \ker v$$

or $\ker v = \mathcal{I}mf \cap \ker g$ et $\mathcal{I}mv = g(\mathcal{I}mf) = gof(E) = \mathcal{I}mgof$ ce qui donne

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(gof) + \dim \mathcal{I}mf \cap \ker g$$

Exercice 2

Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longrightarrow & XP' \end{array} \right.$

1. Il s'agit dans cette question de s'assurer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$; Or ceci est le cas puisque

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]; \qquad \deg(\Phi(P)) = \deg(P)$$

2. Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et λ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\Phi(P+\lambda Q) = X(P+\lambda Q)' = XP' + \lambda XQ' = \Phi(P) + \lambda\Phi(Q)$$

ainsi Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même donc c'est un endomorphisme.

3.

- $$P \in \ker\Phi \Leftrightarrow \Phi(P) = 0 \Leftrightarrow XP' = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}$$

  Ainsi $\ker\Phi = \mathbb{R}$
- $\ker\Phi = \mathbb{R} \neq \{0\}$ donc l' endomorphisme Φ n' est pas injective .

4. Puisque Φ est est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie on a

$$\Phi \textbf{ injective} \Leftrightarrow \Phi \textbf{ surjective} \Leftrightarrow \Phi \textbf{ bijective}$$

et puisque Φ n' est pas injective alors Φ n' est pas surjective .

5. Par la formule du rang $\dim \mathcal{I}m\Phi = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim\ker\Phi = n+1-1 = n$.

6. Soit $(1, X, ..., X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On sait que

$$\mathcal{I}m\Phi = \textbf{Vect}(\Phi(1), \Phi(X), ..., \Phi(X^n)) = \textbf{Vect}(0, X, 2X^2, ..., nX^n) = \textbf{Vect}(X, 2X^2, ..., nX^n)$$

et puisque la famille $(X, 2X^2, ..., nX^n)$ est libre (car échelonnée en degré) elle constitue une base de $\mathcal{I}m\Phi$.

7. Le polynôme constant (1) constitue une base de $\ker\Phi$ et $(X, 2X^2, ..., nX^n)$ est une base de $\mathcal{I}m\Phi$
et la réunion des deux bases : $(1, X, 2X^2, ..., nX^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc

$$\mathbb{R}_n[X] = \ker\Phi \oplus \mathcal{I}m\Phi$$

8. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a

$$\Phi^2(P) = \Phi(XP') = X(XP')' = X(P' + XP'') = XP' + X^2P''$$

9. Montrons que $\ker\Phi^2 = \ker\Phi$.

- On a toujours l'inclusion $\ker\Phi \subset \ker\Phi^2$ (voir exercice 1).
- Soit $P \in \ker\Phi^2$, donc $0 = \Phi^2(P) = \Phi(\Phi(P))$ par suite $\Phi(P) \in \ker\Phi$ or on a clairement
  $\Phi(P) \in \mathcal{I}m\Phi$ donc $\Phi(P) \in \ker\Phi \cap \mathcal{I}m\Phi = \{0\}$ (car supplémentaires) ce qui montre que $\Phi(P) = 0$ et assure l'autre inclusion.

10. On a toujours l'inclusion $\mathcal{I}m\Phi^2 \subset \mathcal{I}m\Phi$. On appliquant le théorème du rang à Φ et Φ^2 on a

$$\dim \mathcal{I}m\Phi + \dim\ker\Phi = \dim R_n[X] = \dim \mathcal{I}m\Phi^2 + \dim\ker\Phi^2$$

or $\dim\ker\Phi^2 = \dim\ker\Phi$ donc $\dim\mathcal{I}m\Phi^2 = \dim\mathcal{I}m\Phi$ et vu l'inclusion précédente on conclut que $\mathcal{I}m\Phi^2 = \mathcal{I}m\Phi$.

11. Soit $(1, X, ..., X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

   a. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $\Phi(X^k) = kX^k$

   b. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé. Par récurrence sur m on montre que

$$\forall m \in \mathbb{N}; \qquad \Phi^m(X^k) = k^m X^k$$

   c. Soit $m \in \mathbb{N}$,

   - $\mathcal{I}m\Phi^m = \textbf{Vect}(\Phi^m(1), \Phi(X), ..., \Phi^m(X^n)) = \textbf{Vect}(X, 2^m X^2, ..., n^m X^n) = \textbf{Vect}(X, X^2, ..., X^n) = \mathcal{I}m\Phi$
   - $\Phi^m(X^k) = 0$ si et seulement si $k = 0$ donc $\ker\Phi^m = \mathbb{R} = \ker\Phi$

   d. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors

$$\Phi^m(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi^m(X^k) = \sum_{k=0}^{n} k^m a_k X^k$$

Exercice 1

1. Montrer que les parties de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels :
   a) $F=\left\{f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \mid f'(a)=f'(b)\right\}$
   b) $G=\left\{f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$
2. Soient $F=\left\{f\in\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$
   et $G=\{f\in\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C}) \mid \ f \text{ constante}\}$.
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C})$.

Exercice 2

Montrer que les ensembles suivant sont des sous espaces vectoriels , déterminer une base et un supplémentaires pour chacun d'entre eux

1. $E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+3z=0\}$;
2. $E_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x=y=2z=4t\}$;
3. $E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$;
4. $E_4=\{P\in\mathbb{R}_3[X];\ P(0)=P(2)\}$.
5. $E_5=\{P\in\mathbb{R}_4[X]\ /\ P(0)=P'(0)=P(1)=0\}$
6. $E_6=\{u=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n/x_1+x_n=0\}$

Exercice 3

Montrer que les ensembles suivant sont des sous espces vectoriels , déterminer une base pour chacun d'entre eux

1. E_1, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'-a(x)y=0$, où a est continue sur $\mathbb{R}$.
2. E_2, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+y'-y=0$.
3. E_3, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$.
4. $E_4=\left\{(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\right\}$.
5. $E_5=\left\{(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n\right\}$.

Exercice 4

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F\cap G=F+G\Leftrightarrow F=G$.

Exercice 5

Soient E un Ke-v ,F,G deux s-e-v de$(E,+,.)$ tels que $E=F\cup G$ Montrer que $F=E$ ou $G=E$

Exercice 6

Soient F,Get$H$ des s.ev d'un K-ev E . Comparer :$F\cap(G+H)$ et $(F\cap H)+(F\cap G)$

Exercice 7

Dire si la famille U suivante est libre ou non, et si non donner une relation de liaison de ces vecteurs :

1. $U=(x,y)$ avec $x=(1,2)$ et $y=(4,-3)$
2. $U=(x,y,z)$ avec $x=(0,1,2)$ et $y=(1,2,-3)$ et $z=(-1,0,7)$
3. $U=(x,y,z)$ avec $x=(1,-1,2)$ et $y=(2,-1,-3)$ et $z=(-1,1,1)$
4. $U=(x,y,z,t,f)$ avec $x=(2,1,-1,9)$ et $y=(1,2,1,5)$ et $z=(1,-1,-2,3)$et $t=(11,-1,-2,13)$et $f=(1,-10,-20,23)$
5. $U=(v_1-v_2,v_2-v_3,...,v_{n-1}-v_n,v_n-v_1)$ où $(v_1,...v_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^d$
6. $U=(v_1+v_2,v_2+v_3,...,v_{n-1}+v_n,v_n+v_1)$ où $(v_1,...v_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^d$ et n paire

Exercice 8

Soient

$$\left\{\begin{array}{l} f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto Cos(nx)\end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{l} g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto Cos^n(x)\end{array}\right.$$

Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ Comparer $vect((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $vect((g_n)_{n\in\mathbb{N}})$

Exercice 9

Soient Eun K-ev et F,G,H,L des s.ev de E tels que : $F+G$ et $H+L$ soient directes.
Démontrer que :

$$\left\{\begin{array}{l} F\oplus G\subset H\oplus L\\ F\subset H\ \ et\ \ G\subset L\end{array}\right. \Rightarrow\{F=H\ et\ G=L$$

Exercice 10

F,G deux s-ev d'un K-ev E avec $F+G=E$. Soit F' un supplémentaire de $F\cap G$ dans F. Montrer que $F'\oplus G=E$.

Exercice 11

Soient u,v,w trois vecteurs d'un K-ev E.

1. Montrer que : $vect(u,v)=vect(u,w)\Leftrightarrow\exists\alpha,\beta,\gamma\in K;\beta.\gamma\neq 0$tel que
$$\alpha.u+\beta.v+\gamma.\omega=0$$
2. Soit F un S-ev de E.Montrer que :$F+Kv=F+Kw$,$\Leftrightarrow$,$\exists u\in F$,$\alpha,\beta\in K$,$\alpha.\beta\neq 0$ tel que $u+\alpha.v+\beta.w=0$

Exercice 12

1. Soit
$$\left\{\begin{array}{l} f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto|x-a|\end{array}\right., a\in\mathbb{R},\ \ et\ soit \left\{\begin{array}{l} g_a:R\to R\\ x\mapsto e^{ax}\end{array}\right., a\in\mathbb{R}$$
   Montrer que les deux familles :$(f_a)_{a\in\mathbb{R}},(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ sont libres dans $\mathbb{R}^R$.

2. $$\begin{cases} f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Cos(nx) \end{cases}, n \in \mathbb{N} \;\; et\, soit \begin{cases} g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Sin(nx) \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

   Montrer que :$(f_0, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 13

Soient Eun K-ev et F, G, H, L des s.ev de E tels que : $F + G$ et $H + L$ soient directes. Démontrer que :

$$\begin{cases} F \oplus G = H \oplus L \\ F \subset H \;\; et \;\; G \subset L \end{cases} \Rightarrow \{F = H \;\; et \;\; G = L$$

Exercice 14

Soit $H = \{u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_n = 0\}$

1. Montrer que H est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer une base de H
3. Soit $u = (1, 1, \ldots, 1)$. Montrer que $vect(u)$ est un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 15

soit $U = (u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}-$e.v E.Montrer que :

1. si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin vect(u_1, \ldots, u_n)$alors U est libre
2. si U est génératrice et $u_{n+1} \in vect(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice

Exercice 16

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \;/\; P(0) = P'(0) = P(1) = 0\}$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$
2. Déterminer une base de F
3. Montrer que $G = Vect(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$

Exercice 1

Vérifier que les familles suivantes sont libres de E puis les compléter en une base de E.

1. $E = \mathbb{R}^4 \quad ; B = ((1,2,-1,1);(1,0,1,0))$
2. $E = \mathbb{R}_n[X](n \geq 3) \quad ; B = (X+1, X^3 - X)$

Exercice 2

Montrer que la famille B est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ dans les cas suivants :

1. $B = (P, P', P'', ..., P^{(n)})$ où P un polynome de degré n
2. $B = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ où $P_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = X(X+1)(X+2)...(X+k-1)$
3. $B = (E_k)_{0 \leq k \leq n}$ où $E_k = X^k(1+X)^{n-k}$

Exercice 3

Soit n un entier supérieur où égal à 2. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que la famille $B = \big(1, X-1, (X-1)(X-2), ..., (X-1)(X-2)...(X-n)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer les composantes de$X^2 + 3X + 1$ dans B.

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{R}^4$: $\left\{\begin{array}{llll} v_1 = (1,2,0,1) & v_2 = (1,0,2,1) & v_3 = (2,0,4,2) & \\ w_1 = (1,2,1,0) & w_2 = (-1,1,1,1) & w_3 = (2,-1,0,1) & w_4 = (2,2,2,2). \end{array}\right.$

1. Montrer que (v_1, v_2) est libre et que (v_1, v_2, v_3) est liée.
2. Montrer que (w_1, w_2, w_3) est libre et que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée.
3. Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est libre.
4. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3).
   a. Déterminer une base de F.
   b. Donner un supplémentaire de F.
5. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4). Déterminer une base de G.
6. a. A l'aide des bases trouvées en 4. et 5. construire un système générateur de $F + G$.
   b. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. a. Montrer que $v_1 + v_2$ est dans $F \cap G$.
   b. Calculer la dimension de $F \cap G$.
   c. Donner une base de $F \cap G$.
8. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par : $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}$.

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 6

Montrer que les sous espaces vectoriels suivants sont supplémentaires Dans l'espace $\mathbb{R}^4$:
$F = Vect((1,0,1,0),(1,0,0,1))$ et $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z = 0 \ et \ x - z = 0\right\}$

Exercice 7

Soit $E = \{(x_n)_n / \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\}$
$E_1 = \{(x_n)_n / \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} + x_n = 0\}$
$E_2 = \{(x_n)_n / \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\}$
Montrer que E_1 et E_2 sont des s-e-v supplémentaires dans E.

Exercice 8

Dans$\mathbb{K}_n[X]$,soit la famille $B = (P_0, P_1, ..., P_n)$ une famille à n+1 polynômes telle que :
$\forall k \in [| 0, n |], deg(P_k) = k$.
Montrer que B est une base de$\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 9

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$ du $\mathbb{C}$-espace $\mathbb{C}^4$ et éventuellement les relations entre les vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \\ -i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 2-i \\ 1+i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2 \\ -1-i \end{pmatrix} \right)$$

quel est le rang de $\mathcal{F}$ dans le $\mathbb{R}-$espace $\mathbb{C}^4$?

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{C}$espace vectoriel de dimension n. Montrer que E considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel est de dimension 2n.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{K}$ e-v de dimension finie ,F, G deux s-e-v de E de même dimensions .
Montrer qu'il existe un s-e-v H de E supplémentaire à F et à G. (Indication : Faire une récurrence sur $dim(E) - dim(F)$).