Plan

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Dans tout ce chapitre :

Ω désignera un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

$\widetilde{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x+iy \in \Omega\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application on note $\widetilde{f} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\quad \widetilde{f}(x,y) = f(x+iy)$
On pose

$$\forall (x,y) \in \widetilde{\Omega}; \qquad \begin{cases} u(x,y) = \mathrm{Re}\,\widetilde{f}(x,y) \\ v(x,y) = \mathrm{Im}\widetilde{f}(x,y) \end{cases}$$

Si z_0 est un complexe et $r \in \mathbb{R}+^* \cup \{+\infty\}$, on pose $D(z_0,r) = \left\{z \in \mathbb{C}' \quad |z-z_0| < r\right\}$ c' est le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r s i $0 < r < +\infty$, et par abus de langage, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.

1 Dérivation complexe

***Définition* 1.1.** Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.
soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si la fonction :

$$z \longmapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \; z \in \Omega \backslash \{z_0\}$$

admet une limite dans $\mathbb{C}$ en z_0. cette limite est alors noté $f'(z_0)$.

Théorème 1.1. Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.
soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 alors $\widetilde{f}$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 en (x_0,y_0) et on a

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)) = -i\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0) = f'(z_0)$$

Donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

ces équations sont dites équations de **Cauchy-Riemann.**

Preuve : Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Pour tout $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ voisin de 0,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(z_0+h) &= f(z_0) + hf'(z_0) + o(|h|) \quad (1) \\ &= \widetilde{f}(x_0, y_0) + h_1 f'(z_0) + ih_2 f'(z_0) + o(|h|) \end{aligned}$$

(3)

Donc

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)) = f'(z_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = if'(z_0)$$

□

2 Fonction holomorphe

***Définition* 2.1.** Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω est sa fonction drive $f' : z \longmapsto f'(z)$ est continue sur Ω.
la fonction f' est alors appelée la dérivée de f sur Ω.

Théorème 2.1. Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. f est holomorphe sur Ω si et seulement si

$$\begin{cases} \widetilde{f} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \widetilde{\Omega} \\ \forall (x,y) \in \widetilde{\Omega}, \quad \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Preuve : Si f est holomorphe sur Ω alors d' après le théorème 1.1 assure que $\widetilde{f}$ admet des dérivée partielles qui sont continues en tout point de $\widetilde{\Omega}$, donc de classe C^1, et que

$$\forall (x,y) \in \widetilde{\Omega}, \quad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$$

Réciproquement $\widetilde{f}$ est de classe C^1, et $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$ On a pour tout $h = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ voisin de 0 et $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned} f(z_0+h) - f(z_0) &= \widetilde{f}(x_0+\alpha, y_0+\beta) - \widetilde{f}(x_0,y_0) \\ &= \alpha\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0) + \beta\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0) + o(|h|) \\ &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)(\alpha + i\beta) + o(|h|) \\ &= h\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0) + o(|h|) \end{aligned}$$

Alors f est $\mathbb{C}$-drivable sur Ωet $f' = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}$ et continue donc f holomorphe. □

Corollaire 2.1. Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. f est holomorphe sur Ω si et seulement si les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\widetilde{\Omega}$ et vérifient les équations de Cauchy-Riemann

***Exemple* 2.1.** Toute fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée au sens complexe coïncide avec sa dérivé algébrique.c 'est - à - dire si $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_k z^k$ avec les $a_k \in \mathbb{C}$ alors $f'(z) = \sum_{i=1}^{n} k a_k z^{k-1}$

***Exemple* 2.2.** si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme f, alors f est holomorphe sur $D(0;R)$ et lon a

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}, \qquad z\in D(o,R)$$

Il en résulte que f est indéfiniment $\mathbb{C}$−dérivable sur $D(0;R)$ et qu' on a, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\frac{f^k(z)}{k!}=\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k a_n z^{n-k}, \qquad z\in D(o,R)$$

***Exemple* 2.3.** La fonction exponentielle exp définie par

$$\forall z=x+iy\in\mathbb{C},\ \exp(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et on a $\exp'=\exp$.
En effet $(x,y)\mapsto e^x(\cos y+i\sin y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial e^z}{\partial x}=e^x(\cos y+i\sin y) &= e^z\\ \frac{\partial e^z)}{\partial y}=e^x(-\sin y+i\cos y)=ie^x(\cos y+i\sin y) &= ie^z\end{aligned}$$

La condition de Cauchy–Riemann est bien remplie : exp est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp'=\exp$.

***Exemple* 2.4.** Soit $\gamma\in\mathbb{C}$, la fonction $f_\gamma : z\longmapsto e^{\gamma z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, comme compose de fonctions holomorphes et $f_\gamma'(z)=\gamma e^{\gamma z}$

***Exemple* 2.5.** Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$, on pose pour tout $z\in\mathbb{C}$, $g(z)=t^z\overset{\text{def}}{=}e^{z\ln t}$. g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ est $g'(z)=\ln(t)e^{z\ln t}=\ln(t)t^z$.

***Exercice* 1.** Montrer que la fonction $f(z)=\dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et vérifie $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$.

Solution : Il suffit de vérifier que f est dérivable au sens complexe. Pour tout $z\neq 0$:

$$\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}=\lim_{w\to z}\frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{z}}{w-z}=\lim_{w\to z}\frac{1}{w-z}\left(\frac{z-w}{wz}\right)=-\frac{1}{z^2}.$$

La fonction f est bien holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ avec $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$.

□

Propriétés 2.1. Soient deux fonctions $f,g:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$.

1. Si f et g sont holomorphes alors pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, $f+\lambda g$ est holomorphe sur Ω et
$$(f+\lambda g)'=f'+\lambda g'$$
2. Si f et g sont holomorphes sur Ω alors fg est holomorphe sur Ω et
$$(fg)'=f'g+fg'$$
3. On suppose que g ne s'annule pas sur Ω. Si f et g sont holomorphes sur Ω alors $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe sur Ω et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$
En particulier $\dfrac{1}{g}$ est holomorphe sur Ω et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'=-\dfrac{g'}{g^2}$.

Corollaire 2.2. L' ensembles des fonctions holomorphes sur Ω est une sous-algèbre de la $\mathbb{C}-$ algèbre des applications de Ω dans $\mathbb{C}$; on la note $\mathscr{H}(\Omega)$.

Proposition 2.1. Soit Δ un autre ouvert de $\mathbb{C}$. Soit des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(\Omega) \subset \Delta$.
Si f est holomorphe sur Ω et g est holomorphe sur Δ alors $g \circ f$ est holomorphe sur Ω et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

3 Fonction analytique

***Définition* 3.1.** Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. f est "développable en série entière sur un voisinage de z_0" s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels qu ' on ait $D(z_0, r) \subset \Omega$ et

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

***Définition* 3.2.** Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. f est dite analytique sur Ω, si et seulement pour tout $z_0 \in \Omega$, f est "développable en série entière sur un voisinage de z_0."

***Exemple* 3.1.** Toute fonction polynomiale est analytique sur $\mathbb{C}$ et on a la formule de Taylor algébrique

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

***Exemple* 3.2.** La fonction exponentielle est analytique sur $\mathbb{C}$ et on a

$$\forall z, z_0 \in \mathbb{C}, \qquad \exp(z) = e^z = e^{z_0} e^{z - z_0} = e^{z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!}$$

***Exemple* 3.3.** Plus généralement, on admet que la somme dune série entière est analytique sur son disque ouvert de convergence.

Proposition 3.1. L' ensembles des fonctions analytiques sur Ω est une sous-algèbre de la $\mathbb{C}-$algèbre des applications de Ω dans $\mathbb{C}$; on la note$\mathscr{O}(\Omega)$

Théorème 3.1. Toute fonction f analytique sur Ω est holomorphe sur Ω : $\mathscr{O}(\Omega) \subset \mathscr{H}(\Omega)$.
f est de plus indéfiniment $\mathbb{C}-$ dérivable sur Ω et, pour tout $z_0 \in \Omega$, le développement de f autour de z_0 est donné par sa série de Taylor en z_0 c' est à dire :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

valable dans le plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω.

Théorème 3.2. Toute fonction f holomorphe sur Ω est analytique sur Ω : $\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$.
Plus précisément, pour tout $z_0 \in \Omega$, si $D(z_0;R)$ désigne le plus grand disque ouvert de centre z_0 inclus dans Ω, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombre complexes, uniquement déterminée, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ soit $\geq R$ et qu ' on ait

$$\forall z \in D(z_0;R); \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$

***Exercice* 2.** Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

Solution : Ici $f(z) = \frac{1}{z-1}$. Cette fonction est holomorphe dans $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Par conséquent, si $z_0 \in U$, alors la série de Taylor de f en z_0 vaut f dans le disque $D(z_0, R_1)$ si $R_1 = |z_0 - 1|$. Le calcul de la série est classique :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-z_0+z_0-1} = \frac{1}{z_0-1}\frac{1}{1-\left(\frac{z_0-z}{z_0-1}\right)} = \frac{1}{z_0-1}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z_0-z}{z_0-1}\right)^k$$

pour $|z-z_0| < |z_0-1| = R_1$. □

4 Principes du prolongement analytique et des zéros isolés

Théorème 4.1 (Principe du prolongement analytique)**.** Soit g une fonction holomorphe sur un ouvert non vide Ω_1 ; sil existe un ouvert convexe Ω contenant Ω_1 et une fonction f holomorphe sur Ω et prolongeant g, alors f est unique.

Remarque 4.1. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω ouvert convexe . si f et g prennent les mêmes valeurs au voisinage d'un point quelconque de Ω alors elles sont partout égales sur Ω.

Proposition 4.1. si f est une fonction holomorphe sur Ω , ouvert convexe, et sil existe $z_0 \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0$ alors f est nulle sur Ω

Corollaire 4.1. si f est une fonction holomorphe sur Ω , ouvert convexe, et si $f' = 0$ sur Ω alors f est constante sur Ω

Preuve : Soit $z_0 \in \Omega$, posons $g(z) = f(z) - f(z_0)$ alors g est une fonction holomorphe sur Ω et pour tout $n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(z_0) = 0$ donc g nulle est nulle sur Ω , donc f est constante sur Ω □

Théorème 4.2 (Principe des zéros isolés)**.** si f est une fonction holomorphe non nulle sur Ω , ouvert convexe, et s' il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$ alors , il existe $r > 0$ tel que $D(z_0;r) \subset \Omega$ et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(z_0;r) \setminus \{z_0\}$.

Corollaire 4.2. si f est une fonction holomorphe sur Ω , ouvert convexe contenant 0 , et s' il existe un reel $r > 0$ tel que $]-r,r[\subset \Omega$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-r,r[$ alors , f est nule sur Ω

5 Applications

5.1 Trigonométrie complexe

***Exercice* 3.** Lorsque z est complexe les fonctions $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\operatorname{sh}(z)$ et $\operatorname{ch}(z)$ sont définies par les formules :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

1. Montrer que cos et ch sont des fonctions paires et sin et sh des fonctions impaires et donner leurs représentations comme séries entières. Prouver $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)$, $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$, $\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$.
2. Établir les formules :
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$
en écrivant de deux manières différentes $e^{\pm i(z+w)}$. Donner une autre preuve en utilisant le principe du prolongement analytique et la validité (admise) des formules pour z et w réels.
3. Prouver pour tout z complexe $\cos(\pi+z) = -\cos(z)$, $\sin(\pi+z) = -\sin(z)$. Prouver $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$.
4. Prouver les formules $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et $\overset{2}{\operatorname{ch}} z - \overset{2}{\operatorname{sh}} z = 1$ pour tout $z \in$.

Solution : Il s'agit de formules bien connues lorsque les arguments z, w sont réels. La vérification à partir des définitions des fonctions trigonométriques données dans l'énoncé de l'exercice est laissée au lecteur. Voici comment obtenir la formule :

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \qquad pour \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Fixons $w \in \mathbb{R}$. Soit $f_w(z) = \cos(z+w) - \big(\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\big)$. La formule (4) étant vraie pour $z, w \in \mathbb{R}$, $f_w(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Il résulte du principe des zéros isolés que f_w est identiquement nulle. Autrement dit, on vient d'établir la formule (4) pour $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Il suffit maintenant de refaire le même argument en fixant d'abord $z \in \mathbb{C}$ arbitrairement et en observant que la fonction holomorphe

$$g_z(w) = \cos(z+w) - (\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w))$$

est nulle pour tout $w \in \mathbb{R}$. De nouveau $g_z \equiv 0$ par le principe des zéros isolés, d'où la formule (4) pour tout $z, w \in \mathbb{C}$. □

5.2 Fonction ζ de Riemman

***Exercice* 4.** On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 1\}$ et pour tout $z \in \Omega$

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

Montrer que $\zeta(z)$ est holomorphe sur Ω, et que

$$\forall z \in \Omega,\ \zeta'(z) = \zeta x(z) = -\sum_{z=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}.$$

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}}$. Donc si $\operatorname{Re}(z) > 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n^z}$ est absolument convergente.

Fixons alors $y \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $\zeta_y : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}}$, $x \in]1, +\infty[$.

Les fonctions $u_n : x \longmapsto \frac{1}{n^{x+iy}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$

$$u_n'(x) = -\frac{\ln n}{n^{x+iy}}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur $]1, +\infty[$, et si on prend $a > 1$ alors pour tout $x \in [a, +\infty[$

$$|u_n(x)| = \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$$

Donc $\sum u_n'$ CVN sur $[a, +\infty[$, ceci pour tout $a > 1$. Alors la fonction ζ_y est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ \zeta_y'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{x+iy}}$$

Ainsi ζ admet une dérivée partielle selon x en tout point $z \in \Omega$ et

$$\forall z \in \Omega,\ \zeta x(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}$$

De même en considérant pour un $x \in]1, +\infty[$, la fonction $\zeta^x : y \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}}$, on démontre que ζ admet une dérivée partielle selon y en tout point de Ω et que

$$\forall z \in \Omega,\ \zeta y(z) = -i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}$$

Soit ensuite un compact [1] $K \subset \Omega$. La fonction $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ est continue donc elle est borné est atteint sa borne inférieure sur K, en posant $a = \min_{z \in K} \mathrm{Re}(z)$ on a alors $a > 1$ (car $K \subset \Omega$) et

$$\forall z \in K,\ \left| \frac{\ln n}{n^z} \right| \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$$

La série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge donc la série de fonctions $\sum \frac{\ln n}{n^z}$ CVN sur K.

$\sum \frac{\ln n}{n^z}$ CVN sur tout compact de Ω et les fonctions $z \longmapsto \frac{\ln n}{n^z}$ sont continues sur Ω donc la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}$ est continue sur Ω.

Alors les dérivées partielles ζx et ζy sont continues sur Ω. ζ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω. Elle vérifie en plus la condition de Cauchy-Riemann $\zeta y = i \zeta x$, elle est donc holomorphe sur Ω, avec

$$\forall z \in \Omega,\ \zeta'(z) = \zeta x(z) = -\sum_{z=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}.$$

□

5.3 Fonction Γ d'Euler

Exercice 5. On pose alors $\mathscr{P}^+ = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) > 0\}$, et pour tout $z \in \mathscr{P}^+$

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Montrer que Γ est holomorphe sur $\mathscr{P}^+$ et que

$$\forall z \in \mathscr{P}^+,\ \Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$$

Solution : Soit $z \in \mathbb{C}$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\left| t^{z-1} e^{-t} \right| = t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}$. Donc si $\mathrm{Re}(z) > 0$ alors la fonction $t \longmapsto t^{z-1} e^{-t}$ est continue intégrable sur $]0, +\infty[$. donc Γ est définie sur $\mathscr{P}^+$

Comme pour ζ on fixe $y \in \mathbb{R}$ est considère la fonction $\Gamma_y : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x+iy-1} e^{-t} dt$. On démontre via la formule de Leibniz sur la dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre que Γ_y est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \Gamma_y'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x+iy-1} e^{-t} dt$$

Ce qui justifierait l'existence de Γx et que

$$\forall z \in \mathscr{P}^+,\ \Gamma x(z) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$$

Et de la mme façon, on démontre l'existence sur $\mathscr{P}^+$ de Γy avec cette fois

$$\forall z \in \mathscr{P}^+,\ \Gamma y(z) = i \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$$

On démontre ensuite en utilisant le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que la fonction $z \longmapsto \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$ est continue sur toute partie de la forme $[a, +\infty[+ i\mathbb{R}$ de $\mathscr{P}^+$ et donc sur $\mathscr{P}^+$.

Γ serait alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{P}^+$ et vérifierait la condition de Cauchy–Riemann.

On en conclurait que Γ est holomorphe sur $\mathscr{P}^+$ et que

$$\forall z \in \mathscr{P}^+,\ \Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$$

1. un compact de $\mathbb{C}$ est un fermé borné de $\mathbb{C}$, et en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ on a toute fonction continue sur un compacte est bornée et atteint ses bornes

□

5.4 Transformée de Laplace

***Exercice* 6.** Soit une fonction continue $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$.

On suppose qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in [0,+\infty[\,,\ |f(t)| \leqslant Ce^{at}$$

On considère alors l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) > a\}$ et on pose pour tout $z \in \Omega$,

$$Lf(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt.$$

La fonction Lf est appelée transformée de Laplace de f.

Montrer que Lf bien est définie et qu ' elle est holomorphe sur Ω. et que

$$\forall z \in \Omega,\ (Lf)'(z) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$$

Solution : Soit $z \in \Omega$, $\left|f(t)e^{-zt}\right| = |f(t)|e^{-t\mathrm{Re}(z)} \leqslant Ce^{(a-\mathrm{Re}(z))t}$ avec $a - \mathrm{Re}(z) < 0$.

donc la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-zt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et par suite Lf est bien définie en z.

On peut comme pour la fonction Γ d'Euler, considérer les fonctions partielles $x \longmapsto Lf(x+iy)$ et $y \longmapsto Lf(x+iy)$ et ainsi calculer les drives partielles de Lf selon x et y via la formule de Leibniz.

On va s'y prendre toutefois autrement. Soit $z \in \Omega$ et montrons que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z par caractérisation séquentielle en s'aidant du théorème de la convergence dominée, technique utilisée notamment dans la démonstration même du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Soit donc une suite $(z_n)_n$ d'éléments de $\Omega \backslash \{z\}$ qui converge vers z.

$$\frac{Lf(z_n) - Lf(z)}{z_n - z} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z_n t} - e^{-zt}}{z - z_n} f(t)dt$$

et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,+\infty[$

$$\varphi_n(t) = f(t)\frac{e^{-z_n t} - e^{-zt}}{z_n - z}$$

les fonctions φ_n sont continues sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $z \longmapsto e^{-tz}$ tant holomorphe, la suite $\left(\varphi_n(t)\right)_n$ converge vers $-tf(t)e^{-zt}$. La suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ converge donc simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $\varphi : t \longmapsto -tf(t)e^{-zt}$.

L'inégalité des A.F. applique la fonction $z \longmapsto e^{-tz}$ donne ensuite pour tout $t \in [0,+\infty[$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \left|e^{-tz_n} - e^{-tz}\right| &\leqslant t \sup_{u\in[0,1]} \left|e^{-t\left((1-u)z_n + uz\right)}\right| |z - z_n| \\ &\leqslant t \sup_{u\in[0,1]} e^{-t\left((1-u)\mathrm{Re}(z_n) + u\,\mathrm{Re}(z)\right)} |z - z_n|\end{aligned}$$

comme z et les termes z_n sont dans Ω alors $\mathrm{Re}(z) > a$ et $\mathrm{Re}(z_n) > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\mathrm{Re}(z_n)\right)_n$ converge vers $\mathrm{Re}(z)$ donc en posant $b = (a + \mathrm{Re}(z))/2$, $b < \mathrm{Re}(z)$ donc il existe un rang N à partir duquel on aura $\mathrm{Re}(z_n) \geqslant b$. Alors

$$\forall n \geqslant N,\ \left|e^{-tz_n} - e^{-tz}\right| \leqslant te^{-bt}|z_n - z|$$

On aura ainsi

$$\forall n \geqslant N, \forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\varphi_n(t)\right| \leqslant t|f(t)|e^{-bt} \leqslant Cte^{(a-b)t}$$

La fonction $t \longmapsto Cte^{(a-b)t}$ étant continue intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de la convergence dominée la suite $\left(\int_{[0,+\infty[} \varphi_n\right)_n$ converge vers $\int_{[0,+\infty[} \varphi$, ie

$$\lim \frac{Lf(z_n) - Lf(z)}{z_n - z} = \lim \int_{[0,+\infty[} \varphi_n = \int_{[0,+\infty[} \varphi = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$$

Ainsi Lf est $\mathbb{C}$-dérivable en z et

$$(Lf)'(z) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$$

La continuité de $(Lf)'$ se justifie maintenant en notant la continuité de la fonction $(z,t) \longmapsto -tf(t)e^{-zt}$ et en utilisant la domination sur toute partie $[\alpha,+\infty[\times[0,+\infty[$ de Ω $(\alpha > a)$

$$\left|tf(t)e^{-zt}\right| \leqslant Cte^{(a-\alpha)t}$$

□