Plan

1 Fonctions de classe C^1 **2**

1.1 Dérivées partielles premières . . . 2

1.2 application de classe C^1 . . . 4

1.2.1 Définition . . . 4

1.2.2 Opérations sur les fonctions de classe C^1 . . . 5

1.3 Gradient . . . 6

1.4 Différentielles . . . 6

2 Applications de classe C^2 **8**

2.1 Dérivées partielles seconde . . . 8

2.2 Théorème de Schwarz . . . 9

2.3 Opération sur les fonction de classe C^2 . . . 10

3 Composition de fonctions de classe C^1 **10**

3.1 Différentielle de la composée avec une fonction reelle . . . 10

3.2 Dérivée de la composée avec une fonction vectorielle . . . 10

3.3 Règle de la chaîne (Chain Rule) . . . 11

3.4 Application au changement de variable polaire . . . 11

3.5 Application à l'étude d'équations aux dérivées partielles . . . 12

3.5.1 Exemple 1 . . . 12

3.5.2 Exemple 2 : L'équation d'une corde vibrante. . . . 13

3.5.3 Exemple 3 . . . 13

4 Courbes et Surfaces définies par une représentation cartésienne **13**

4.1 Courbes du plan . . . 13

4.1.1 définition . . . 13

4.1.2 Ligne de niveau . . . 14

4.2 Surfaces définies par une équation cartésienne . . . 15

5 Extremum **15**

5.1 Points critiques . . . 15

5.2 Extremums locales globales . . . 16

5.3 Cas des fonction de classe C^2 à deux variables . . . 17

5.3.1 Développement limité d' ordre 2 . . . 17

5.3.2 Étude des points critiques . . . 17

Dans tout le chapitre, p désignera un entier naturel non nul, et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. $\mathscr{F}(U,\mathbb{R})$le $\mathbb{R}$-ev des fonctions définies sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Fonctions de classe C^1

1.1 Dérivées partielles premières

***Définition* 1.** *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in U$. On appelle i-éme application partielle de f en a l'application $t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_p)$*

***Exemple* 1.1.** pour $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ on a au point (a,b) : $f_1(t) = \dfrac{tb}{t^2+b^2}$ et $f_2(t) = \dfrac{at}{a^2+t^2}$.

***Attention* 1.1.** La continuité des applications partielles ne prouve pas la continuité de f. par exemple $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

***Définition* 2.** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in U$.
Pour $i \in [\![1,p]\!]$, si la i-ème application partielle notée f_i, est dérivable en a_i, le nombre dérivée $f_i'(a_i)$ s'appelle *i-ème dérivée partielle* de f en a.
On note la note $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. on a donc

$$\partial_i f(a) = \lim_{t \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_p) - f(a)}{t - a_i}$$

Remarque 1.1. cas particuliers :

Dans $\mathbb{R}^3$ on note également $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \partial_3 f$.

On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y,z) - f(x,y,z)}{t} = \lim_{t \to x} \frac{f(t,y,z) - f(x,y,z)}{t-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y+t,z) - f(x,y,z)}{t} = \lim_{t \to y} \frac{f(x,t,z) - f(x,y,z)}{t-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y,z+t) - f(x,y,z)}{t} = \lim_{t \to z} \frac{f(x,y,t) - f(x,y,z)}{t-z}$$

Remarque 1.2. En notant $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canoniques de $\mathbb{R}^p$,on posant $\varphi_i : t \mapsto f(a + te_i)$

$$\partial_i f(a) = \varphi_i'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$$

***Exemples* 1.1.** 1. La fonction définie par $f(y,x)=3x^2+2xy$ possède des dérivées partielles en tout point (x,y) et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x+2y.$$

2. La fonction définie par $f(x,y,z)=\exp(3x^2+2xy)$ possède des dérivées partielles en tout point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ puisque les applications partielles sont dérivables comme composées de fonctions polynômes avec la fonction exp et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=(6x+2y)\exp(3x^2+2xy), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2x\exp(3x^2+2xy) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0.$$

3. Soit $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ dérivable. La fonction définie par $f(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)$ possède des dérivées partielles en tout point (x,y) où $x\neq 0$ puisque $t\mapsto g\left(\frac{t}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $t\mapsto g\left(\frac{y}{t}\right)$ l'est sur $\mathbb{R}^*$. De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right).$$

***Attention* 1.2.** les écritures $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ ne sont que des notations pour désigner la position par rapport à laquelle on dérive et n'a à priori **aucun rapport avec le nom de la variable**. On pourrait très bien écrire $\frac{\partial f}{\partial e_1}, \frac{\partial f}{\partial e_2}$ et $\frac{\partial f}{\partial e_3}$ (d'ailleurs ces notations existent). La notations $\partial_i f(a)$ est moins ambiguë.

***Exercice* 1.** Soit f définie par $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f n,est pas continue en $(0,0)$
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$
3. conclure

Solution :

1. $f(x,0)=0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x,x)=\frac{1}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}\neq 0$ donc f n ' est pas continue.
2. On a $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0\xrightarrow[x\to 0]{}0$ et $\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0\xrightarrow[x\to 0]{}0.$
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et valent 0. Mais f n'est pas continue en $(0,0)$.

□

Remarque 1.3 (Importante). L'exercice précédent montre que l'existence des dérivées partielles **n'entraîne pas** la continuité :

Proposition 1. *Soient $f,g:U\mapsto\mathbb{R}$ admettent des dérivées partielles en a, alors*

1. *fg et $f+g$ admettent des dérivées partielles en a et pour $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $i\in[\![1,p]\!]$,*

$$\partial_i(\lambda f+\mu g)(a)=\lambda\partial_i f(a)+\mu\partial_i g(a) \quad \text{et} \quad \partial_i(fg)(a)=g(a)\partial_i f(a)+f(a)\partial_i g(a)$$

2. *Si $g(a)\neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet des dérivées partielles en a et*

$$\partial_i(\frac{f}{g})(a)=\frac{\partial_i f(a)g(a)-\partial_i g(a)f(a)}{g^2(a)}$$

3. *Soient $h:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ dérivable . Alors la fonction $\varphi=h\circ f$ possède des dérivées partielles en a et on a*

$$\partial_i\varphi(a)=h'\big(f(a)\big)\partial_i f(a).$$

***Exemple* 1.2.** Soient $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tout point (x, y). Alors la fonction $\varphi = g \circ f$ possède des dérivées partielles en tout point puisque $t \mapsto g\big(f(t, y)\big)$ et $t \mapsto g\big(f(x, t)\big)$ sont dérivables d'après le théorème de composition. De plus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

1.2 application de classe C^1

1.2.1 Définition

***Définition* 3.** On dit que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U (ou continûment différentiable sur U) si elle admet des dérivées partielles **continues** en tout point de U.
On note $C^1(U,\mathbb{R})$l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

***Exemples* 1.2.**

1. la fonction définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash (\{0\} \times \mathbb{R})$ par $\theta(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ est de classe C^1 sur U car elle possède en tout point (x, y) de U des dérivées partielles continues qui sont :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

2. la fonction définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe C^1 sur U car elle possède en tout point (x, y) de U des dérivées partielles continues qui sont :

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

***Attention* 1.3.** L'existence de dérivées partielles n'est pas suffisant pour montrer qu'une application est C^1. Ces dérivées partielles **doivent être continues.**

***Exemple* 1.3.** On définit sur ^{2} l'application suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $(0, 0)$?
2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Solution :

1. Remarquons que $f(x, x) = 1/2$, qui ne tend pas vers 0 si x tend vers 0 : f n'est pas continue en 0.
2. Puisque $f(x, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe, et vaut 0.
3. f ne peut etre de classe C^1 puisqu'elle n'est pas continue !

□

1.2.2 Opérations sur les fonctions de classe C^1

Proposition 2. *1. toute combinaison linéaire d'applications de classe C^1 est encore de classe C^1.*

2. Si $f, g \in C^1(U,\mathbb{R})$ alors $fg \in C^1(U,\mathbb{R})$. Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g} \in C^1(U,\mathbb{R})$

On dit que $C^1(U)$ est une algèbre pour les loi usuelles.

Preuve : Provient de la proposition 1 et des propriétés usuelles sur les fonctions continues. □

Corollaire 1. $C^1(U)$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles

Proposition 3. *Si $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ alors $g \circ f \in C^1(U,\mathbb{R})$*

***Exemple* 1.4.** Montrer que l'application $f : ^2 \to$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

est de classe C^1.

Solution : De la majoration $x^2 \leq x^2 + y^2$, on obtient que

$$|f(x,y)| \leq y^3,$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0,0)$. D'autre part, f est clairement de classe C^1 sur $^2 \setminus \{(0,0)\}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2y^2\frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'autre part, montrons que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. On a en effet :

$$f(x,0) - f(0,0) = 0,$$

ce qui prouve que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable valant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

De même pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable. Il reste à démontrer que ces dérivées partielles sont continues en $(0,0)$. Mais on a, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\left|\frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2|xy|\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)}\right)^2 \leq 2|xy|,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ si (x,y) tend vers $(0,0)$. De même, puisque $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{1}{4}\left|3x^2 + y^2\right|.$$

On a également continuité de la dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0,0)$. □

1.3 Gradient

***Définition* 4.** *Soit f de classe $C^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$. On appelle* gradient *de f en a le vecteur noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$ définie par*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$$

***Exemple* 1.5.** dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

Proposition 4. *Pour $f,g \in C^1(U,\mathbb{R})$, de part les propriétés sur les dérivées partielles on a*

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.
2. $\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f$.
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.
4. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g)$, *(si g ne s'annule pas, bien évidemment)*

1.4 Différentielles

***Définition* 5.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $f \in C^1(U,\mathbb{R})$*
On appelle différentielle de f en a *la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ notée $df(a)$ ou df_a définie par :*

$$\forall h = (h_1,\ldots,h_p) \in \mathbb{R}^p \qquad df(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Remarque 1.4. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on note dx_i la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ par $dx_i : (h_1,\ldots,h_p) \mapsto h_i$ Alors on a

$$df(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$$

Proposition 5. *On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne standard. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$.*

$$df(a)(h) = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) \,\middle|\, h\right).$$

Preuve : D'après l'expression du canonique, en posant $h = (h_1,\ldots,h_p)$, on a

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (h|\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$$

□

***Exemples* 1.3.** 1. Dans le cas $p = 1$, la différentielle de f en a est $h \mapsto f'(a)h$.

2. Soit f définie par $f(x,y) = x^2y^2$. f est C^1 comme produit de fonctions C^1 pour tout (h,k) et (x,y) de $\mathbb{R}^2$

$$df(x,y)(h,k) = 2xy^2h + 2x^2yk.$$

***Exercice* 2.** Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 et calculer leur différentielle

1. $f(x,y) = e^{xy}(x+y)$.
2. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.

Solution : 1. f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y(x+y)+1)e^{xy}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x(x+y)+1)e^{xy}.$$

Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est de classe C^1 , et on a :

$$df_{(x,y)}(h,k) = \big(h(y(x+y)+1) + k(x(x+y)+1)\big)e^{xy}.$$

Avec la notation différentielle, on a

$$df = \big(y(x+y)+1\big)e^{xy}dx + \big(x(x+y)+1\big)e^{xy}dy.$$

2. f est clairement C^1 . On a donc

$$df = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$$

□

Théorème 1 (développement limité à l'ordre 1). *Si $f \in C^1(U,\mathbb{R})$, alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point $a \in U$ donné par*

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|h\|\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$ on note $\|h\|\varepsilon(h) = o(\|h\|)$

***Attention* 1.4.** La réciproque est fausse ; f peut vérifier un développement limité à l'ordre 1 mais ne pas être de classe C^1.

Corollaire 2. *Si f est de classe $C^1(U)$, alors elle continue sur U.*

***Attention* 1.5.** La réciproque est évidemment fausse.

Proposition 6 (unicité du DL d'ordre 1). *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$. Si L est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ telle que*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

Alors

$$L = df(a)$$

Preuve : Soit $H = L - df(a)$ alors H est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ qui vérifie $H(\frac{h}{\|h\|}) = o(1)$ donc pou tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\|h\| \leq \alpha \Rightarrow H(h) < \epsilon\|h\|$.

Soit, $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^p$ fixe, on a $\|\frac{\frac{\alpha}{2}x}{\|x\|}\| < \alpha$ donc $H(\frac{x}{\|x\|}) < \epsilon$ ceci étant pour tout $\epsilon > 0$ donc forcement $H(\frac{x}{\|x\|}) = 0$ ce qui montre que $H = 0$ □

Proposition 7 (Différentielle d'une application linéaire). *Soit $L : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire . alors L est de classe C^1 sur$\mathbb{R}^p$ et on a*

$$\forall a \in \mathbb{R}^p \qquad DL(a) = L(a)$$

Preuve : Si f est linéaire, alors en notant $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}$ sa matrice relative aux bases canoniques, on a

$$\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^n,\ f(h) = \sum_{i=1}^{p} a_i h_i.$$

f est alors C^1 comme somme d'applications C^1 et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $a \in \mathbb{R}^p$, $\partial_i f(a) = \alpha_i$. Ainsi, $\forall h \in \mathbb{R}^p, \forall a \in E,\ f = df(a)$

□

Proposition 8 (***Différentielle d'une application constante***). *Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une application constante . alors f est de classe C^1 sur$\mathbb{R}^p$ et on a*

$$\forall a \in \mathbb{R}^p \qquad Df(a) = 0$$

Proposition 9 (***Propriétés algébriques de la différentielle***). *Soient f, g de classe C^1 sur U. alors pour tout $a \in U$ on a*

1. $d(f + \lambda g)(a) = df(a) + \lambda dg(a)$
2. $d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$
3. $d(\frac{1}{g})(a) = -\frac{1}{g^2(a)} dg(a)$
4. $d(\frac{f}{g})(a) = \frac{1}{g^2(a)}(g(a)df(a) - f(a)dg(a))$

Proposition 10 (***Différentielle du produit***). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 . Soit $F : U \times V \subset \mathbb{R}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par :*

$$\forall (x, y) \in U \times V \qquad F(x, y) = f(x).g(y)$$

alors F est de classe C^1 sur$U \times V$ et on a pour tout $(a, b) \in U \times V$:

$$\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \qquad DF(a, b).(h_1, h_2) = g(b)Df(a).(h_1) + f(a)Dg(b).(h_2)$$

2 Applications de classe C^2

2.1 Dérivées partielles seconde

Définition 6. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 1 .*
On appelle dérivée partielle seconde *(ou d'ordre 2) de f en a , lorsqu'elle existe , une derivee partielle d'une derivee premiere . on les notes :*

$$\partial^2_{i,j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \qquad \text{où } (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$$

Définition 7. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.*
f est dite de classe C^2 sur U si f admet en tout point de U des derivee partielles seconde qui sont continues sur U. On note $C^2(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2.

Cas particulier :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles.

Si elles existent, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

f est dites de classe C^2 sur U si ces 4 dérivées partielles secondes existent et sont continues sur U.

Sur $\mathbb{R}^3$, on aurait 9 dérivées partielles d'ordre 2.

2.2 Théorème de Schwarz

Théorème 2 (Théorème de Schwarz)**.** *Si f est de classe C^2 sur U, alors :*

$$\forall a \in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \qquad \text{avec } (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$$

Remarque 2.1. Ce théorème est très pratique (par sa contraposée) pour montrer qu'une fonction n'est pas de classe C^2

***Exercice* 3.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{lcl} (x,y) & \mapsto & xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0. \end{array}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$
4. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Solution :

1. D'une part, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant par exemple l'inégalité classique $2|xy| \leq x^2+y^2$, on obtient :
$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{x^2+y^2}{2},$$
ce qui prouve la continuité de f en $(0,0)$.
2. Remarquons d'abord que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, comme quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, si $(x,y) \neq (0,0)$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 y - y^5 + 4x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
D'autre part, on a $f(x,0) - f(0,0) = 0$, ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. On a alors :
$$\begin{array}{rcl} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| & \leq & \dfrac{|x|^4|y| + |y|^5 + 4|x|^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2} \\ & \leq & |y|\dfrac{x^4+y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ & \leq & 2|y|, \end{array}$$
Ceci prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par symétrie des rôles joués par x et y dans l'expression de $f(x,y)$, le même résultat est vrai pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. On a donc prouvé que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$
4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ donc la fonction n'est pas de classe C^2

□

2.3 Opération sur les fonction de classe C^2

Théorème 3. *Toute combinaison linéaire, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^2 est encore de classe C^2.*

Remarque 2.2. Toute fonction de classe de C^2 est de classe C^1

3 Composition de fonctions de classe C^1

3.1 Différentielle de la composée avec une fonction reelle

Théorème 4. *Soit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 . Alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U est on a pour tout $a \in U$*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \qquad d(g \circ f)(a)(h) = g'(a) df(a)(h)$$

3.2 Dérivée de la composée avec une fonction vectorielle

Théorème 5. *Soit $f \in C^1(U,\mathbb{R})$, et $\varphi : t \mapsto \big(x_1(t), \dots x_p(t)\big) \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(I) \subset U$. Alors $g = f \circ \varphi : t \mapsto f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$ est dérivable en tout point de I et on a :*

$$\forall\, t \in I, \qquad g'(t) = df(\varphi(t)).\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_1(t), \dots x_p(t)\big) \times x_i'(t).$$

Preuve : Soit $a \in$ et $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} g(a+h) & = & f(\varphi(a+h)) \\ & = & f(\varphi(a) + h\varphi'(a) + h\epsilon_1(h)) \qquad \epsilon_1(h) \longrightarrow 0 \\ & = & f(\varphi(a)) + df(a).(h\varphi'(a) + h\epsilon_1(h)) + h\epsilon_2(h) \qquad \epsilon_2(h) \longrightarrow 0 \\ & = & f(\varphi(a)) + h df(a).(\varphi'(a)) + h\epsilon_3(h)) \qquad \epsilon_3(h) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Donc g est derivable en a et $g'(a) = df(\varphi(t)).\varphi'(t)$ □

Remarque 3.1. On dit qu' on a effectuer une dérivation le long dun arc φ.

En notant $\varphi(t) = f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$ on a $g = f \circ \varphi$. La formule devient

$$g'(t) = \big(\nabla f\big(\varphi(t)\big) \,\big|\, \varphi'(t)\big).$$

***Exemple* 3.1.** Soit f une fonction de deux variables de classe C^1 et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (\arctan t, 2t^3 - e^{-t})$. $f \circ g$ est alors de classe C^1 et

$$(f \circ g)'(t) = \frac{1}{1+t^2} \frac{\partial f}{\partial x}(\arctan t, 2t^3 - e^{-t}) + (3t^2 - e^{-t}) \frac{\partial f}{\partial y}(\arctan t, 2t^3 - e^{-t}).$$

3.3 Règle de la chaîne (Chain Rule)

Considérons f, u et v de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et notons $g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .On veut calculer les dérivées partielles de g en fonction de celle de f, u et v :

Posons g_1, u_1, v_1 les applications partielles premières respectivement de g, u et v en (x,y) et g_2, u_2, v_2 leur applications partielles secondes ($u_1(x) = u(x,y)$ et $u_2(y) = u(x,y)$)

Par définition de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = g_2'(x)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = g_1'(x)$

Mais $g_1(x) = f\big(u_1(x), v_1(x)\big)$ et $g_2(y) = f\big(u_2(y), v_2(y)\big)$ donc d'après la règle de la chaîne, on a alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(u_1(x), v_1(x)\big) \cdot u_1'(x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(u_1(x), v_1(x)\big) \cdot v_1'(x) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(u_2(y), v_2(y)\big) \cdot u_2'(y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(u_2(y), v_2(y)\big) \cdot v_2'(y) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(u(x,y), v(x,y)\big) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(u(x,y), v(x,y)\big) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(u(x,y), v(x,y)\big) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(u(x,y), v(x,y)\big) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{cases}}$$

On note alors

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}}$$

3.4 Application au changement de variable polaire

Soit f de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et (r,θ) tel que

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Considérons les fonctions u et v définies par

$$u(r,\theta) = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad v(r,\theta) = r\sin\theta$$

On définit alors une nouvelle fonction par

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f\big(u(r,\theta), v(r,\theta)\big)$$

.

D'après la règle de la chaîne on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x,y\big)\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x,y\big)\sin\theta \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x,y\big) + r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x,y\big) \end{cases}$$

En inversant ce système qui est un système de Cramer, puisque $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x,y\big) = \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\cos\theta - \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\dfrac{\sin\theta}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x,y\big) = \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\sin\theta + \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

qui donne

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\overrightarrow{j} = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\overrightarrow{j}$$

d'où

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\overrightarrow{e_1}(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\overrightarrow{e_2}(\theta)}$$

avec

$$\overrightarrow{e_1}(\theta) = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_2}(\theta) = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j}$$

3.5 Application à l'étude d'équations aux dérivées partielles

3.5.1 Exemple 1

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a,$$

où a est un réel.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$
En utilisant le théorème de composition, montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.
2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Solution :

1. Par composition, on a :
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{-1}{2} \\ &= \frac{a}{2}.\end{aligned}$$
2. On intègre cette équation. Pour tout v, il existe une constante $h(v)$ telle que
$$f(u,v) = \frac{au}{2} + h(v).$$
Puisque la fonction $(u,v) \mapsto f(u,v)$ est de classe C^1, il en est de-même de $v \mapsto h(v)$.
3. g est solution de l'équation si et seulement si il existe une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout u, v, on a :
$$g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) = \frac{au}{2} + h(v).$$
Pour revenir à x et y, il faut procéder au changement de variables inverse, en posant $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$: on a donc
$$g(x,y) = \frac{a(x-y)}{2} + h(x+y).$$

□

3.5.2 Exemple 2 : L'équation d'une corde vibrante.

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

Solution : On pose donc $f(x, y) = F(u, v)$ avec $u = x + at$ et $v = x + bt$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial F}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation devient alors :

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

En prenant $a = c$ et $b = -c$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0$$

dont la solution générale est

$$F(u, v) = \phi(u) + \psi(v),$$

où ϕ et ψ sont C^2. La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

□

3.5.3 Exemple 3

Resoudre l'equation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Solution : Posons $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ et $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta r$$

Donc

$$F(r, \theta) = \cos\theta \ln(r) + \psi(\theta)$$

Acec ψ de calasse $C1$ □

4 Courbes et Surfaces définies par une représentation cartésienne

4.1 Courbes du plan

4.1.1 définition

Définition 8. *On appelle courbe du plan définie par une équation cartésienne, l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant une équation du type*

$$F(x, y) = 0$$

où $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$.

***Exemples* 4.1.** On a déjà rencontré de nombreux exemples comme notamment les droites ($ax + by + c = 0$), les coniques ($ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$) et les graphes des fonctions $F(x, y) = y - f(x) = 0$.

Proposition 11. *Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x,y)=0$ et $M \in \mathscr{C}$.*
M est dit régulier *si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) \neq \overrightarrow{0}$.*
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point régulier $M(x_0,y_0)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(X-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(Y-y_0)=0$$

C'est la droite passant par M de vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)$.
On appelle normale *en M la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)$.*

Exemples 4.2.

1. Soit f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F(x,y)=y-f(x)$. Le graphe de f admet comme équation $F(x,y)=0$.
   Une équation de la tangente en (x_0,y_0) est alors $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$ $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
2. Une équation de la tangente en (x_0,y_0) du cercle unité d'équation $x^2+y^2=1$ est $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0$ ou encore $x_0x+y_0y=1$
   Une équation de la normale en (x_0,y_0) du cercle unité d'équation $x^2+y^2=1$ est $\begin{vmatrix} x-x_0 & 2x_0 \\ y-y_0 & 2y_0 \end{vmatrix}=0 \iff y_0x-x_0y=0$.
   On retrouve que la normale à un cercle passe par son centre, autrement dit un rayon, est orthogonale à la tangente.

4.1.2 Ligne de niveau

Définition 9. *On appelle lignes de niveau de $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ les ensembles de la forme $L_\lambda = \{(x,y)\in U \mid f(x,y)=\lambda\}$.*

Exemples 4.3.

1. Les lignes de niveau de la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$ sont des cercles concentriques ou un point (pour $\lambda=0$).
2. Celles de la fonction $f(x,y)=xy$ sont des hyperboles, à lexception de la ligne de niveau 0, qui est la réunion de deux droites.

Proposition 12. *En un point où il est non nul, le gradient de $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ est perpendiculaire aux lignes de niveau, pointant dans la direction dans laquelle la fonction augmente.*

Preuve : On suppose que l'on peut trouver localement un paramétrage de classe C^1 de la ligne de niveau L_λ L_λ est donc localement support de l'arc $t \mapsto M(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ sur un intervalle I.

On alors $\forall\, t\in I$, $f\big(x(t),y(t)\big)=\lambda$. La règle de la chaîne donne alors $\forall\, t \in I$, $\big(\nabla f(M(t)) \mid M'(t)\big)=0$.

Ceci prouve que si $\nabla f(M(t)) \neq 0$, il est orthogonal au vecteur tangent de la courbe en $M(t)$, c'est-à-dire il est orthogonal à la ligne de niveau en $M(t)$

Soit $M_0=\big(x(t_0),y(t_0)\big)\in L_\lambda$. Lorsque lon se déplace dans la direction du gradient en M_0 en considérant le chemin $\varphi : t \mapsto M_0 + t\nabla f(t_0)$ on a, toujours d'après la règle de la chaîne :

$$(f\circ\varphi)'(t)=\big(\nabla f(\varphi(t)) \mid \varphi'(t)\big)=\big(\nabla f(\varphi(t)) \mid \nabla f(t_0)\big).$$

Notamment, $(f\circ\varphi)'(0)=\|\nabla f\big(t_0\big)\|^2>0$. La dérivé en M_0 de $f\circ\varphi$ est positive. Donc les valeurs de f augmente suivant le gradient au voisinage de M_0 □

4.2 Surfaces définies par une équation cartésienne

***Définition* 10.** *On appelle surface définie par une équation cartésienne, l'ensemble des points (x,y,z) de l'espace vérifiant une équation du type*

$$f(x,y,z)=0$$

où $f\in C^1(U,\mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^3$.

***Exemples* 4.4.**

1. La surface représentée par $x^2+y^2+z^2=1$ est une sphère.
2. La surface représentée par $ax+by+cz+d=0$ où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ est un plan.
3. toute équation du type $z=f(x,y)$ où $f\in C^1$ définie une surface.

***Définition* 11.** *Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ et $M\in\mathscr{S}$.*
M est dit régulier *si $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)\neq\overrightarrow{0}$.*
On appelle alors plan tangent *à $\mathscr{S}$ en un point régulier $M(x_0,y_0,z_0)$ le plan d'équation*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(X-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(Y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(Z-z_0)=0$$

C'est le plan passant par M de vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$.
On appelle normale *en M la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$.*

***Exemple* 4.1.** Considérons la sphère unité $x^2+y^2+z^2=1$ et le point $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ de $\mathscr{S}$.
L'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en M est

$$(x-\tfrac{1}{2})+(y-\tfrac{1}{2})+\sqrt{2}(z-\tfrac{\sqrt{2}}{2})=0$$

On retrouve (heureusement) la même équation que dans le cas paramétrique.

***Exemple* 4.2.** Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe C^1. En appliquant ce qui précédé à la fonction g définie sur $U\times\mathbb{R}$ par $g(x,y,z)=z-f(x,y)$ l' équation $z=f(x,y)$ définit une surface régulière $\sum$ de $\mathbb{R}^3$.
En tout point $M(x_0,y_0,z_0)$ de $\sum$ le plan tangent a pour équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(X-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(Y-y_0)-(Z-z_0)=0$$

5 Extremum

5.1 Points critiques

***Définition* 12.** *Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe C^1 . $a\in U$ est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a)=0$*
C'est à diresi et seulement si

$$\forall i\in[\![1,n]\!]\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0$$

Remarque 5.1. si f est définie sur $\mathbb{R}^2$ un point critique est un point où le plan tangent à la surface $\sum : z=f(x,y)$ est horizontale

5.2 Extremums locales globales

***Définition* 13.** *On dit que f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ présente en $a \in A$:*
— *un maximum (global) si $\forall x \in A,\ f(x) \leq f(a)$.*
— *un minimum (global) si $\forall x \in A,\ f(x) \geq f(a)$.*
— *extremum (global) si elle présente en a un maximum ou un minimum.*

***Définition* 14.** *On dit que f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ présente en $a \in A$:*
— *un maximum local s'il existe un ouvert $U \subset A$ contenant a tel que*

$$\forall x \in U,\ f(x) \leq f(a).$$

— *un minimum local s'il existe un ouvert $U \subset A$ contenant a tel que*

$$\forall x \in U,\ f(x) \geq f(a).$$

— *extremum local si elle présente en a un maximum local ou un minimum local.*

Remarque 5.2. On dit que les extremums sont stricts si les inégalités sont strictes pour $x \neq a$.

Théorème 6. *Soit f de classe C^1 sur un ouvert U vers $\mathbb{R}$. Si f présente un extremum local en a, alors f présente un point critique en a*
c'est a dire ses dérivées partielles en a sont nulles ($\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \overrightarrow{0}$ ou $df(a) = 0$)

Preuve : On note $(e_1,\ldots,e_p)$ la base canoniques de $\mathbb{R}^p$ Si f a un extremum local, alors les applications $t \mapsto f(a+te_i)$ ($i \in [\![1,p]\!]$) ont un extremum local sur un intervalle du type $]-r,r[$ en 0, ce qui implique que leur dérivée s'annulent en 0 $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $D_i f(a) = 0$. □

Remarque 5.3. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, la réciproque est fausse. Il suffit de considérer f définie par

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

le gradient est nul en $(0,0)$, mais $f(x,0) > f(0,0)$ si $x \neq 0$, et $f(x,y) = -y^2 < f(0,0)$ si $y \neq 0$, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum pour f : c'est un point selle ou un point col.

***Exemple* 5.1.** Considérons f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.

f est de classe C^1 comme sommes et produits de fonctions de classe C^1. Ses dérivées partielles en (x,y) sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 12x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 12y.$$

Elles s'annulent conjointement en $(0,0),(4,0),(0,-4)$ et $(4,-4)$

— Au voisinage de $(0,0)$:
  $f(t,0) \sim -6t^2$ donc ne présente pas de minimum local et $f(0,t) \sim 6t^2$ donc ne présente pas de maximum local.
— En (4,0), en prenant ce point comme nouvelle origine du repère, on a

$$\begin{aligned} f(4+X,Y) &= -32 + 6X^2 + 6Y^2 + X^3 + Y^3 \\ &= -32 + X^2(6+X) + Y^2(6+Y) \longrightarrow \quad [(X,Y)](0,0) - 32 \end{aligned}$$

  d'où
  $f(4+X,Y) - f(4,0) = X^2\underbrace{(6+X)}_{\geq 0} + Y^2\underbrace{(6+Y)}_{\geq 0}$ positif au voisinage de $(X,Y) = (0,0)$.

5.3 Cas des fonction de classe C^2 à deux variables

5.3.1 Développement limité d' ordre 2

Théorème 7 (Formule de Taylor-Young à lordre 2)**.** *Soit f de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $a=(a_1,a_2)\in U$ et $h=(h_1,h_2)$ proche de 0 ona*

$$f(a+h)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)=f(a)+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a).h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a).h_2\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a).h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a).h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).h_2^2\right]+o(\|h\|)$$

Remarque 5.4. On pose

$$\begin{cases} r(a)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\\ s(a)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\\ t(a)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\end{cases}$$

et

$$H(a)=\begin{pmatrix} r(a) & s(a)\\ s(a) & t(a)\end{pmatrix}$$

Appelée matrice Hitienne de f

Formule de Taylor-Young à lordre 2 s'écrit :

$$f(a+h)=f(a)+df(a).h+{}^t h.H.h+o(\|h\|)$$

5.3.2 Étude des points critiques

Théorème 8. Soit f de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $a=(a_1,a_2)\in U$ un point critique de f tel que la matrice hitienne $H(a)$ est inversible cad $r(a)t(a)-s(a)^2\neq 0$. Aors

1. si $r(a)t(a)-s(a)^2>0$ et $r(a)>0$ alors f admet un minimum local en a
2. si $r(a)t(a)-s(a)^2>0$ et $r(a)<0$ alors f admet un maximum local en a
3. si $r(a)t(a)-s(a)^2<0$ alors f admet point selle en a

***Exercice* 4.** Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=y^2-x^2+\dfrac{x^4}{2}$;
2. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;
3. $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$.

Solution : 1. On commence par chercher les points critiques de f. Pour cela, on calcule les dérivées partielles par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2x+2x^3 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y.$$

Un point (x,y) est critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} -2x+2x^3 &= 0\\ 2y &= 0.\end{cases}$$

Les seules solutions de ce système sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$. On a donc 3 points critiques et on va étudier la nature de chacun. Pour cela, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-2+6x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0.$$

En $(0,0)$, on obtient donc, avec les notations usuelles, $r=-2$, $t=2$ et $s=0$, soit $rt-s^2=-4<0$. Le point $(0,0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f. En $(1,0)$, on a $r=4$, $t=2$ et $s=0$, soit $rt-s^2=8>0$. Le point $(1,0)$ est un extrémum local, c'est même un minimum local puisque $r>0$. L'étude en $(-1,0)$ donne exactement le même résultat.

2. On procède exactement de la même façon. Cette fois,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3x.$$

Un point (x,y) est un point critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} x^2-y &= 0\\ y^2-x &= 0.\end{cases}$$

Ce système implique $x^4=x$, soit $x=0$ ou $x=1$. On en déduit facilement que les seuls points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$. Les dérivées partielles du second ordre sont égales à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-3.$$

En $(0,0)$, on a $r=0$, $t=0$ et $s=-3$, soit $rt-s^2=-9<0$. Le point $(0,0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f. En $(1,1)$, on a $r=6$, $t=6$ et $s=-3$, soit $rt-s^2=25>0$. Puisque de plus $r>0$, le point $(1,1)$ est un minimum local de f.

3. Les dérivées partielles du premier ordre de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-8(x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3+8(x-y).$$

Les points critiques sont solutions du système

$$\begin{cases} 4x^3=8(x-y)\\ -4y^3=8(x-y).\end{cases}$$

On en déduit que $x^3=-y^3=(-y)^3$. La fonction cube étant injective, ceci donne encore $x=-y$. Si on reporte ceci dans la première équation, on trouve $4x^3=16x$, soit

$$x^3-4x=0 \iff x(x^2-4)=0 \iff x(x-2)(x+2)=0.$$

On en déduit que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$. Etudions maintenant la nature de ces points critiques. Les dérivées partielles du second ordre sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-8x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-8 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=8.$$

En $(0,0)$, avec les notations usuelles, on a $r=0$, $t=0$ et $s=8$, soit $rt-s^2=-64<0$. Le point $(0,0)$ est un point col, et f n'a pas d'extrémum local en $(0,0)$. En $(2,-2)$, on a $r=40$, $t=40$ et $s=-8$. Cette fois, $rt-s^2>0$ et $r>0$, donc le point $(2,-2)$ est un minimum local pour f. La conclusion est identique en $(-2,2)$.