

INTERFÉRENCES LUMINEUSES

L'optique géométrique suppose les rayons lumineux indépendants. Elle se révèle suffisante dans la plupart des cas (pour prévoir la position et la taille des images) mais elle est insuffisante pour rendre compte de certaines propriétés de la lumière : interférences, diffraction et polarisation. Pour expliquer celles-ci, on doit tenir compte de la nature ondulatoire de la lumière et utiliser la théorie générale de l'électromagnétisme, en particulier la linéarité des équations de Maxwell, c'est-à-dire le principe de superposition des champs \vec{E} et \vec{B} .

On donne le nom d'optique physique (ou ondulatoire) à toute la partie de l'optique qui fait appel à la nature ondulatoire de la lumière. Elle regroupe les phénomènes d'interférences, de diffraction et de polarisation (deux premiers : programme MP).

- ❖ permet d'obtenir des méthodes de mesure extrêmement précises (au nanomètre près) : interférométrie : technique importante, en astronomie, dans l'industrie pour le contrôle d'épaisseur, pour la détection de traces de gaz tel que CO...
- ❖ permet de comprendre la limitation fondamentale des instruments d'optique liée à la diffraction.

Dans ce premier chapitre sur les interférences, nous allons étudier successivement le lien avec la théorie de l'électromagnétisme, les conditions d'interférences, quelques dispositifs réalisant des interférences non localisées, la perte de contraste par manque de cohérence, le Michelson.

I. Modèle scalaire des ondes lumineuses

1. Chemin optique

Considérons une onde lumineuse monochromatique (pulsation ω , période $T=2\pi/\omega$, fréquence $f=1/T=\omega/(2\pi)$) se propageant dans un milieu matériel transparent homogène d'indice n .

a) Indice

Rappelons la définition de l'indice du milieu :

$$n=c/v \quad \text{où } v \text{ est la vitesse de la lumière dans le milieu, } c \text{ sa vitesse dans le vide.} \quad (n \geq 1)$$

b) Longueur d'onde

La longueur d'onde dans le milieu considéré est la distance parcourue par l'onde en une période T .

$$\lambda = vT = \frac{c}{n}T = \frac{\lambda_0}{n} \quad \text{où } \lambda_0=cT \text{ est la longueur d'onde dans le vide.} \quad \lambda \leq \lambda_0$$

c) Chemin optique et retard de phase associé

Pour une OEMPPM de direction et sens de propagation Oz, la phase en M à l'instant t s'écrit

$$\phi(M,t) = \omega t - \phi(M) = \omega t - [kz + \alpha] = \phi(z=0,t) - kz$$

kz est le retard de phase dû à la propagation de l'onde entre un point de cote nulle et le point M de cote z .

Considérons la propagation de la lumière le long d'un rayon lumineux. La propagation se faisant depuis la source S le long d'un rayon lumineux, on remplace z par la distance SM. Quant à k , module du vecteur d'onde, il vaut $2\pi/\lambda$.

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} = n \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u} \quad \text{vecteur d'onde}$$

Le retard de phase s'écrit donc :
$$\frac{2\pi}{\lambda} SM = 2\pi \frac{[nSM]}{\lambda_0}$$

Le produit de l'indice n par la distance SM (chemin géométrique), s'exprimant en mètre puisque n est sans dimension, est appelé chemin optique entre S et M, il est noté (SM).

$(SM) = nSM = \frac{c}{v} SM = c \left(\frac{SM}{v} \right) = c\tau_{SM}$: le chemin optique entre S et M, est la distance que parcourrait la lumière dans le vide (à la vitesse c) pendant la durée τ_{SM} qu'elle met dans le milieu matériel pour aller de S à M. Ceci constitue la définition générale du chemin optique :

On appelle chemin optique entre S et M, noté (SM), la distance que parcourrait la lumière dans le vide pendant la durée τ_{SM} qu'elle met dans le milieu matériel pour aller de S à M : $(SM)=c\tau_{SM}$.

Pour une onde se propageant dans un milieu homogène d'indice n :
$$(SM)=n.SM$$

Remarque : dans l'air où l'indice est très voisin de 1, on peut confondre, en général, le chemin optique et le chemin géométrique (i.e. la distance) : $(SM)\approx SM$ dans l'air.

Pour une onde traversant successivement plusieurs milieux homogènes (i) d'indice n_i :

$$(SM) = \sum_i n_i L_i, \text{ où } L_i \text{ est la distance (chemin géométrique) parcourue dans le milieu (i).}$$

Le retard de phase associé à la propagation de la lumière de S à M s'écrit en utilisant le chemin optique :
$$2\pi \frac{(SM)}{\lambda_0}$$

La phase de l'onde en M à l'instant t s'écrit :
$$\phi(M,t)=\omega t - \phi(M) = \omega t - \left[2\pi \frac{(SM)}{\lambda_0} + \alpha \right]$$

Pour interpréter la constante α , écrivons la phase en S à l'instant t :
$$\phi(S,t)=\omega t - \phi(S) = \omega t - \left[2\pi \frac{(SS)}{\lambda_0} + \alpha \right] = \omega t - \alpha$$

On a donc tout simplement : $\alpha = \phi(S)$.

La phase de l'onde en M à l'instant t s'écrit finalement :

$$\phi(M,t) = \omega t - \phi(M) = \omega t - \left[\phi(S) + 2\pi \frac{(SM)}{\lambda_0} \right] = 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{(SM)}{\lambda_0} \right] - \phi(S)$$

2. Approximation scalaire

En un point M de l'espace, peuvent se superposer (interférer) plusieurs ondes. D'après la linéarité des équations de Maxwell, le champ résultant est la somme vectorielle des champs de chaque onde : on doit à priori faire une somme vectorielle.

Cependant dans un grand nombre de situations, la réponse d'un détecteur peut être déterminée au moyen d'un modèle simplifié, c'est l'approximation scalaire de la lumière :

Le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) d'une onde **lumineuse** monochromatique émise par un point source S est décrit par une **grandeur scalaire unique** (au lieu de 6) appelée vibration lumineuse en M à t :

$$a(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \phi(M)) = A(M) \cos(\omega t - [\phi(S) + 2\pi \frac{(SM)}{\lambda_0}])$$

Ceci constitue une approximation (sauf dans le cas d'une OEMPPM polarisée rectilignement), mais on admettra qu'elle est justifiée dans tous les cas étudiés au programme.

3. Surfaces d'onde

On appelle surface d'onde à l'instant t , un ensemble de points où, à l'instant t , la phase de l'onde lumineuse est la même, c'est-à-dire, pour une onde émise par un point S :

$$\text{surface d'onde passant par } M_0 \text{ à } t : \text{ ensemble des points } M \text{ tels que } (SM) = c \cdot t = (SM_0)$$

(ou encore de même état vibratoire que M_0 , de même phase que M_0).

a) Cas des milieux homogènes

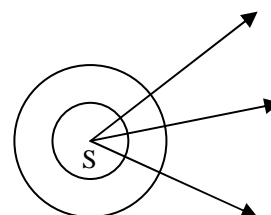
❖ Au voisinage d'une source ponctuelle

Les rayons lumineux sont des demi-droites issues de S (propagation rectiligne de la lumière).

Le chemin optique entre S et M s'écrit : $(SM) = n \cdot SM$

Les surfaces d'onde sont des sphères de centre S .

On constate sur cet exemple que (nous en admettrons la généralisation) :



les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde : **théorème de Malus**

❖ cas d'une source « à l'infini » : onde plane.

Les rayons lumineux sont des droites parallèles à une direction fixe \vec{u} . Les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à \vec{u} (théorème de Malus).

b) Cas des milieux inhomogènes : théorème de Malus et stigmatisme

Rappel : un système optique Σ est stigmatique pour un couple de points (A, A') (ou encore, A' est l'image géométrique de A par le système optique Σ) si et seulement si tout rayon émis par A émerge du système Σ en passant par A' .

Considérons un point A et son image géométrique A' par le système Σ .

En se plaçant suffisamment près de A' , on peut supposer que le milieu est homogène; les rayons lumineux sont donc des droites se coupant en A' . D'après le théorème de Malus (admis), les surfaces d'onde au voisinage de A' sont des sphères de centre A' , puisqu'elles sont perpendiculaires aux rayons lumineux et que les rayons se coupent en A' .

Les surfaces d'onde étant aussi caractérisées par $(AM) = c \cdot t$ (source A), on déduit que $(AA') = c \cdot t$: indépendant du rayon lumineux. On a donc établi une condition nécessaire de stigmatisme, et nous admettrons qu'elle est suffisante :

Un point A' est l'image géométrique d'un point A à travers un système optique (Σ) ssi le chemin optique (AA') est indépendant du rayon lumineux traversant Σ .

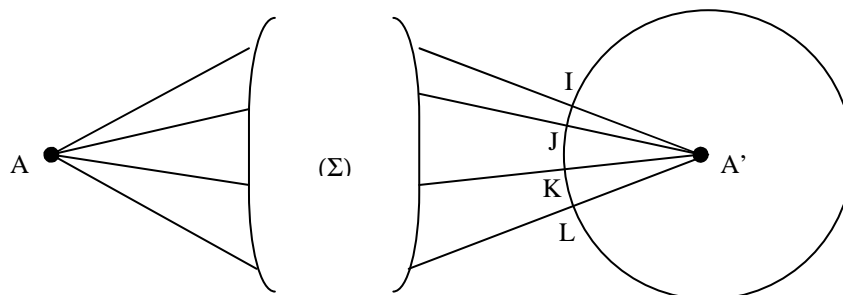
$$(IA') = (JA') = (KA') = (LA')$$

et

$$(AI) = (AJ) = (AK) = (AL)$$

donc quelque soit le rayon

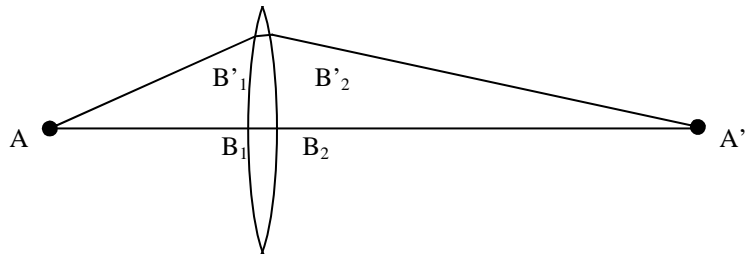
$$(AA') = c \cdot t$$



Cas particulier où Σ est une lentille mince : $(AA')=cst$

En particulier : $(AB_1B_2A') = (AB'_1B'_2A')$

le chemin optique est le même pour le rayon qui frappe la face d'entrée sur l'axe optique ou pour tout autre rayon (les longueurs des segments ne sont en revanche pas égales).



A voir : Cas d'un point objet dans le plan focal objet de la lentille : au-delà de la lentille, les surfaces d'onde sont des plans

4. notation complexe

$a(M, t) = \Re\{ \underline{a}(M, t) \}$ avec $\underline{a}(M, t) = A(M)e^{j(\omega t - \varphi(M))} = \underline{A}(M)e^{j\omega t}$ où $\underline{A}(M) = A(M)e^{-j\varphi(M)}$

$\underline{a}(M, t)$ est la représentation complexe de la vibration lumineuse monochromatique $a(M, t)$.

$\underline{A}(M)$ est l'amplitude complexe de la vibration lumineuse monochromatique $a(M, t)$.

5. éclairement=intensité lumineuse

L'optique s'appuie de façon essentielle sur l'expérience : compte tenu des fréquences élevées, (10^{15} Hz) un détecteur d'ondes lumineuses ne peut être sensible qu'à une moyenne temporelle.

Un détecteur linéaire qui serait sensible à la moyenne temporelle de a , $\langle a(M, t) \rangle$, serait inefficace puisqu'elle est nulle.

On utilise donc en optique des détecteurs quadratiques, sensibles à $\langle a^2(M, t) \rangle$ tels que photopiles, photodiodes, photorésistances, photomultiplicateurs... L'œil est aussi un récepteur quadratique.

Ces récepteurs sont en fait sensibles à la puissance **électromagnétique** moyenne frappant l'unité de surface, c'est-à-dire au flux du vecteur de Poynting moyen (dont on sait qu'il est proportionnel au carré de l'amplitude du champ électrique pour une OEMPPM).

On fixe arbitrairement la constante multiplicative : on appelle

$$\boxed{\text{éclairement ou intensité lumineuse en } M : I(M) = 2 \langle a^2(M, t) \rangle}$$

Le facteur 2, arbitraire, permet de simplifier l'expression de l'éclairement en fonction de l'amplitude $A(M)$ d'une onde :

avec $a(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$:

$$\boxed{I(M) = A^2(M)}$$

Soit, avec les représentations complexes :

$$\boxed{I(M) = |\underline{A}(M)|^2 = \underline{A}(M) \cdot \underline{A}^*(M)}$$

Rq : Cette définition revient à prendre (arbitrairement, pour simplifier les calculs) la constante $c\epsilon_0/2$ de l'intensité énergétique pour une OEMPPM polarisée rectilignement, égale à 1.

II. Généralités sur les interférences lumineuses

1. Postulat fondamental

En un point M recevant deux ondes, la vibration lumineuse est la somme des vibrations lumineuses correspondant à chacune :

$$\boxed{a(M,t)=a_1(M,t)+a_2(M,t)}$$

Remarque : ceci provient de la linéarité des équations de Maxwell. **Attention**, ce sont les vibrations lumineuses qui s'ajoutent et non les intensités. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, $E_x = E_{1x} + E_{2x}$, i.e. $a=a_1+a_2$ mais à priori $E^2 \neq E_1^2 + E_2^2$, ie $I \neq I_1 + I_2$

2. Phénomène d'interférences

Soit deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , monochromatiques, de pulsations respectives ω_1 et ω_2 .

Soit un point M, « recevant » les deux ondes. La vibration lumineuse en M est d'après le postulat fondamental :

$$a(M, t) = a_1(M, t) + a_2(M, t) \text{ avec } a_1(M,t)=A_1\cos(\omega t-\varphi_1(M)) \text{ et } a_2(M,t)=A_2\cos(\omega t-\varphi_2(M))$$

L'éclairement en M est donc (on suppose les amplitudes A_1 et A_2 indépendantes de M) :

$$I(M) = 2 \langle a^2(M, t) \rangle \quad \text{Avec}$$

$$= 2 \langle a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = 2 \langle a_1^2 \rangle = A_1^2 \quad \text{éclairement que produirait en M la source } S_1 \text{ seule} \\ I_2 = 2 \langle a_2^2 \rangle = A_2^2 \quad \text{éclairement que produirait en M la source } S_2 \text{ seule} \\ T(M) = 4 \langle a_1a_2 \rangle \quad \text{terme d'interférences} \end{array} \right.$$

$$= 2 \langle a_1^2 \rangle + 2 \langle a_2^2 \rangle + 4 \langle a_1a_2 \rangle$$

$$= I_1 + I_2 + T(M)$$

La plupart du temps, le terme $T(M)$ est nul, et l'intensité en M est : $I(M)=I_1+I_2=\text{cst}$: elle est indépendante de M. Dans ces cas, l'éclairement est uniforme, égal à la somme des éclairagements que produirait chacune des sources si elle était seule : c'est ce qui se passe la plupart du temps, quand aucune précaution particulière n'est prise.

Cependant, dans certaines conditions particulières (cf. paragraphe suivant), le terme $T(M)$ n'est pas identiquement nul. La théorie ondulatoire de la lumière prévoit qu'alors, on a un éclairage non uniforme ($I_1+I_2+T(M)$ dépend de M) : c'est le phénomène d'interférences : en certains points de l'espace on peut avoir un éclairage supérieur à I_1+I_2 , somme des éclairagements obtenus avec chaque source seule, en d'autres points, on peut même avoir un éclairage nul « lumière+lumière =obscurité ».

Nous allons voir que les conditions à remplir pour observer des interférences sont assez draconiennes. Si elles ne sont pas remplies, comme dans la grande majorité des cas, alors $T(M)=0$ et $I=I_1+I_2$ uniforme.

3. Conditions d'interférences

Le terme d'interférence s'écrit :

$$T(M)=4 \langle a_1a_2 \rangle = 4A_1A_2 \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

$$\text{Or } \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$T(M)=2A_1A_2 \{ \langle \cos([\omega_1 + \omega_2]t - [\varphi_1(M) + \varphi_2(M)]) \rangle + \langle \cos([\omega_1 - \omega_2]t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle \}$$

Or la moyenne temporelle de $\cos(\Omega t - \beta)$ est nulle sauf pour $\Omega=0$ (il s'agit d'une moyenne sur le temps de réponse d'un détecteur, lequel est très grand devant les périodes des vibrations lumineuses).

$$\langle \cos(\Omega t - \beta) \rangle = 0 \text{ sauf pour } \Omega=0$$

Le premier terme est donc toujours nul et le second n'est non nul que si les pulsations des deux ondes sont égales. On déduit une première condition de cohérence :

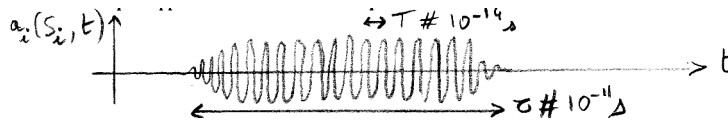
$$\boxed{\text{Deux ondes donnant lieu à des interférences ont nécessairement la même pulsation.}}$$

Le terme d'interférence s'écrit alors :

$$T(M) = 2A_1 A_2 \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle = 2A_1 A_2 \langle \cos\left(\varphi(S_2) - \varphi(S_1) + 2\pi \frac{(S_2 M) - (S_1 M)}{\lambda_0}\right) \rangle$$

La condition trouvée précédemment est nécessaire mais non suffisante : l'expérience montre que deux ondes émises par deux sources ponctuelles monochromatiques, de même fréquence mais indépendantes, ne donnent pas d'interférences.

Pour comprendre, il faut revenir au processus d'émission de la lumière par les atomes. La lumière résulte de la désexcitation d'atomes. Un atome n'émet pas une onde purement sinusoïdale pendant une durée infinie mais émet des trains d'ondes de durée finie, et ce, à des instants aléatoires par rapport aux trains d'ondes suivants ou par rapport aux trains d'onde émis par l'atome voisin.



La durée moyenne d'un train d'onde est de l'ordre de $\tau \approx 10^{-11}$ s pour une lampe spectrale classique : elle est grande devant la période $T \approx 10^{-14}$ s des ondes lumineuses, mais petite par rapport au temps de réponses τ_D des détecteurs ($\tau_D > 10^{-6}$ s).

$$\text{Or, } \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \varphi(S_2) - \varphi(S_1) + 2\pi \frac{(S_2 M) - (S_1 M)}{\lambda_0}$$

A l'échelle du temps de réponse des détecteurs, le déphasage en M entre deux ondes émises par deux atomes différents varie aléatoirement par le terme $\varphi(S_2) - \varphi(S_1)$ et la valeur moyenne $2A_1 A_2 \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle$ est nulle, c'est-à-dire qu'on n'obtient pas d'interférences.

On déduit une deuxième condition de cohérence :

Deux ondes donnant lieu à des interférences doivent être issues d'une même source ponctuelle monochromatique S.

Pour observer le phénomène d'interférence en M, il est nécessaire qu'à partir d'un point source unique S, les deux ondes suivent des trajets différents entre S et le point d'observation M : un train d'onde émis par la source S parvient au point d'observation M par deux trajets différents $(SM)_1$ et $(SM)_2$.

$$\text{On a : } \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2\pi \frac{(SM)_2 - (SM)_1}{\lambda_0} = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} (\tau_{SM_2} - \tau_{SM_1})$$

Le décalage temporel ne doit pas être supérieur à la durée τ du train d'ondes, sinon le phénomène d'interférences ne peut avoir lieu car deux trains d'ondes successifs émis par la même source sont sans aucun lien de phase (la moyenne temporelle sur le temps de réponse du détecteur du $\cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$ serait nulle).

On doit donc avoir : $|(\tau_{SM})_2 - (\tau_{SM})_1| < \tau$, c'est-à-dire en multipliant membre à membre par c : $|(SM)_2 - (SM)_1| < c\tau = \ell^*$

$\ell^* = c\tau$ est la distance dont se propage l'onde en moyenne pendant la durée d'un train d'onde. Elle est appelée longueur de cohérence de la source. Elle est de l'ordre de quelques mm pour une lampe spectrale usuelle. Pour un laser, elle est très supérieure.

On déduit une troisième condition de cohérence :

Deux ondes issues d'une même source ponctuelle monochromatique ne donnent lieu à des interférences que si la différence de marche est inférieure à la longueur de cohérence $\ell^* = c\tau$ de la source.

$$T(M) = 4 \langle a_1 a_2 \rangle = 2A_1 A_2 \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle = 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) = 2A_1 A_2 \cos\left\{2\pi \frac{(SM)_2 - (SM)_1}{\lambda_0}\right\}$$

conclusion : Soit 2 ondes lumineuses.

❖ Les deux ondes peuvent donner lieu au phénomène d'interférences si elles sont cohérentes, i.e. si en tout point M de la zone d'observation, les conditions suivantes sont vérifiées :

Les deux ondes sont issues d'une même source ponctuelle monochromatique et la différence de marche en M est inférieure à la longueur de cohérence de la source. On a alors :

ondes cohérentes : $I(M) = I_1 + I_2 + T(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$: observation d'interférences

- ❖ Si l'une quelconque des conditions ci-dessus n'est pas vérifiée, les deux ondes sont incohérentes. Dans ce cas, $T(M)$ est identiquement nul, les éclairagements sont additifs :

ondes incohérentes : $I(M) = I_1 + I_2$: pas d'interférence

4. Etude des interférences

a) Calcul de l'éclairement par les complexes

En pratique, après avoir vérifié les conditions de cohérence, on utilise la notation complexe pour retrouver l'expression de l'éclairement (plutôt que $I(M) = 2 \langle a^2(M, t) \rangle$).

$$I(M) = \underline{A} \cdot \underline{A}^*$$

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A_1 e^{-j\varphi_1(M)} + A_2 e^{-j\varphi_2(M)}$$

$$I(M) = (A_1 e^{-j\varphi_1(M)} + A_2 e^{-j\varphi_2(M)}) (A_1 e^{+j\varphi_1(M)} + A_2 e^{+j\varphi_2(M)})$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{-j\varphi_1(M)} e^{+j\varphi_2(M)} + e^{+j\varphi_1(M)} e^{-j\varphi_2(M)})$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[\varphi_2(M) - \varphi_1(M)]$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[\varphi_2(M) - \varphi_1(M)]$$

cas usuel : $I_1 = I_2$ notée I_0 : $I(M) = 2I_0 (1 + \cos[\varphi_2(M) - \varphi_1(M)])$

b) Définitions

Dans le cas général ou dans le cas usuel, l'éclairement peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} I(M) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M)) \\ I(M) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right) \\ I(M) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi p(M)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(M) &= 2I_0 \{1 + \cos(\Delta\varphi(M))\} \\ I(M) &= 2I_0 \left\{1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right)\right\} \\ I(M) &= 2I_0 \{1 + \cos(2\pi p(M))\} \end{aligned}$$

$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2\pi \frac{(SM)_2 - (SM)_1}{\lambda_0}$ **déphasage** en M entre les ondes provenant de S par deux chemins différents

(en radians)

$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1$ **différence de marche** ddm (ou différence de chemin optique) en M entre les deux ondes (en m)

$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ **ordre d'interférence** en M: nombre de longueurs d'onde λ_0 comprises dans δ (ou nombre de fois 2π

dans $\Delta\varphi$) (sans dimension)

Remarque : $p(M) = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi(M) = 0 \Leftrightarrow \delta(M) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(M) = \varphi_2(M) \Leftrightarrow (SM)_1 = (SM)_2$

$p(M) = 1 \Leftrightarrow \Delta\varphi(M) = 2\pi \Leftrightarrow \delta(M) = \lambda_0$

$p(M) = 2 \Leftrightarrow \Delta\varphi(M) = 4\pi \Leftrightarrow \delta(M) = 2\lambda_0$

$$p(M)=k \Leftrightarrow \Delta\varphi(M)=k2\pi \Leftrightarrow \delta(M)=k\lambda_0$$

Remarque : ces trois grandeurs $\Delta\varphi(M)$, $\delta(M)$ et $p(M)$ font intervenir une différence. Cependant, le cosinus étant une fonction paire, le terme d'interférences $T(M)$ (comme bien sûr les phénomènes observés) sont indépendants de l'ordre choisi dans cette différence. On peut donc effectuer la différence dans l'ordre le plus pratique, mais il faut préciser clairement son choix et rester cohérent pour les trois grandeurs $\Delta\varphi(M)$, $\delta(M)$ et $p(M)$.

III. Etude de quelques dispositifs réalisant des interférences non localisées

1. Dispositif des trous d'Young

Nous allons l'étudier en détail à cause de son importance historique et également parce qu'il constitue le prototype de nombreux autres dispositifs.

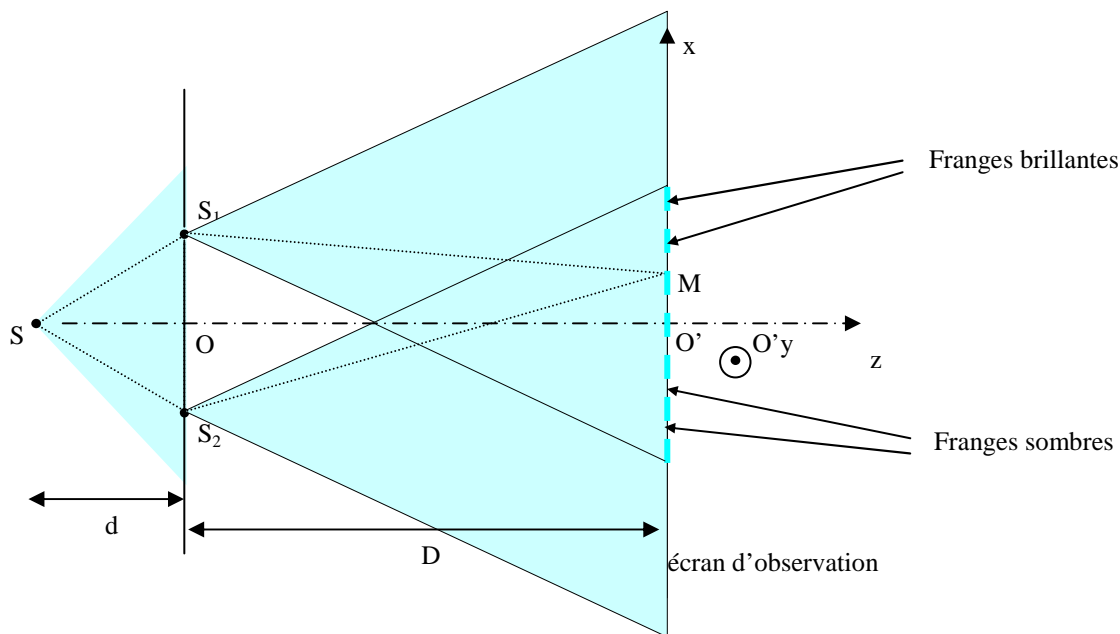
a) Description

Sur le trajet de la lumière entre la source ponctuelle S et le point d'observation M , on dispose un écran opaque percé de deux trous fins.

On admet provisoirement, que ces trous, s'ils sont suffisamment fins diffractent la lumière et sont assimilables à deux sources ponctuelles sphériques cohérentes entre elles, appelées sources secondaires).

On note O le milieu de S_1S_2 , Oz la médiatrice de S_1S_2 perpendiculaire à l'écran où sont percés S_1 et S_2 . Le plan d'observation $O'xy$ est normal à cette médiatrice, O' étant sur la médiatrice, $O'x$ parallèle à S_1S_2 orienté de S_2 vers S_1 .

On étudie d'abord le cas où la source est ponctuelle et sur la médiatrice de S_1S_2 .



b) Calcul de δ

La différence de marche en M est :

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M) = (S_2M) - (S_1M) = n(S_2M - S_1M).$$

Déterminons une expression approchée de la différence de marche $\delta(M)$ en un point $M(x,y,D)$ de l'écran dans le cas où $D \gg a$, $|x| \ll D$ et $|y| \ll D$, c'est-à-dire quand la distance entre les deux trous est très faible devant leur distance à l'écran D et que le point M d'observation est à une distance du centre O très faible devant D .

Les sources secondaires ont comme coordonnées : $S_1(a/2;0;0)$ et $S_2(-a/2;0;0)$. Avec $M(x,y,D)$, on calcule :

$$\left. \begin{aligned} S_1M &= \sqrt{D^2 + y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \approx D \left[1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D^2} \right] \\ S_2M &= \sqrt{D^2 + y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \approx D \left[1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{2D^2} \right] \end{aligned} \right\} S_2M - S_1M = \frac{1}{2D} \left\{ \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right\} = \frac{ax}{D}$$

Rq.: On retrouve ce résultat en écrivant : $S_2M - S_1M = \frac{S_2M^2 - S_1M^2}{S_2M + S_1M} \approx \frac{S_2M^2 - S_1M^2}{2D} = \frac{2ax}{D} = \frac{ax}{D}$

On en déduit la ddm, le déphasage entre les deux ondes et l'ordre d'interférence au point $M(x,y,D)$:

$$\delta(M) = \frac{na_x}{D} ; \Delta\phi(M) = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} = 2\pi \frac{na_x}{\lambda_0 D} = 2\pi \frac{ax}{\lambda D} ; p(M) = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{na_x}{\lambda_0 D} = \frac{ax}{\lambda D}$$

La ddm dépend effectivement du point d'observation M : on a donc un éclaircissement non uniforme sur l'écran.

c) Éclaircissement

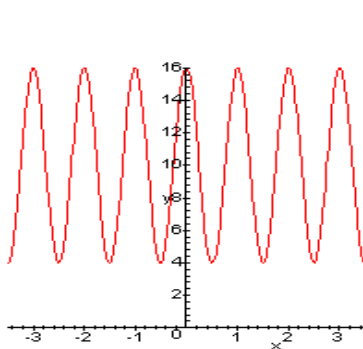
$$\text{Trous non identiques : } I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right]$$

Où I_i est l'éclaircissement en M lorsque la source secondaire S_j ($j \neq i$) est occultée.

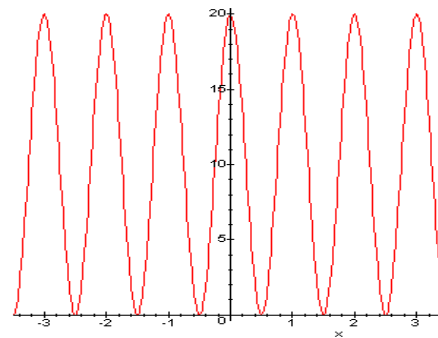
Dans le cas usuel où les deux sources secondaires ont même amplitude (i.e. quand les trous sont identiques), les éclaircissements que chacun donnerait seul, sont égaux : $I_1=I_2$ noté I_0 . L'éclaircissement s'écrit :

$$\text{Trous identiques } I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right]$$

L'éclaircissement est une fonction sinusoïdale de x . Il oscille entre $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ ($4I_0$ dans le cas usuel $I_1=I_2=I_0$) et $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ (0 dans le cas usuel), autour de la valeur moyenne $I_{\text{moy}} = I_1 + I_2$ ($2I_0$ dans le cas usuel).



$I_1=1$ et $I_2=9$



$I_1=I_2=I_0=5$

Dans le cas usuel $I_1=I_2=I_0$, l'éclairement minimum est nul et l'éclairement maximum vaut $4I_0$, Rappelons que si les deux sources n'étaient pas cohérentes, on observerait un éclairement uniforme $2I_0$. Quand les deux sources sont cohérentes, c'est l'éclairement moyen sur l'écran qui vaut $2I_0$, mais en certains points l'éclairement est nul, en d'autres, il vaut $4I_0$ (on a la même énergie lumineuse totale mais non uniformément répartie).

d) Franges d'interférence

Définition : Sur un écran d'observation, une frange d'interférence est un ensemble de points où la différence de marche est la même.

Ainsi une frange d'interférence est un lieu d'égal éclairement puisque $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right)$.

Cas du dispositif des trous d'Young

Une frange d'interférence est caractérisée par $\delta=cst$, ie puisque $\delta=nax/D$ par $x=cst$: les franges d'interférences sont des portions de droites d'équations ici $x=cst$, c'est-à-dire perpendiculaires au segment $[S_1 S_2]$.

On peut définir ainsi les **franges brillantes** et les **franges sombres**.

Les **franges brillantes** sont obtenus lorsque les deux ondes sont en phase à 2π près, c'est-à-dire lorsque la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde dans le vide, ou encore lorsque l'ordre d'interférences est entier. On parle d'interférences constructives.

frange brillante FB : lieu des points où l'éclairement est maximum :

$$FB : I(M) \text{ max} \Leftrightarrow \cos[\Delta\phi(M)]=1 \Leftrightarrow \Delta\phi(M)=2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \delta(M)=k\lambda_0 \Leftrightarrow p(M)=k$$

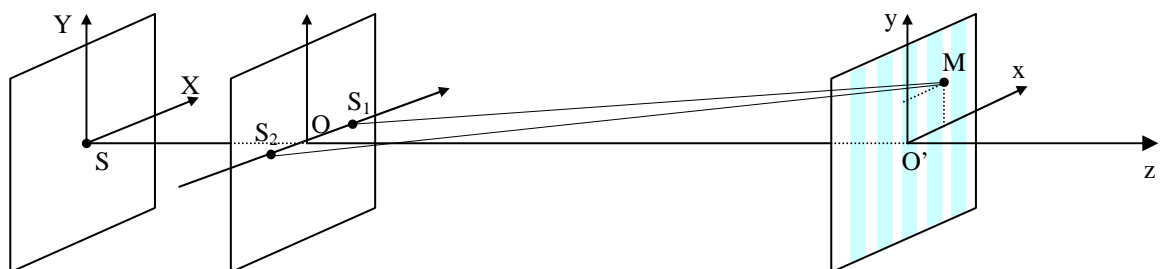
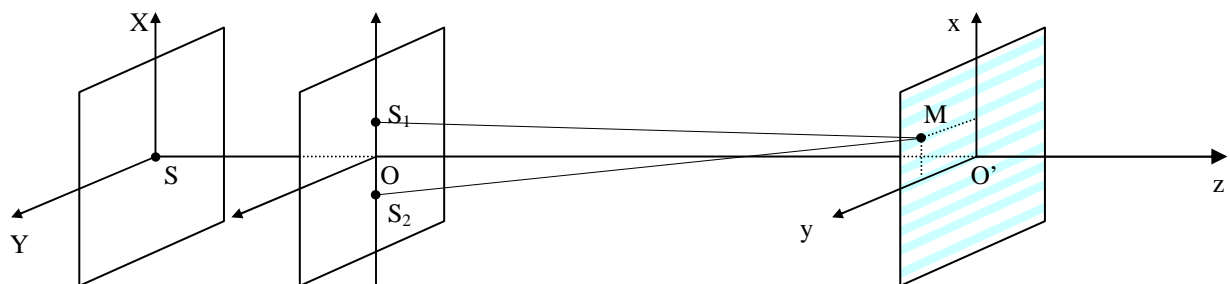
franges brillantes : $\delta = k\lambda_0$: $\frac{nax}{D} = k\lambda_0$: $x_{FB} = k \frac{\lambda_0 D}{na} = k \frac{\lambda D}{a}$

Les **franges sombres**, quant à elles, sont obtenues lorsque les deux ondes sont en opposition de phase, c'est-à-dire lorsque la différence de marche est un multiple impair de la demi longueur d'onde, ou encore lorsque l'ordre d'interférences est demi entier. On parle d'interférences destructives.

frange sombre FS : lieu des points où l'éclairement est minimum :

$$FS : I(M) \text{ min} \Leftrightarrow \cos[\Delta\phi(M)]=-1 \Leftrightarrow \Delta\phi(M)=\left(k + \frac{1}{2}\right)2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \delta(M)=\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \Leftrightarrow p(M)=k + \frac{1}{2}$$

franges sombres $\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$: $\frac{nax}{D} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$: $x_{FS} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{na} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a}$



Interférences (opt 1)

e) Frange centrale

C'est le lieu des points où la différence de chemin optique pour les deux trajets est nulle.

$$\text{Frange centrale : } \delta(x_{FC})=0\text{m} \Leftrightarrow \Delta\varphi(x_{FC})=0\text{rad} \Leftrightarrow p(x_{FC})=0$$

Dans le cas étudié, elle a pour équation : $x_{FC}=0$ (et sa position ne dépend pas de la longueur d'onde utilisée λ_0).

f) interfrange

C'est la distance séparant les centres de deux franges brillantes consécutives (ou deux franges sombres consécutives). Nous avons vu que l'éclairement est une fonction périodique de x . L'interfrange est donc la période de cette fonction $I(x)$.

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left[2\pi \frac{\text{max}}{\lambda_0 D}\right] \text{ de la forme } I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left[2\pi \frac{x}{i}\right]$$

$$\text{interfrange } i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

L'interfrange est donc la variation $|\Delta x|$ de x qui correspond à une variation du déphasage de 2π , ou encore à une variation de l'ordre d'interférence d'une unité, ou encore à une variation de la ddm de λ_0 .

$$i \text{ interfrange} \Leftrightarrow |\Delta\varphi(x+i) - \Delta\varphi(x)| = 2\pi \Leftrightarrow |\delta(x+i) - \delta(x)| = \lambda_0 \Leftrightarrow |p(x+i) - p(x)| = 1$$

g) Contraste

Définition générale : On caractérise la visibilité des franges par le facteur de contraste C (aussi appelé « contraste » ou « facteur de visibilité ») défini par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

où I_{\max} est l'éclairement maximum et I_{\min} l'éclairement minimum.

Le contraste est toujours compris entre 0 et 1.

$$\text{Cas du dispositif des trous d'Young : } C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Cas usuel $I_1=I_2$: le contraste vaut alors 1 : $C=1$.

h) Interférences non localisées

La zone où on peut observer les interférences est relativement étendue; il y a plusieurs positions possibles de l'écran : il suffit qu'il intercepte le champ d'interférence, i.e. l'intersection des faisceaux diffractés par S_1 et S_2 : on parle d'interférences **non localisées**.

i) influence du déplacement de la source perpendiculairement à $S_1 S_2$

$$X_S=0 \text{ mais } Y_S \neq 0$$

On a toujours $SS_1=SS_2$ et la ddm a exactement même expression qu'au b) : la figure d'interférence est donc la même (elle est constituée de droites perpendiculaires à $S_1 S_2$, l'interfrange est inchangée $i=\lambda D/a$ et la frange centrale est toujours sur le plan médiateur de $S_1 S_2$:

Mêmes équations pour les franges, même interfrange, même frange centrale $x_{FC}=0$

Conséquence 1 : utilisation de deux sources primaires S_A et S_B (au lieu d'une seule S), de même longueur d'onde λ .

Chaque point source donne son système de franges :

$$\text{éclairage en M dû à } S_A \text{ seule : } I_A(M) = 2I_{A_0} \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda D}\right) \right]$$

$$\text{éclairage en M dû à } S_B \text{ seule : } I_B(M) = 2I_{B_0} \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda D}\right) \right]$$

Les deux sources étant incohérentes, les éclairagements dus à chacune vont simplement s'ajouter (sans interférences supplémentaires) : $I(M) = I_A(M) + I_B(M) = 2(I_{A_0} + I_{B_0}) \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda D}\right) \right]$

On obtient la même figure d'interférence qu'avec un seul point source, (mêmes équations pour les franges, même interfrange, frange centrale $x_{FC}=0$), mais **plus lumineuse** : l'éclaircement moyen est $2(I_{A_0} + I_{B_0})$ au lieu de $2I_{A_0}$ ou $2I_{B_0}$.

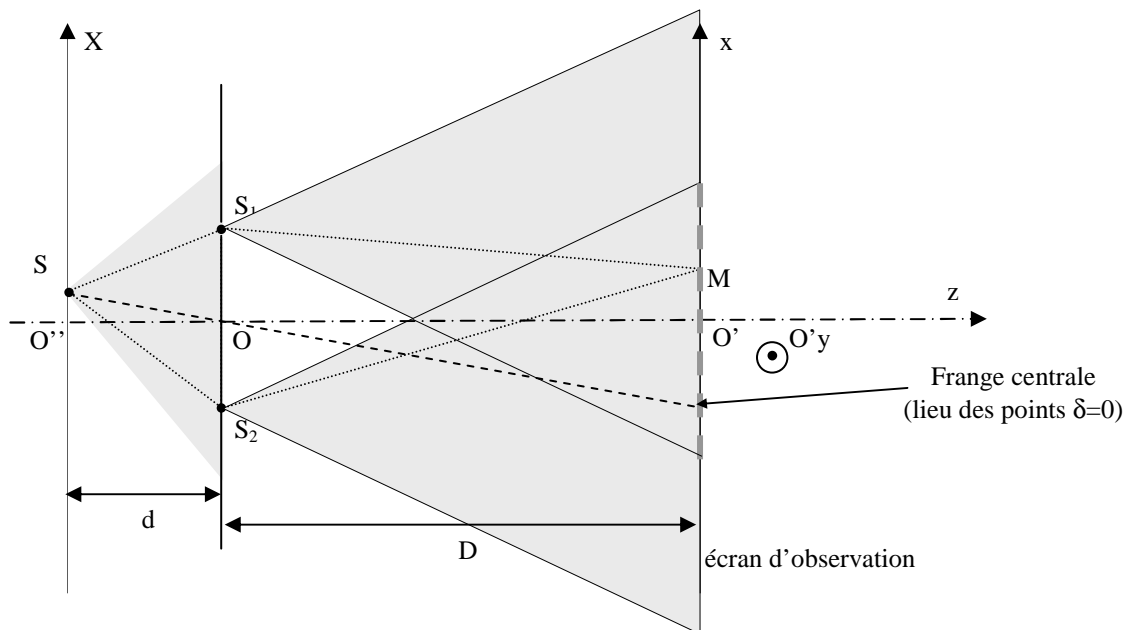
Conséquence 2 : utilisation d'une fente source F perpendiculaire à S_1S_2 .

La fente constitue une juxtaposition d'un très grand nombre de points sources primaires, de même longueur d'onde, mais incohérents entre eux : les éclairagements en un point M de l'écran, dus à chacun de ses points sources s'ajoutent simplement, le terme $\left[1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda D}\right) \right]$ se met en facteur : On obtient la même figure d'interférence qu'avec un seul point source, (mêmes équations pour les franges, même interfrange, frange centrale $x_{FC}=0$), mais **beaucoup plus lumineuse** (l'éclaircement moyen est la somme des éclairagements moyens qui seraient dus à un seul point source).

Remarque : on peut également remplacer les trous S_1 et S_2 par des fentes parallèles à la fente source, on obtient toujours le même système de franges, mais plus lumineux encore: c'est le dispositif des **fentes d'Young**. Cependant la théorie complète relève du chapitre prochain (F_1 et F_2 doivent être parfaitement parallèles à F).

j) influence du déplacement de la source parallèlement à S_1S_2

Soit $O''X$ un axe parallèle à $O'x$, coupant la médiatrice de S_1S_2 en O'' , position primitive de la source S . Soit X_S la nouvelle abscisse de la source S (après déplacement parallèlement à S_1S_2).



Pour calculer la différence de marche, il faut tenir compte cette fois de la contribution non nulle de $(SS_2)-(SS_1)$. La géométrie des triangles S_1S_2S et S_1S_2M étant analogues, le calcul de cette deuxième contribution est identique à celui de la première.

$$S_2M - S_1M = \frac{ax}{D} \quad \text{et} \quad SS_2 - SS_1 = \frac{aX_S}{d}$$

La ddm et l'éclairement en M s'écrivent donc, d étant la distance du plan des trous à la source S, distance supposée grande devant l'écart des trous « a » :

$$\delta(M) = na \left(\frac{x}{D} + \frac{X_S}{d} \right) \quad I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} na \left(\frac{x}{D} + \frac{X_S}{d} \right) \right]$$

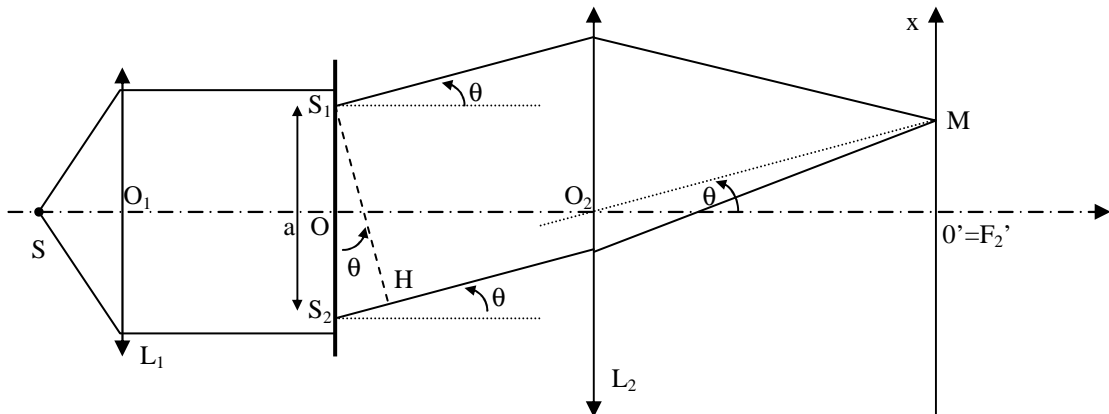
- ❖ Les franges sont toujours d'équation $x = \text{cst}$: ce sont toujours des droites orthogonales à la direction S_1S_2 .
- ❖ L'interfrange est toujours le même : $i = \lambda D/a$.
- ❖ La frange centrale a été traduite par rapport au cas « symétrique » « S en O' », dans le sens opposé au sens de déplacement de la source. Le plan contenant la frange centrale et S passe toujours par le milieu du segment S_1S_2 .

$$x_{FC} = -X_S \frac{D}{d}$$

k) Utilisation de lentilles dans le montage

Bien que le dispositif d'Young décrit au a) soit parfaitement utilisable, on lui préfère parfois le montage suivant avec deux lentilles convergentes, où S est dans le plan focal objet d'une première lentille L_1 et l'écran dans le plan focal image d'une seconde lentille L_2 , l'écran opaque percé des deux trous étant placé perpendiculairement à l'axe optique, juste après L_1 , c'est-à-dire dans un plan de phase de l'onde émise par la source ponctuelle S.

$(SS_1) = (SS_2)$ car S_1 et S_2 sont sur la même surface d'onde émise par S



Soit un point M de l'écran et $\theta = (O_2O', O_2M)$ caractérisant sa position.

En M arrivent deux rayons provenant respectivement de S_1 et S_2 et qui font avec l'axe optique le même angle θ avant la traversée de L_2 (en effet M est dans le plan focal de L_2).

Ces rayons étant parallèles, ils correspondent à des surfaces d'onde planes, perpendiculaires à leur direction commune tel que le plan passant par S_1 et H.

On a donc $(S_2M) - (S_1M) = (S_2H) = nS_2H = n \sin \theta \approx na\theta$ car $(S_1M) = (HM)$

Dans les conditions de Gauss : $\delta \approx na\theta$ et $\theta \approx x/f_2'$:

$$\delta = \frac{na^2 x}{f_2'} \quad I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{na^2 x}{\lambda_0 f_2'} \right)$$

Tout revient à remplacer le « D » du montage sans lentille par la focale f_2' du montage avec lentille.

2. Les miroirs de Fresnel

Le dispositif des miroirs de Fresnel est constitué de deux miroirs plans M_1 et M_2 accolés. Les plans de ces deux miroirs se coupent suivant un axe Δ et font un angle très faible α .

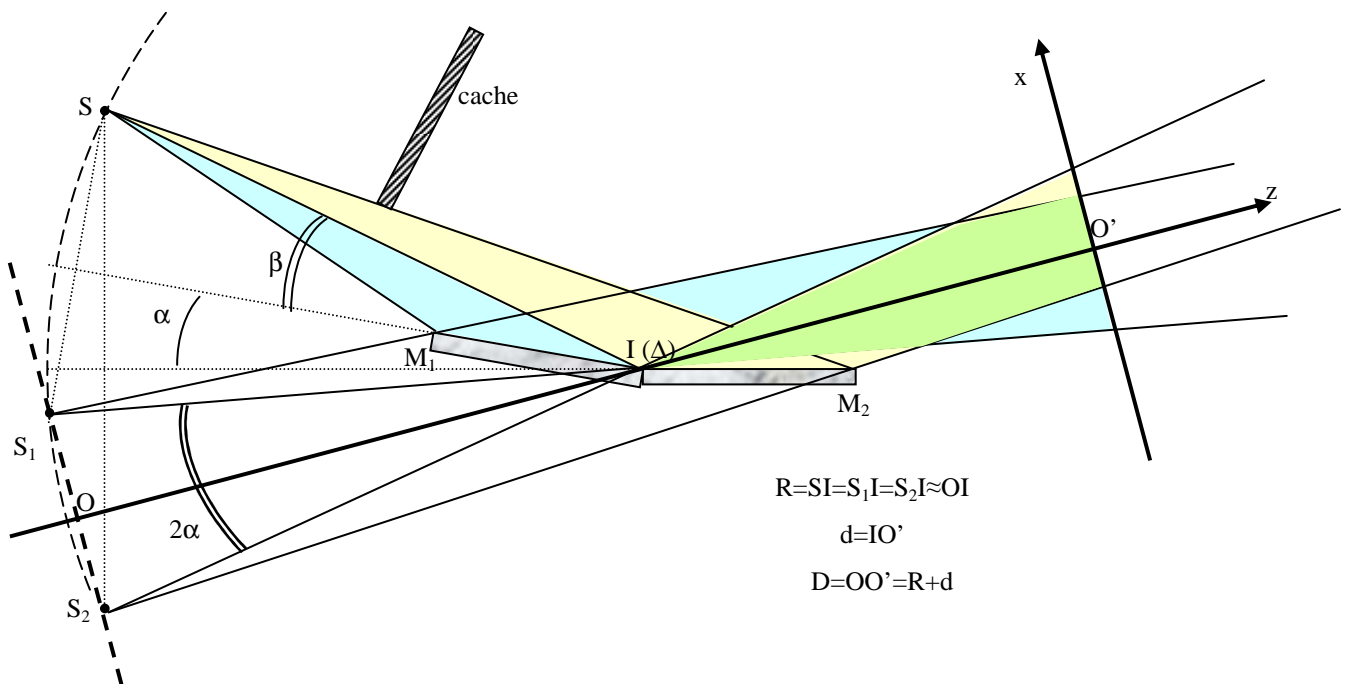
La figure représente le dispositif dans le plan normal à Δ et contenant la source primaire S . Le plan de la figure coupe Δ au point I . La source S est disposée de manière à éclairer les deux miroirs en même temps. Chacun d'eux réfléchit la lumière; les rayons réfléchis semblent donc provenir des sources secondaires S_1 (image de S par M_1) et S_2 (image de S par M_2).

Les points S , S_1 et S_2 sont disposés sur un même cercle de centre I , de rayon $R=SI$. L'ensemble est baigné d'un milieu transparent homogène, en général de l'air.

Les interférences sont observables dans la zone où les deux faisceaux réfléchis se superposent. Cette zone a une certaine étendue : pour cette raison, on parle d'interférences non localisées.

On les observe en général sur un écran perpendiculaire à la médiatrice OIO' du segment S_1S_2 .

Notons R la distance de S à Δ , d la distance entre l'arête Δ et l'écran, D la distance séparant l'écran des sources secondaires ($D=d+R$).



Réflexion sur un miroir

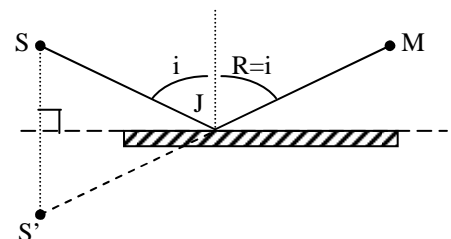
pour un miroir métallique $(SM) = (SJM) = n(SJ + JM) = n(S'J + JM) = nS'M$

pour un miroir de verre $(SM) = n(S'J + JM) + \lambda_0/2 = nS'M + \lambda_0/2$

Finalement

$(SM) = nS'M + \beta\lambda_0/2$ avec $\beta=0$ pour un miroir métallique

$\beta=1$ pour un miroir de verre



Calcul de la ddm :

$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = n(S_2M - S_1M)$

Les deux sources secondaires S_1 et S_2 vibrent en phase (chacune est image de S par réflexion sur un miroir).

On est ramené à la configuration des trous d'Young, le rôle des deux trous étant joué par les images de S par les miroirs, S_1 et S_2 .

Les résultats établis au paragraphe précédent sont utilisables :

En un point M de l'écran, repéré par son abscisse x et son ordonnée y,

$$\delta(M) = \frac{\text{max}}{D} \quad I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[2\pi \frac{\text{max}}{\lambda_0 D} \right]$$

La distance D entre le plan de l'écran et la droite $S_1 S_2$ est ici $D = OI + IO' = R + d$.

La distance séparant les deux sources secondaires S_1 et S_2 est ici $a = 2R \tan \alpha \approx 2R\alpha$

En effet, β étant l'angle entre le rayon SI et le miroir M_1 , α entre les deux miroirs, $(\alpha + \beta)$ entre le rayon SI et le miroir M_2 ,

$$S_1 S_2 = S_1 S_2 - S_1 S_1 = 2(\alpha + \beta) - 2\beta = 2\alpha$$

Au voisinage du centre de l'écran, les franges sont des droites parallèles à l'axe Δ commun des deux miroirs (perpendiculaires à $S_1 S_2$).

Les interférences sont non localisées : la position de l'écran est quelconque à condition qu'elle intercepte la zone de recouvrement des faisceaux provenant de S_1 et S_2 (ie de la réflexion sur M_1 et sur M_2).

Interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda D}{2R\alpha}$$

Ordre de grandeur : D de 1 à 2m, R de l'ordre de 10cm, λ_0 de 500nm. Pour avoir un interfrange i d'au moins 1mm (pour observer à l'œil nu), il faut $\tan \alpha < 0,005$, soit $\alpha < 0,29^\circ = 17'$: l'angle entre les deux miroirs doit être très faible pour pouvoir observer facilement les franges.

La frange centrale correspond à l'ensemble des points pour lesquels δ est nulle : c'est l'axe $O'y$ ($x=0$), ie la droite parallèle à Δ et sur le plan médiateur de $S_1 S_2$.

Influence de l'extension de la source parallèlement à Δ (perpendiculairement à $S_1 S_2$).

Le raisonnement est exactement le même qu'au 1i) : on obtient la même figure qu'avec un seul point source mais beaucoup plus lumineuse.

L'extension de la source primaire parallèlement à l'axe Δ commun aux deux miroirs n'a aucune influence sur la structure de la figure d'interférences.

Elle permet d'améliorer les conditions d'observation en augmentant l'intensité moyenne sur l'écran.

En pratique, on utilise donc plutôt qu'une source ponctuelle, une fente source très fine et parallèle à Δ .

IV. Perte de contraste par manque de cohérence

1. Influence de la largeur de la fente source : manque de cohérence spatiale.

a) Eclairement

Considérons le dispositif des fentes d'Young avec deux fentes d'Young infiniment fines distantes de a .

Par contre la fente source S a une largeur s non négligeable. On peut la considérer comme la juxtaposition de fentes sources élémentaires, **incohérentes entre elles** (les atomes émettant la lumière sont distincts, donc émettent des ondes incohérentes).

Repérons une fente source élémentaire constituant la source réelle large par son abscisse X ; soit dX sa largeur; on fera tendre cette largeur dX vers zéro pour appliquer à cette fente élémentaire les résultats établis pour une fente source infiniment fine.

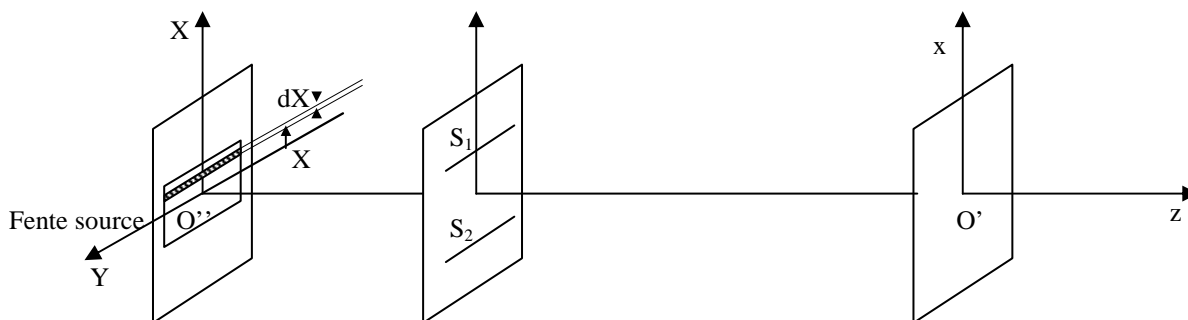
Une telle fente source élémentaire, si elle était seule, donnerait sur l'écran le système de franges d'interférences décrit au paragraphe III.1.j. En un point M de l'écran, l'éclairement $dI(M)$ dû à cette fente source élémentaire est (on se place dans le cas où les deux fentes d'Young S_1 et S_2 sont absolument identiques) :

$$dI(M) = 2dI_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \quad \text{et} \quad \delta(M) = \frac{naX}{D} + \frac{naX}{d}$$

où dI_0 est l'éclairement que donnerait en M la bande source élémentaire considérée, avec une des deux fentes d'Young bouchée.

Les interfranges correspondant aux différentes fentes sources élémentaires vont être identiques : $i = \lambda D/a$, en revanche leurs franges centrales $x_{FC} = -XD/d$ vont être continûment décalées. Ce phénomène va diminuer la visibilité du phénomène d'interférence, voire l'annuler complètement si la fente est trop large.

On suppose la fente source uniformément éclairante : l'éclairement élémentaire dI_0 correspondant à une fente source élémentaire (X, dX) est indépendant de X et proportionnel à sa largeur élémentaire dX : $dI_0 = I_0 \frac{dX}{s}$ où I_0 est l'éclairement total en M correspondant à la fente source entière (de largeur s) avec une des deux fentes d'Young bouchée.



Les différentes fentes sources élémentaires étant incohérentes entre elles, l'éclairement au point M va être simplement la somme des éclairagements élémentaires $dI(M)$:

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_{\text{fente source}} dI(M) = \int_{\text{fente source}} 2dI_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \\ &= \int_{-s/2}^{s/2} 2 \frac{I_0}{s} dX \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{ax}{D} + \frac{aX}{d} \right] \right) \\ &= 2 \frac{I_0}{s} \left[X + \frac{\lambda d}{2\pi a} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{ax}{D} + \frac{aX}{d} \right] \right]_{-s/2}^{s/2} = 2 \frac{I_0}{s} \left[s + \frac{\lambda d}{2\pi a} \left\{ \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{ax}{D} + \frac{as}{2d} \right] - \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{ax}{D} - \frac{as}{2d} \right] \right\} \right] \end{aligned}$$

Utilisons $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{\lambda d}{\pi a s} \left\{ \sin \left(\pi \frac{a s}{\lambda d} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{a x}{\lambda D} \right) \right\} \right] = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \left(\pi \frac{a s}{\lambda d} \right)}{\pi \frac{a s}{\lambda d}} \cdot \cos 2\pi \frac{a x}{\lambda D} \right]$$

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + V(s) \cdot \cos \left(2\pi \frac{a x}{\lambda D} \right) \right] \quad \text{avec} \quad V(s) = \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{a s}{\lambda d} \right) = \frac{\sin \left(\pi \frac{a s}{\lambda d} \right)}{\pi \frac{a s}{\lambda d}}$$

On retrouve bien l'éclairement pour une fente infiniment fine en faisant tendre s vers 0 : $V=1$.

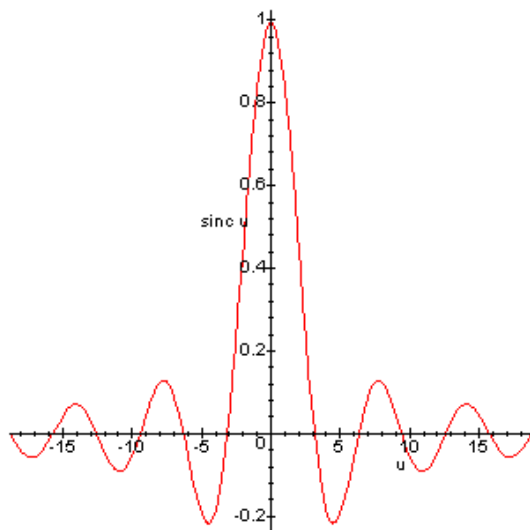
Le terme interférentiel classique en cosinus est donc, pour une fente non infiniment fine, modulé par un facteur $V(s)$ dépendant de la largeur de la fente source.

L'éclairement sur l'écran oscille toujours autour de la valeur moyenne $2I_0$ mais l'éclairement maximum est plus faible que pour une fente source infiniment fine, et l'éclairement minimum n'est plus nul :

Le facteur V fait intervenir une fonction qui intervient souvent en physique : la fonction sinus cardinal; nous allons donc lui consacrer un paragraphe spécial.

b) La fonction sinus cardinal

sinuscardinal



fonction sinus cardinal $\operatorname{sinc}(u) = \sin u / u$

- ❖ Elle est définie sur \mathbb{R} , par continuité en $u=0$: $\operatorname{sinc} 0 = 1$
- ❖ Elle est paire
- ❖ Elle s'annule lorsque son numérateur s'annule et que $u \neq 0$, soit pour $u = m\pi$ où $m \in \mathbb{Z}^*$
- ❖ Elle présente des extrema pour $u \cos u = \sin u$, soit $u = \tan u$. En dehors de la valeur exacte $u=0$, on retiendra les expressions approchées pour les autres extrema :

$m^{\text{ième}}$ extremum non nul sur \mathbb{R}^+ : ($m > 0$)

$$u_m \approx (2m+1) \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{sinc}(u_m) \approx \frac{(-1)^m}{(2m+1) \frac{\pi}{2}}$$

c) Contraste

On rappelle la définition du contraste : $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

Pour une largeur de fente source « s » donnée, sur l'écran, l'éclairement $I(M)$ oscille entre

$$I_{\max} = 2I_0(1+|V|) \text{ et } I_{\min} = 2I_0(1-|V|) . \text{ On déduit donc } C = |V| = \left| \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{as}{\lambda d} \right) \right|$$

Le contraste est donc égal à la valeur absolue du facteur V , $|V|$: il dépend de la largeur s de la source.

Par abus de langage, on appelle quelquefois V « contraste » (on devrait l'appeler contraste algébrique, car il peut varier de -1 à 1).

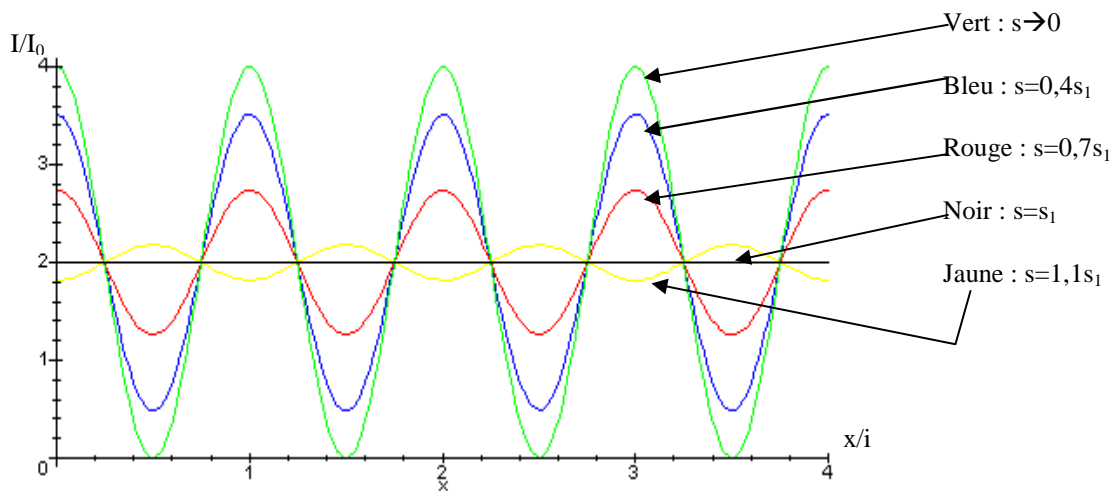
Si la largeur s tend vers zéro, ce qui correspond à une fente infiniment fine, on retrouve un contraste égal à 1 : $V=1$.

d) Première annulation du contraste par élargissement de la fente source.

Si, en partant d'une source très fine pour laquelle le contraste est proche de 1, on ouvre progressivement la fente source, le contraste diminue, la différence d'intensités des franges sombres et brillantes s'estompent. Le contraste s'annule pour la première fois quand l'argument du « sinc » vaut π : pour $\pi as/\lambda d = \pi$

$$\text{Première annulation du contraste obtenue en augmentant la largeur } s \text{ de la fente source : } s_1 = \frac{\lambda d}{a}$$

Si on continue d'ouvrir progressivement la fente source à partir de cette valeur, le contraste redevient non nul, mais faible cependant : les franges sont peu visibles. Le sinus cardinal devenant négatif, on dit quelquefois par abus de langage qu'il y a « inversion du contraste ». Concrètement, les centres des franges qui étaient brillantes pour $s < s_1$, deviennent centres de franges sombres et vice versa.



C'est le cas pour la largeur $1,1s_1$ (courbe jaune) : sur la frange centrale (i.e. en $x=0$), l'éclairement est minimum (inférieur à $2I_0$) et non maximum.

2. Influence de la non mono chromaticité de la source : manque de cohérence temporelle

a) Densité spectrale

Lorsqu'une source n'est pas monochromatique, l'énergie qu'elle émet se répartit sur plusieurs fréquences.

On caractérise cette répartition par une fonction appelée densité spectrale en fréquence de la source, $F_\nu(\nu)$, telle que l'éclairement élémentaire émis par la source dans l'intervalle de fréquence $[\nu, \nu+d\nu]$ s'écrit : $dI_s = F_\nu(\nu)d\nu$.

$$dI_s = F_\nu(\nu)d\nu : \text{intensité émise par la source dans l'intervalle élémentaire de fréquence } [\nu, \nu+d\nu]$$

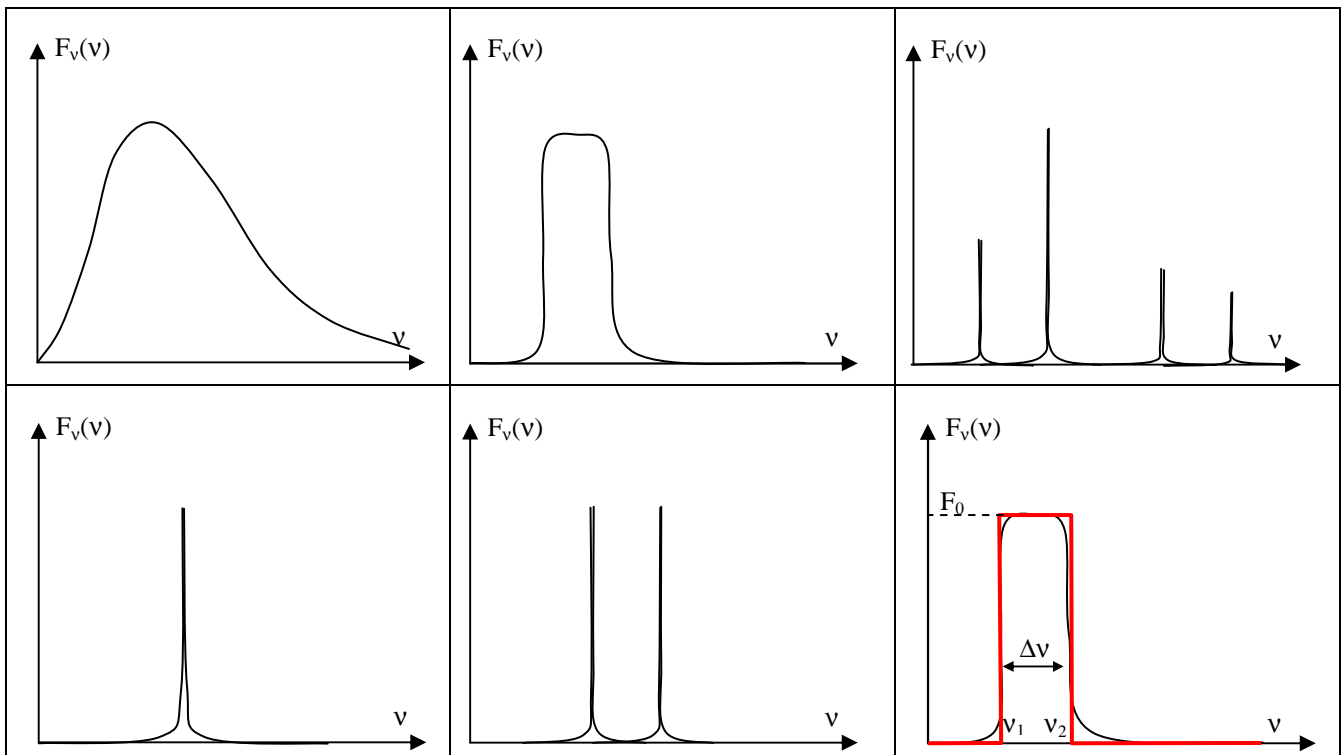
L'intensité lumineuse totale émise par la source est l'aire située sous la courbe $F_\nu(\nu)$:

$$I_s = \int dI_s = \int_0^{+\infty} F_v(\nu) d\nu \quad F_v(\nu) = \frac{dI_s}{d\nu}$$

$F_v(\nu)$ est l'intensité émise par la source par unité d'intervalle de fréquence au voisinage de la fréquence ν .

Les courbes ci-dessous donnent l'allure des densités spectrales dans les cas :

- ❖ d'une source de lumière blanche (ampoule à incandescence)
- ❖ d'une lumière émise par une lampe à incandescence filtrée par un filtre de bonne qualité
- ❖ d'une lampe spectrale à vapeur de mercure
- ❖ d'une lampe spectrale à vapeur de mercure filtré par un filtre vert : $\lambda=546,1\mu\text{m}$
- ❖ d'une lampe à vapeur de sodium : on parle de doublet
- ❖ d'une source de densité spectrale à profil rectangulaire (=modèle)



b) Source non monochromatique de densité spectrale à profil rectangulaire

Lorsqu'on peut isoler, à l'aide d'un filtre par exemple, une raie d'émission d'une lampe à décharge, la raie, quoique fine, n'a jamais une largeur strictement nulle (6^{ème} courbe ci-dessus).

Pour simplifier l'étude, assimilons cette courbe à un profil rectangulaire correspondant à la densité spectrale définie par :

$$\text{si } \nu \in [\nu_1, \nu_2] \quad F_v(\nu) = F_0 \quad \text{sinon } F_v(\nu) = 0$$

Notons $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ la largeur de la raie rectangulaire et $\nu_m = (\nu_2 + \nu_1)/2$ la fréquence centrale, moyenne des fréquences ν_1 et ν_2 .

L'intensité émise par la source dans l'intervalle de fréquence élémentaire $[\nu, \nu + d\nu]$ est alors :

$$dI_s = F_0 d\nu$$

Remarque : Si on intègre sur toutes les longueurs d'onde on obtient : $I_s = F_0 \Delta\nu$, soit $F_0 = I_s / \Delta\nu$.

Lorsqu'on fait tendre dv vers zéro, on peut considérer qu'on est en lumière monochromatique et on peut donc appliquer les résultats du IIII : l'éclairement en un point M de l'écran, dû aux fréquences de cet intervalle élémentaire $[v, v+dv]$, s'écrit

$$dI(M) = 2dI_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right] = 2\beta dv \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right]$$

où dI_0 est l'éclairement en M dû aux fréquences de la bande élémentaire $[v, v+dv]$ quand une des deux fentes d'Young est occultée.

Cet éclairement dI_0 est proportionnel à dI_s , intensité émise par la source dans l'intervalle élémentaire de fréquence $[v, v+dv]$, donc proportionnel à dv sur l'intervalle $[v_1, v_2]$ (nulle en dehors). On a posé $dI_0 = \beta dv$. Précisons la constante de proportionnalité β .

L'éclairement en M dû à toutes les radiations de $[v_1, v_2]$ si une des deux fentes d'Young est occultée, s'écrit :

$$I_0 = \int_{v_1}^{v_2} dI_0 = \int_{v_1}^{v_2} \beta dv = \beta \Delta v ; \text{ on en déduit } \beta = \frac{I_0}{\Delta v} . \text{ On a donc : } dI_0 = \frac{I_0}{\Delta v} dv$$

Par suite, l'éclairement en M dû aux fréquences de la bande élémentaire $[v, v+dv]$ est :

$$dI(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta v} \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right] dv$$

Les différentes radiations de l'intervalle $[v_1, v_2]$ sont **non cohérentes** entre elles puisque de fréquences différentes. L'éclairement résultant en un point M de l'écran $I(M)$ est donc simplement la somme des éclairements élémentaires $dI(M)$ lorsqu'on balaye l'intervalle $[v_1, v_2]$ (on rappelle $\lambda_0 = c/v$):

$$I(M) = \int_{v_1}^{v_2} dI(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta v} \int_{v_1}^{v_2} dv \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{v\delta(M)}{c} \right) \right] = 2 \frac{I_0}{\Delta v} \left[v + \frac{c}{2\pi\delta(M)} \sin \left(2\pi \frac{v\delta}{c} \right) \right]_{v_1}^{v_2}$$

$$= 2 \frac{I_0}{\Delta v} \left\{ v_2 - v_1 + \frac{c}{2\pi\delta(M)} \left[\sin \left(2\pi \frac{v_2\delta(M)}{c} \right) - \sin \left(2\pi \frac{v_1\delta(M)}{c} \right) \right] \right\} \quad \text{Or } \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$I(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta v} \left\{ v_2 - v_1 + \frac{c}{\pi\delta} \left[\sin \left(2\pi \frac{(v_2 - v_1)\delta}{2c} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{(v_1 + v_2)\delta}{2c} \right) \right] \right\} = 2I_0 \left\{ 1 + \frac{\sin \left(\pi \frac{\Delta v \delta}{c} \right)}{\frac{\pi \Delta v \delta}{c}} \cdot \cos \left(2\pi \frac{v_m \delta}{c} \right) \right\}$$

$$I(M) = 2I_0 \left\{ 1 + \sin c \left(\pi \frac{\Delta v \delta}{c} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{v_m \delta}{c} \right) \right\}, \text{ ou encore puisque } \delta = \frac{\text{max}}{D}$$

$$I(M) = 2I_0 \left\{ 1 + \sin c \left(\pi \frac{\Delta v \text{max}}{cD} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{v_m \text{max}}{cD} \right) \right\}$$

On retrouve bien le résultat d'une source (idéale!) parfaitement monochromatique en faisant $\Delta v = 0$

cas fréquent : $\Delta v \ll v_m$

Posons $\lambda_{01} = c/v_1$ et $\lambda_{02} = c/v_2$, $\lambda_{0m} = (\lambda_{01} + \lambda_{02})/2$ et $\Delta\lambda_0 = \lambda_{01} - \lambda_{02}$; on a donc $\lambda_{01} = \lambda_{0m} + (\Delta\lambda_0/2)$ et $\lambda_{02} = \lambda_{0m} - (\Delta\lambda_0/2)$

Dans le cas fréquent $\Delta v \ll v_m$, on peut faire l'approximation suivante, en négligeant les infiniment petits du second ordre :

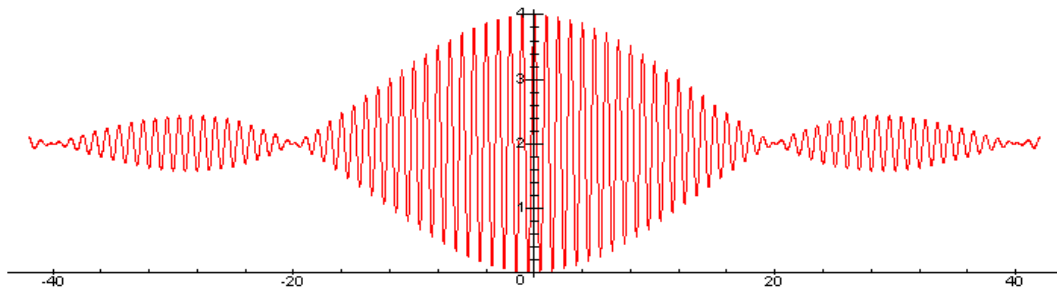
$$\frac{c}{v_m} = \frac{2c}{v_1 + v_2} = \frac{2c}{c/\lambda_{01} + c/\lambda_{02}} = \frac{2\lambda_{01}\lambda_{02}}{\lambda_{01} + \lambda_{02}} \approx \lambda_{0m} \quad \text{et} \quad \Delta v = v_2 - v_1 = \frac{c}{\lambda_{02}} - \frac{c}{\lambda_{01}} = c \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_{0m}^2} = v_m \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_{0m}} \quad : \quad \boxed{\frac{\Delta v}{v_m} = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_{0m}}}$$

Dans l'expression de l'éclairement calculée ci-dessus, la période du cosinus est donc $i = \frac{cD}{v_m na} \approx \frac{\lambda_{0m} D}{na} = \frac{\lambda_m D}{a}$: c'est l'interfrange qu'on aurait avec une source monochromatique de longueur d'onde λ_m , moyenne des deux longueurs d'onde extrêmes.

La période du sinus, numérateur du sinus cardinal, est $L = \frac{2cD}{\Delta v na}$

Le rapport des deux est : $\frac{L}{i} = \frac{2v_m}{\Delta v} = \frac{2\lambda_{0m}}{\Delta\lambda} \gg 1$: sur l'écran, sur des zones où x varie de quelques dizaines de i , le sinus cardinal peut être considéré comme constant et sa valeur absolue est le contraste des franges dans cette zone.

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \text{sinc} \left(\pi \frac{\Delta v na x}{cD} \right) \right|$$



allure de I/I_0 en fonction de x/i pour $L/i=40$

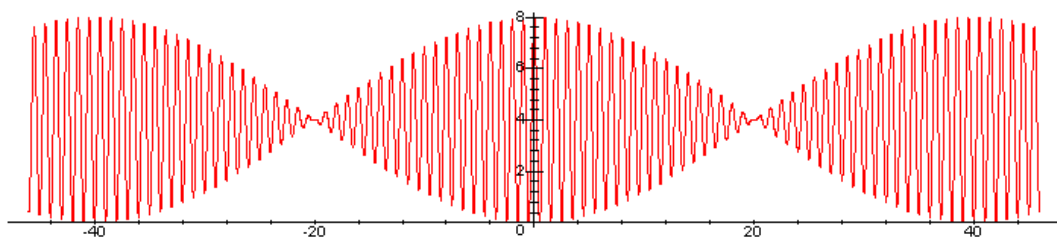
Si la zone d'observation sur l'écran est très étendue, au voisinage de la frange centrale, le contraste vaut un. Quand on s'éloigne, le contraste diminue. Il s'annule pour la première fois quand l'argument du sinus cardinal vaut π , ie quand $x=L/2$.

c) Cas du doublet (dans le cas usuel où $\Delta\lambda \ll \lambda_m$)

Les deux radiations du doublet étant incohérentes, les éclairements dus à chaque composante s'ajoutent :

$$I(M) = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{01}} \right) \right\} + 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_{02}} \right) \right\} = 4I_0 \left\{ 1 + \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \delta(M) \right) \cdot \cos \left(2\pi \delta(M) \left(\frac{1}{\lambda} \right)_m \right) \right\}$$

$$\boxed{I(M) = 4I_0 \left\{ 1 + \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \delta(M) \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_m} \right) \right\}}$$



Allure de I/I_0 en fonction de x/i pour $\lambda_m/\Delta\lambda=40$

On a utilisé : $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, et l'approximation $\left(\frac{1}{\lambda} \right)_m = \frac{1}{\lambda_m}$, justifié par le fait que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$.

On reconnaît le phénomène de battement (somme de 2 signaux de fréquences proches). Le deuxième cosinus est le terme habituel (de période $i=\lambda_m D/a$). Il est modulé par un autre cosinus de période beaucoup plus grande ($\lambda_m/\Delta\lambda \gg 1$)

Le contraste vaut
$$C = \left| \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \delta \right) \right|$$

Quand on s'éloigne de la frange centrale, il s'annule pour la première fois pour : $\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \delta = \frac{\pi}{2}$, soit $\delta_1 = \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda}$

Dans certaines zones, le contraste est important, dans d'autre, il est nul. La mesure de la distance Δx séparant deux zones de contraste nul permet d'atteindre la valeur $\Delta\lambda$: méthode de mesure très précise (permet de mesurer des fractions de nm).

On peut comprendre « qualitativement » cette annulation de contraste en remarquant que chacune des deux longueurs d'onde présentes correspond à des interfranges différents; on a donc superposition de deux figures d'interférence décalées de façon croissante. Quand on s'écarte du centre de la figure, le contraste s'annule pour la première fois quand la ddm δ est telle que le décalage est un demi-interfrange moyen, l'éclairement étant alors quasi uniforme puisque les centres des franges brillantes pour une des deux longueurs d'onde coïncident avec les centres des franges sombres de l'autre...