Chap 7 : Changement de référentiels

Partie 1

I Référentiels Galiléens

I.1 Définition de principe :

◇ **Définition :** (à partir de la 1[e] loi de Newton) Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme.

→ Mais on n'a jamais rencontré un système isolé !
… au mieux, pouvons-nous réaliser un système pseudo-isolé et alors constater que dans certains référentiels, cela conduit à une vitesse constante (du centre de masse G).
Ce qui est vérifié dès lors que $m\,\overrightarrow{a_M}_{/\mathcal{R}}$ s'écrit : $m\,\overrightarrow{a_M}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

I.2 Définition pratique/expérimentale :

◇ **Définition :** (à partir de la 2[e] loi de Newton)
Un référentiel $\mathcal{R}_g$ est galiléen si l'application du **P.F.D.** appliqué à un point M de masse m :

$$m\,\overrightarrow{a_M}_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{F}$$

permet de prévoir une évolution confirmée par l'expérience.

I.3 Propriété de tous les référentiels galiléens

- Soit M (pseudo-) isolé. Supposons qu'on l'étudie dans 2 référentiels galiléens $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$.

Alors le **P.F.D.** donne, dans $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$: $\begin{cases} m\,\overrightarrow{a_M}_{/\mathcal{R}_g} &= \overrightarrow{0} \\ m\,\overrightarrow{a_M}_{/\mathcal{R}'_g} &= \overrightarrow{0} \end{cases}$

Or, nous avons vu dans la leçon précédente (➜ Cf Cours **M8.IV**) que :

$$\overrightarrow{a_M}_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{a_M}_{/\mathcal{R}'_g} + \overrightarrow{a_e}(M) + 2\,\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} \times \overrightarrow{v_M}_{/\mathcal{R}'_g}$$

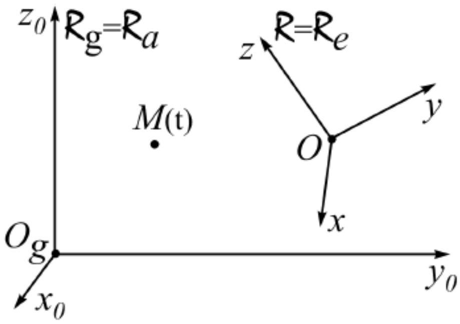
D'où, pour tout point M pseudo-isolé : $\overrightarrow{a_e}(M) + 2\,\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} \times \overrightarrow{v_M}_{/\mathcal{R}'_g} = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} &= \overrightarrow{0} & : \mathcal{R}'_g \text{ et } \mathcal{R}_g \text{ sont en translation l'un par rapport à l'autre.} \\ \overrightarrow{a_e}(M) &= \overrightarrow{0} & : \ldots\text{et cette translation doit être rectiligne uniforme.} \end{cases}$$

▌**Propriété :**
- **Tous** les référentiels galiléens sont en **translation rectiligne uniforme** les uns par rapport aux autres ; et donc par rapport à l'un d'entre eux.
- *Dit autrement :* **Si** un référentiel galiléen est connu, **tous** les autres s'en déduisent par translations rectilignes uniformes.

II P.F.D. et Théorèmes dans un référentiel non galiléen

II.1 Principe fondamental de la dynamique



• Dans un référentiel galiléen, le **P.F.D.** pour $\mathcal{S} = \{M, m\}$ s'écrit :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F}$$

• Soit $\mathcal{R}$ un référentiel **non** galiléen : il possède un mouvement d'entraînement par rapport à $\mathcal{R}_g$ qui conduit à la loi de composition des accélération :$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_C}$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{a_e}(M) + \overrightarrow{a_C}(M)$$

• Dès lors, le **P.F.D.** dans $\mathcal{R}_g$ peut encore s'écrire sous la forme :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F} \quad \Leftrightarrow \quad m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} + m\overrightarrow{a_e}(M) + m\overrightarrow{a_C}(M) = \overrightarrow{F}$$

• On peut donc étudier le mouvement de $\mathcal{S} = \{M, m\}$ dans $\mathcal{R}$ et lui associer une relation fondamentale de la dynamique adaptée à la nature non galiléenne de $\mathcal{R}$ en écrivant :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a_e}(M) - m\overrightarrow{a_C}(M)$$

◇ **Définition :** On définit les **pseudo-forces** ou **forces d'inertie** deux termes homogènes à une force « vraie » :

- la **force d'inertie d'entraînement** : $\overrightarrow{F_{ie}} = -m.\overrightarrow{a_e}(M)$

- la **force d'inertie de Coriolis** : $\overrightarrow{F_C} = -m.\overrightarrow{a_C}(M)$

P.F.D. dans un référentiel non galiléen : Pour un point matériel M, de masse m, étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen (relativement à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$), la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m.\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_C} \quad \text{avec :} \begin{cases} \overrightarrow{F} = \sum_i \overrightarrow{F}_{i\to M} & \text{la résultante des } \textbf{forces « vraies »} \\ \overrightarrow{F_{ie}} = -m.\overrightarrow{a_e}(M) & \text{la } \textbf{force d'inertie d'entraînement} \\ \overrightarrow{F_C} = -m.\overrightarrow{a_C}(M) & \text{la } \textbf{force de d'inertie de Coriolis} \end{cases}$$

II.2 Théorème de l'énergie cinétique

Méthode : On multiplie scalairement par $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ chaque membre du **P.F.D.** appliqué à $\{M, m\}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen :

$$m.\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_C} \longrightarrow m\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{F_{ie}} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{F_C} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$$

On reconnaît la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de M dans $\mathcal{R}$, la puissance de la résultante des forces « vraies »ainsi que celle des forces d'inertie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_{M/\mathcal{R}}^2\right) = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C})$$

Comme $\overrightarrow{F_C} = -2m.\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ est par propriété du produit vectoriel un vecteur toujours orthogonal au vecteur vitesse relative $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, on en déduit que $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 0$ à chaque instant.

Propriété de la force de Coriolis :

- La force d'inertie de Coriolis étant toujours othogonale à la vitesse, sa puissance est nulle. On dit que « **la force de Coriolis ne travaille pas** ».

$$\boxed{\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 0} \xrightarrow{\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}} \boxed{\delta W(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0}$$

- *Dit autrement :* la force de Coriolis ne participe jamais à l'augmentation ou à la diminution de vitesse du point M dans $\mathcal{R}$.

Théorème de la Puissance cinétique dans un référentiel non galiléen : La dérivée temporelle de l'énergie cinétique évaluée dans $\mathcal{R}$ est égale à la puissance des forces qui travaillent dans $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}})} \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) & \text{puissance des forces « vraies »} \\ \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}}) & \text{puissance de la force d'inertie d'entraînement} \end{cases}$$

II.4 Théorème du moment cinétique

Méthode : pour établir le théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen, on dérive par rapport au temps le moment cinétique de M, évalué en O, dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$.

- Ainsi, à partir de $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, on établit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{OM} \times m\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

- Dans le cas le plus général : $\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} - \overrightarrow{v_{O/\mathcal{R}}}$
- **Hyp :** On se place dans le cas particulier où O **est fixe dans** $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \cancel{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}} + \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} + \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_C}$$

Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M, évalué en O, dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$, est égale à la somme des moment en O des forces, en tenant compte des forces d'inertie :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_C}) \quad \text{avec } \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_i}$$