

I Référentiels Galiléens

I.1 Définition de principe :

◇ **Définition :** (à partir de la 1^e loi de Newton) Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme.

→ Mais on n'a jamais rencontré un système isolé !

... au mieux, pouvons-nous réaliser un système pseudo-isolé et alors constater que dans certains référentiels, cela conduit à une vitesse constante (du centre de masse G).

Ce qui est vérifié dès lors que $m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F} = \vec{0}$.

I.2 Définition pratique/expérimentale :

◇ **Définition :** (à partir de la 2^e loi de Newton)
Un référentiel $\mathcal{R}_g$ est galiléen si l'application du **P.F.D.** appliqué à un point M de masse m :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \vec{F}$$

permet de prévoir une évolution confirmée par l'expérience.

I.3 Propriété de tous les référentiels galiléens

- Soit M (pseudo-) isolé. Supposons qu'on l'étudie dans 2 référentiels galiléens $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$.

Alors le **P.F.D.** donne, dans $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$:

$$\begin{cases} m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \vec{0} \\ m \vec{a}_{M/\mathcal{R}'_g} = \vec{0} \end{cases}$$

Or, nous avons vu dans la leçon précédente (→ Cf Cours **M8.IV**) que :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'_g} + \vec{a}_e(M) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'_g}$$

D'où, pour tout point M pseudo-isolé : $\vec{a}_e(M) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'_g} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} = \vec{0} & : \mathcal{R}'_g \text{ et } \mathcal{R}_g \text{ sont en translation l'un par rapport à l'autre.} \\ \vec{a}_e(M) = \vec{0} & : \dots \text{ et cette translation doit être rectiligne uniforme.} \end{cases}$$

Propriété :

- **Tous** les référentiels galiléens sont en **translation rectiligne uniforme** les uns par rapport aux autres ; et donc par rapport à l'un d'entre eux.
- *Dit autrement :* **Si** un référentiel galiléen est connu, **tous** les autres s'en déduisent par translations rectilignes uniformes.

II P.F.D. et Théorèmes dans un référentiel non galiléen

II.1 Principe fondamental de la dynamique

- Dans un référentiel galiléen, le **P.F.D.** pour $S = \{M, m\}$ s'écrit :

$$m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F}$$

- Soit $\mathcal{R}$ un référentiel **non** galiléen : il possède un mouvement d'entraînement par rapport à $\mathcal{R}_g$ qui conduit à la loi de composition des accélérations : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_C}$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{a_e}(M) + \overrightarrow{a_C}(M)$$

- Dès lors, le **P.F.D.** dans $\mathcal{R}_g$ peut encore s'écrire sous la forme :

$$m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F} \Leftrightarrow m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} + m \overrightarrow{a_e}(M) + m \overrightarrow{a_C}(M) = \overrightarrow{F}$$

- On peut donc étudier le mouvement de $S = \{M, m\}$ dans $\mathcal{R}$ et lui associer une relation fondamentale de la dynamique adaptée à la nature non galiléenne de $\mathcal{R}$ en écrivant :

$$m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} - m \overrightarrow{a_e}(M) - m \overrightarrow{a_C}(M)$$

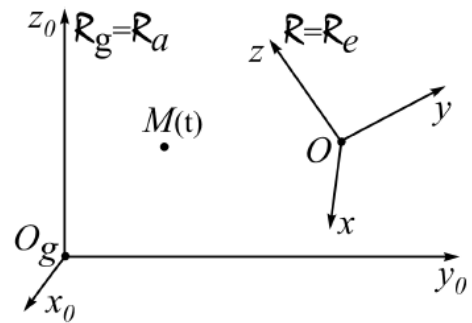
◇ **Définition** : On définit les **pseudo-forces** ou **forces d'inertie** deux termes homogènes à une force « vraie » :

- la **force d'inertie d'entraînement** : $\overrightarrow{F_{ie}} = -m \cdot \overrightarrow{a_e}(M)$

- la **force d'inertie de Coriolis** : $\overrightarrow{F_C} = -m \cdot \overrightarrow{a_C}(M)$

■ **P.F.D. dans un référentiel non galiléen** : Pour un point matériel M , de masse m , étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen (relativement à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$), la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \cdot \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_C} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \overrightarrow{F} = \sum_i \overrightarrow{F_{i \rightarrow M}} & \text{la résultante des forces « vraies »} \\ \overrightarrow{F_{ie}} = -m \cdot \overrightarrow{a_e}(M) & \text{la force d'inertie d'entraînement} \\ \overrightarrow{F_C} = -m \cdot \overrightarrow{a_C}(M) & \text{la force de d'inertie de Coriolis} \end{cases}$$



II.2 Théorème de l'énergie cinétique

Méthode : On multiplie scalairement par $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ chaque membre du **P.F.D.** appliqué à $\{M, m\}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen :

$$m \cdot \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_C} \longrightarrow m \left(\frac{d\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{F_{ie}} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{F_C} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$$

On reconnaît la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de M dans $\mathcal{R}$, la puissance de la résultante des forces « vraies » ainsi que celle des forces d'inertie :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}}^2 \right) = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C})$$

Comme $\overrightarrow{F_C} = -2m \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g}} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ est par propriété du produit vectoriel un vecteur toujours orthogonal au vecteur vitesse relative $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, on en déduit que $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 0$ à chaque instant.

■ Propriété de la force de Coriolis :

- La force d'inertie de Coriolis étant toujours orthogonale à la vitesse, sa puissance est nulle. On dit que « **la force de Coriolis ne travaille pas** ».

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt}} \quad \delta W(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C} \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$$

- *Dit autrement* : la force de Coriolis ne participe jamais à l'augmentation ou à la diminution de vitesse du point M dans $\mathcal{R}$.

■ Théorème de la Puissance cinétique dans un référentiel non galiléen : La dérivée temporelle de l'énergie cinétique évaluée dans $\mathcal{R}$ est égale à la puissance des forces qui travaillent dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) & \text{puissance des forces « vraies »} \\ \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}}) & \text{puissance de la force d'inertie d'entraînement} \end{cases}$$

II.4 Théorème du moment cinétique

Méthode : pour établir le théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen, on dérive par rapport au temps le moment cinétique de M , évalué en O , dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$.

- Ainsi, à partir de $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, on établit :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{OM} \times m \left(\frac{d\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

- Dans le cas le plus général : $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} - \overrightarrow{v_{O/\mathcal{R}}}$
- **Hyp :** On se place dans le cas particulier où O est fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} + \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_C}$$

■ Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M , évalué en O , dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$, est égale à la somme des moment en O des forces, en tenant compte des forces d'inertie :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_C}) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_i}$$