Le sujet comporte deux pages d'énoncé. L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

- Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- On note $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à n coefficients réels. On note I_n la matrice unité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A, égale à la somme des coefficients diagonaux de A : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
- Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique de A est noté χ_A, il est défini par :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

I Réduction des matrices réelles d'ordre 2

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre 2 : $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

I.A – Généralités

I.A.1. Montrer que $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$.

I.A.2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si :

$$(\mathrm{Tr}(A))^2 - 4\det(A) > 0 \quad \text{ou} \quad \exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \lambda_0\, I_2.$$

I.A.3. Donner un exemple de matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ non trigonalisable.

I.B – Théorème de Cayley-Hamilton

I.B.1. Rappeler (sans démonstration) l'énoncé du théorème de Cayley Hamilton pour une matrice quelconque de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

I.B.2. Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton dans le cas où $n = 2$.

I.C – Un exemple : dans cette question, on choisit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

I.C.1. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses deux valeurs propres λ_1 et λ_2 avec $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

I.C.2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une base de $\mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres pour A.

II Calcul du polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On écrit le polynôme caractéristique χ_A de A sous la forme suivante :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\right) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0),$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des réels. On pose

$$X = {}^t\begin{pmatrix} a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

(X est une matrice colonne). Ainsi, calculer χ_A revient à calculer X.

Soit $Z_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne à n coefficients réels.

II.A. Montrer que $A^n Z_0 = a_{n-1}A^{n-1}Z_0 + \cdots + a_1 A Z_0 + a_0 Z_0$.

II.B. En déduire que X est solution d'un système linéaire $\tilde{A}X = B$ où $\tilde{A}$ est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera les colonnes et B est une matrice colonne que l'on précisera.

II.C. Que peut-on dire de ce système linéaire si la famille $(A^{n-1}Z_0, \ldots, AZ_0, Z_0)$ est libre ?

III Calcul approché de valeurs et vecteurs propres

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On conserve les notations de la partie **II** concernant χ_A. Dans cette partie, on suppose que A admet n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ telles que

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|.$$

III.A – Calcul approché de λ_n (première méthode)

On considère l'ensemble F des suites réelles $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} & \text{quelconques} \\ y_{k+n} = a_{n-1}y_{k+n-1} + \cdots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k & \text{pour tout entier } k \geq 0. \end{cases}$$

III.A.1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

III.A.2. Quelle situation du cours retrouve-t-on dans le cas particulier $n = 2$?

III.A.3. Montrer que, pour tout entier $j \in [\![1,n]\!]$, la suite $((\lambda_j)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

Dans la suite, on admet que F est de dimension finie avec $\dim(F) = n$, et que la famille $(((\lambda_1)^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, ((\lambda_n)^k)_{k\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de l'espace vectoriel des suites réelles.

Soit une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à F.

III.A.4. Justifier l'existence d'une famille de n réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ telle que, pour tout entier $k \geq 0$,

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda_j)^k.$$

III.A.5. On choisit $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ de sorte que α_n soit non nul.

a. Donner un équivalent simple de y_k lorsque $k \to +\infty$.

b. En déduire que y_k est non nul à partir d'un certain rang.

c. Montrer que $\dfrac{y_{k+1}}{y_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_n$.

III.A.6. Une fois obtenue λ_n, et si $\lambda_{n-1} \neq 0$, comment peut-on construire une suite qui converge vers λ_{n-1} ? On ne demande pas de justification.

III.A.7 – Illustration sur un exemple

Dans cette question **III.A.7 uniquement**, A désigne la matrice définie à la question **I.C**.

a. Préciser la relation de récurrence vérifiée par les suites de l'espace F associé à A.

b. En prenant $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, écrire des instructions dans le langage associé au logiciel de calcul formel utilisé, permettant de calculer les dix premiers termes de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

c. Calculer ces dix premiers termes et déterminer le plus petit entier naturel k tel que y_{k+1}/y_k soit une valeur approchée de λ_2 à 10^{-1} près.

III.B – Calcul approché de λ_n (deuxième méthode) et d'un vecteur propre associé

III.B.1. Montrer que A est diagonalisable.

Dans la suite, on suppose de plus que $\lambda_n > 0$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une base $(V_1, \ldots, V_n)$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour A avec, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $AV_j = \lambda_j V_j$ et $\|V_j\| = 1$.

Soit $X_0 = x_1 V_1 + \cdots + x_n V_n \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels ; on suppose que $x_n > 0$.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par son premier terme X_0 et : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = AX_k$.

III.B.2. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k en fonction de A, k et X_0 (on justifiera le résultat). Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer les coordonnées de X_k dans la base $(V_1, \ldots, V_n)$.

III.B.3. Donner un équivalent simple de $\|X_k\|$ lorsque $k \to +\infty$. En déduire que $\|X_k\|$ est non nul à partir d'un certain rang.

III.B.4. Montrer que $\dfrac{\|X_{k+1}\|}{\|X_k\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_n$ et que $\dfrac{X_k}{\|X_k\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} V_n$.