Sujet réalisé d'après Centrale TSI 2013

I.A.1. Notons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\chi_\lambda(A) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

I.A.2. $\boxed{\Leftarrow}$ S'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda_0 I_2$, alors A est diagonale, donc diagonalisable.
Le réel $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A)$ est le discriminant de χ_A, d'après la question précédente. S'il est strictement positif, χ_A a deux racines réelles distinctes, donc A a deux valeurs propres distinctes, et sachant que $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, A est diagonalisable.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A est diagonalisable, alors χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) \geq 0$. Si $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$, alors χ_A a une racine double dans $\mathbb{R}$, et donc A possède une valeur propre double dans $\mathbb{R}$, que nous noterons λ_0. La matrice A est diagonalisable donc le polynôme

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) = X - \lambda_0$$

est annulateur de A, d'où $A = \lambda_0 I_2$.

I.A.3. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'a pas de racine réelle, donc A n'a pas de valeur propre (réelle). En particulier, A n'est pas trigonalisable.

I.B.1. Le théorème de Cayley-Hamilton s'énonce ainsi : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, on a $\chi_B(B) = 0$. Le polynôme caractéristique de B est un polynôme annulateur de B.

I.B.2. Avec les notations de la première question, on a

$$\chi_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-a(a+d)+ad-bc & ac+cd-c(a+d) \\ ab+bd-b(a+d) & bc+d^2-d(a+d)+ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque – Du fait de la complexité des calculs, cette méthode n'est pas adaptée pour démontrer le théorème de Cayley-Hamilton en dimension $n \geq 3$.

I.C.1. D'après la question **I.A.1**,

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2).$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

I.C.2. La matrice A est diagonalisable d'après **I.A.2** car $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) = 1 > 0$. Pour déterminer $E_1(A)$, on résout le système $AX = X$. En notant $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, on a les équivalences :

$$AX = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 3y = x \\ -2x + 4y = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 3y.$$

Ainsi, $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)$. De même, pour déterminer $E_2(A)$, on résout le système $AX = 2X$. On a les équivalences :

$$AX = 2X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 3y = 2x \\ -2x + 4y = 2y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Ainsi, $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$. La famille

$$\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

est libre, car constituée de vecteurs propres pour A associés à des valeurs propres distinctes ; de plus elle comporte deux éléments en dimension 2. C'est une base de $\mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres pour A.

II.A. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, donc

$$A^n = a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Par multiplication à droite par Z_0, on obtient le résultat.

II.B. Soit $\tilde{A}$ la matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont respectivement $A^{n-1}Z_0$, …, AZ_0, Z_0, et soit $B = A^n Z_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La relation de la question précédente s'écrit exactement $\tilde{A}X = B$.

II.C. Si la famille $(A^{n-1}Z_0, \ldots, AZ_0, Z_0)$ est libre, $\tilde{A}$ est inversible, donc le système $\tilde{A}X = B$ admet une unique solution.

Remarque – Dans ce cas, théoriquement au moins, on est sûr de pouvoir calculer par cette méthode le polynôme caractéristique de A. En pratique, on pourra calculer X par la résolution du système $\tilde{A}X = B$, par la méthode du pivot de Gauss par exemple. Sa mise en oeuvre sera d'autant plus simple que la matrice $\tilde{A}$ sera simple (idéalement, $\tilde{A} = I_n$). Bien sûr, l'inversibilité de $\tilde{A}$ et sa simplicité peuvent dépendre du choix de Z_0, qui pourra constituer la première étape d'un algorithme basé sur cette méthode.

III.A.1. Soient y et z deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(\lambda y + z)_{k+n} &= \lambda y_{k+n} + z_{k+n} \\ &= \lambda(a_{n-1}y_{k+n-1} + \cdots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k) + (a_{n-1}z_{k+n-1} + \cdots + a_1 z_{k+1} + a_0 z_k) \\ &= a_{n-1}(\lambda y + z)_{k+n-1} + \cdots + a_1(\lambda y + z)_{k+1} + a_0(\lambda y + z)_k\end{aligned}$$

donc $\lambda y + z \in F$. De plus, la suite nulle appartient à F et F est un sous-ensemble de l'espace vectoriel réel des suites réelles. Donc F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

III.A.2. Lorsque $n = 2$, on retrouve le cas des suites vérifiant une certaine relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

III.A.3. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Les valeurs propres de A sont racines de χ_A, donc

$$(\lambda_j)^n = a_{n-1}(\lambda_j)^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_j + a_0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. En multipliant la relation précédente par $(\lambda_j)^k$, on obtient

$$(\lambda_j)^{k+n} = a_{n-1}(\lambda_j)^{k+n-1} + \cdots + a_1(\lambda_j)^{k+1} + a_0(\lambda_j)^k.$$

Ainsi $((\lambda_j)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

III.A.4. D'après ce qui précède, $(((\lambda_1)^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, ((\lambda_n)^k)_{k\in\mathbb{N}})$ est une famille de n éléments de F. De plus, l'énoncé nous apprend que cette famille est libre et que $\dim(F) = n$. Donc $(((\lambda_1)^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, ((\lambda_n)^k)_{k\in\mathbb{N}})$ est une base de F, d'où l'existence (et même l'unicité) de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, qui est le n-uplet des coordonnées de $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans cette base.

III.A.5.a. D'après les hypothèses, $\alpha_n \neq 0$ et $\lambda_n \neq 0$; on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} y_k &= \alpha_n(\lambda_n)^k + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1})^k + \cdots + \alpha_1(\lambda_1)^k \\ &= \alpha_n(\lambda_n)^k \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k + \cdots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k\right). \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse sur A, pour tout $j \in [\![1,n-1]\!]$, $|\lambda_j/\lambda_n| < 1$. On en déduit que le terme entre parenthèses tend vers 1 lorsque $k \to +\infty$, et donc,

$$y_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \alpha_n(\lambda_n)^k.$$

III.A.5.b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(\lambda_n)^k \neq 0$ car $\alpha_n \neq 0$ et $\lambda_n \neq 0$. D'après la question précédente, pour k assez grand, $y_k \neq 0$.

III.A.5.c. Par quotient d'équivalents, les dénominateurs ne s'annulant pas pour k assez grand, on a

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha_n(\lambda_n)^{k+1}}{\alpha_n(\lambda_n)^k} = \lambda_n,$$

d'où le résultat.

III.A.6. On choisit $y_0, \ldots, y_{n-1}$ de sorte que $\alpha_n = 0$ et $\alpha_{n-1} \neq 0$. La suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ correspondant à ce choix est telle que $y_{k+1}/y_k \to \lambda_{n-1}$.

III.A.7.a. D'après **I.C.1**, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ donc $a_1 = 3$ et $a_0 = -2$. La relation de récurrence vérifiée par les suites de l'espace F associé à A est donc : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k.$$

III.A.7.b. On utilise le langage associé au logiciel Maple. La procédure suivante permet de calculer y_k, pour $k \in \mathbb{N}$ donné :

```
> suite:=proc(k)
  local u,v,w,i;
  u:=0; v:=1;
  for i from 1 to k do
    w:=u; u:=v; v:=3*v-2*w;
  od;
  u;
  end proc;
```

On peut alors obtenir les dix premiers termes de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

```
> seq(suite(k),k=0..9);
```

III.A.7.c. Les dix premiers termes de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont : $0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511$. On peut alors évaluer le quotient y_{k+1}/y_k pour $k \in [\![1,8]\!]$ (attention au fait que $y_0 = 0$) :

```
> seq(evalf(suite(k+1)/suite(k)),k=1..8);
```

Le premier quotient y_{k+1}/y_k qui soit une valeur approchée de $\lambda_2 = 2$ à 10^{-1} près est $31/15 = y_5/y_4$, la valeur cherchée est donc $k = 4$.

III.B.1. La matrice A est d'ordre n et possède n valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

III.B.2. Montrons par récurrence que $X_k = A^k X_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, le résultat est vrai car $A^0 = I_n$. Si le résultat est vrai au rang k, alors $X_{k+1} = AX_k = A\,A^k X_0 = A^{k+1}X_0$, d'où le résultat au rang $k+1$ et finalement pour tout $k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, V_j est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_j, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, V_j est vecteur propre de A^k associé à la valeur propre $(\lambda_j)^k$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$X_k = A^k X_0 = x_1(\lambda_1)^k V_1 + \cdots + x_n(\lambda_n)^k V_n.$$

Les coordonnées de X_k dans la base $(V_1, \ldots, V_n)$ sont donc $x_1(\lambda_1)^k, \ldots, x_n(\lambda_n)^k$.

III.B.3. Nous allons montrer que

$$\|X_k\| \underset{k\to+\infty}{\sim} x_n(\lambda_n)^k.$$

Pour cela, on remarque que $x_n\,(\lambda_n)^k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $x_n > 0$ et $\lambda_n > 0$. D'après la question précédente et par homogénéité de la norme, on a alors

$$\frac{\|X_k\|}{x_n(\lambda_n)^k} = \left\|\frac{X_k}{x_n(\lambda_n)^k}\right\| = \left\|\frac{x_1}{x_n}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k V_1 + \ \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k V_{n-1} + V_n\right\|.$$

De façon analogue à la question **III.A.5.a**, on obtient que

$$\frac{x_1}{x_n}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k V_1 + \ \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k V_{n-1} + V_n \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} V_n,$$

et par continuité de la norme,

$$\frac{\|X_k\|}{x_n\,(\lambda_n)^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \|V_n\| = 1.$$

On a donc l'équivalent annoncé.

Sachant que $x_n(\lambda_n)^k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\|X_k\| \neq 0$ pour k assez grand.

III.B.4. D'après ce qui précède, pour k assez grand, le quotient $\dfrac{\|X_{k+1}\|}{\|X_k\|}$ est bien défini et

$$\frac{\|X_{k+1}\|}{\|X_k\|} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x_n(\lambda_n)^{k+1}}{x_n(\lambda_n)^k} = \lambda_n.$$

De plus,

$$\frac{X_k}{\|X_k\|} = \frac{X_k}{x_n(\lambda_n)^k}\,\frac{x_n(\lambda_n)^k}{\|X_k\|}$$

où

$$\frac{x_n(\lambda_n)^k}{\|X_k\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et en reprenant le raisonnement de la question précédente,

$$\frac{X_k}{x_n(\lambda_n)^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} V_n.$$

On en déduit que

$$\frac{\|X_{k+1}\|}{\|X_k\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_n \qquad \text{et} \qquad \frac{X_k}{\|X_k\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} V_n.$$

Remarque – Si $x_n < 0$, on montre de la même façon que

$$\frac{X_k}{\|X_k\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -V_n.$$

Lorsque $x_n \neq 0$, c'est-à-dire, lorsque la donnée initiale X_0 n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(V_1,\ldots,V_{n-1})$, on a donc un moyen numérique de calcul approché de $\pm V_n$, qui est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ_n. On peut l'implémenter de la façon suivante (avec le choix de la norme infini) :

```
> with(LinearAlgebra):
> VecteurPropre:=proc(k,x,y)
  local X0,X;
  X0:=<x,y>;
  X:=A^k.X0;
  X:=X/max(abs(X[1]),abs(X[2]));
  end proc;
```

On observe bien, quel que soit le choix de la donnée initiale telle que $x_2 \neq 0$, la convergence vers $\pm\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \pm V_2$, ce qui est cohérent avec le calcul de la question **I.C.2**.