Problème : Convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soient p, q deux entiers naturels non nuls.
$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes ayant p lignes et q colonnes.
$\mathcal{M}_{p}(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices à coefficients complexes ayant p lignes et p colonnes.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $L \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$
On dira que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L si la suite réelle $(||A_n - L||)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
avec $||\ ||$ une norme quelconque sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.
Dans ce cas L s'appelle la limite de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = L$.

Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_{p}(\mathbb{C})$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_{p}(\mathbb{C})$.

Partie 1: Résultats préliminaires

Soient p, q deux entiers naturels non nuls, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et L, M désignent deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

① **Dire pourquoi la définition de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L ne dépend pas de la norme choisie.**
② **Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On pose $N_\infty(M) = \max\limits_{(i,j)\in[1,p]\times[1,q]} |m_{i,j}|$.**
(a) **Montrer que N_∞ est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.**
(b) **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = (a_{i,j}^{(n)})$ où $a_{i,j}^{(n)}$ désigne le coefficients d'indice (i, j) de A_n et $L = (l_{i,j})$. Montrer que**

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } L \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [1,p]\times[1,q],\quad \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}^{(n)} = l_{i,j}$$

③ **On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers L et M.**
(a) **Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n + B_n = L + M$.**
(b) **Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\alpha \in \mathbb{C}$.**
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n.A_n = \alpha.L$
(c) **Dans cette question, on suppose que $p = q$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n \times B_n = L \times M$.**
④ **Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p}(\mathbb{C})$ telle que**

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}),\quad \lim_{n\to+\infty} A_n X = 0$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$.

Partie 2: Condition nécessaire de la convergence de $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans la suite du problème, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ canoniquement associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_{p}(\mathbb{C})$.
On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
① **Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f.**
(a) **Démontrer que $|\lambda| \leq 1$.**
(b) **On suppose que $|\lambda| = 1$. Démontrer que $\lambda = 1$. On pourra considérer $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|$.**
② **Montrer que $ker(f - Id_{\mathbb{C}^p}) \cap Im(f - Id_{\mathbb{C}^p}) = \{0\}$**

Partie 3: Condition suffisante de la convergence de $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$

On rappelle que f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ canoniquement associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_{p}(\mathbb{C})$.
① **Justifier que f est trigonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base $\mathbb{C}^n$ telle que**

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \alpha_2 & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & \alpha_p \end{pmatrix} \text{ est triangulaire supérieure}$$

avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ sont les valeurs propres complexes de f.
② **On suppose dans cette question que $\forall i \in [1,p]$, $|\alpha_i| < 1$.**
(a) **Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(e_1) = 0$.**
(b) **Montrer par récurrence finie sur $i \in [1,p]$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(e_i) = 0$.**
(c) **En déduire la limite de T^n puis celle de A^n.**

③ **On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres de f deux à deux distincts, avec $m \in \mathbb{N}^*$.**
On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $\forall i \in [2,p]$, $|\lambda_i| < 1$.
On suppose également que $ker(f - Id_{\mathbb{C}^p}) \cap Im(f - Id_{\mathbb{C}^p}) = \{0\}$
(a) **Montrer que $ker(f - Id_{\mathbb{C}^p})$ et $Im(f - Id_{\mathbb{C}^p})$ sont de sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}^p$ stables par f.**
(b) **On note f_1 l'endomorphisme de $Im(f - Id_{\mathbb{C}^p})$ induit par f. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f_1, montrer que λ est une valeur propre de f et que $\lambda \neq 1$.**
(c) **En remarquant que f_1 vérifie les conditions de la question ②, en déduire que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.**
On pourra écrire la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $\mathbb{C}^p = ker(f - Id_{\mathbb{C}^p}) \oplus Im(f - Id_{\mathbb{C}^p})$.

Partie 4: Conclusion et Applications

① **On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres de A deux à deux distincts, avec $m \in \mathbb{N}^*$. Déduire des question précédentes que**

$$(A^n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [1,p],\ |\lambda_i| < 1 \\ \textbf{ou} \\ \lambda_1 = 1,\ \ ker(A - I_p) \cap Im(A - I_p) = \{0\}\ \ et\ \ \forall i \in [2,p],\ |\lambda_i| < 1 \end{cases}$$

② **Déterminer si les suites $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes dans chacun des cas suivantes:**
(a) $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$
(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*****Fin****