SujetI

Qn considère les matrices éléments de $M_3(\mathbb{R})$ suivantes:
A=$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,D=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Partie I

1. Dire pourquoi A est diagonalisable sans calculer le polynôme caractéristique
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et déduire le spectre de A
3. Déterminer une matrice P inversible dont la première ligne est $\frac{1}{3}(2,2,1)$ vérifiant $A = PDP^{-1}$
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$
5. $Calculer$ A^n pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$
6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3\ /\ \ A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$
   Donner les expressions de $a_nb_n$et c_n en fonction de n
   Retrouver le résultat prédédent
7. Qn considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
   $\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = w_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2v_n + 4w_n \end{cases}$. On pose X$_n$ = $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$
   (a) Exprimer X$_{n+1}$ en fonction de A et X$_n$
   (b) En déduire les expressions de $u_nv_n$et w_n en fonction de n

Partie II
On appelle racine carrée de A toute matrrice X vérifiant X$^2 = A$
On appelle commutant de A l'ensemble noté C(A) defini par
$C(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$

1. Montrer que $C(A)$ $s$ous algébre de $M_3(\mathbb{R})$
2. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$
   $on\ pose\ \Delta = PMP^{-1}qu'on\ \ notera\ \Delta =$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que $AM = MA \Longleftrightarrow D\Delta = \Delta D$
   (b) Montrer que $D\Delta = \Delta D \Longleftrightarrow \Delta$ est diagonale
3. Soit B une racine carrée de A
   (a) Montrer que $B \in C(A)$
   (b) Montrer qu 'il existe une matrice B =$P\Delta P^{-1}$
   (c) Montrer que $\Delta^2 = D$

(d) combien la matice A possede t-elle de racines carrées ?Les écrire sous forme $P\Delta_i P^{-1}$ en écrivant explicitement Δ_i

PartieIII

Résoudre le système différentiel (L) : $\begin{cases} x' = 2x + 2y + t \\ y' = 2x + 3y + 2z + 1 \\ z' = 2y + 4z \end{cases}$

$SujetII$

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n un entier naturel non nul
$M_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$ - algébre des matrices carrés d'ordre n a coefficients dans $\mathbb{K}$
$(M_n(\mathbb{K}))^*$ est le dual de $(M_n(\mathbb{K}))$
Pour tout $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$ $E_{i,j}$ désigne la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls sauf celui de la i^{iemme} ligne et à la j^{iemme} colonne valant 1
$E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{l,j})_{1\leq k\leq n, 1\leq l\leq n}$
On rappelle que $\left\{E_{i,j} \ / \ (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2\right\}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$ appelée base cononique de$M_n(\mathbb{K})$ et que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$
Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ $Tr(A)$ désigne la trace de A

A-Préliminaire

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$

   (a) Pour tout $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$ exprimer $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$ dans la base cononique de $M_n(\mathbb{K})$

   (b) Montrer que Si $\forall M \in M_n(\mathbb{K})$ $AM = MA$ alors $\exists\lambda \in \mathbb{K}$ / $A = \lambda I_n$

   (c) Pour tout $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$ exprimer $Tr(E_{i,j}A)$

   (d) Montrer que si $\forall M \in M_n(\mathbb{K})$ $Tr(AM) = 0$ alors $A = 0$

B-Formes linèaies de $M_n(\mathbb{K})$

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$

   (a) .Montrer que $\mathcal{F}_A : \underset{X\to Tr(AX)}{M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}}$ est une forme linèaire de $M_n(\mathbb{K})$

   (b) Etablir que $\mathcal{F} : \underset{A\to\mathcal{F}_A}{M_n(\mathbb{K}) \to (M_n(\mathbb{K}))^*}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels

   (c) Conclure

2. Soit $J \in M_n(\mathbb{K})$ et J non nulle Soit f une forme linèaire non nulle de $M_n(\mathbb{K})$
   On considère l'application $\Phi_f : \underset{X\to f(X)J}{M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})}$

   (a) Vérifier que Φ_f : est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$

   (b) Justifier l'existence d'une unique matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall X \in M_n(\mathbb{K})$ $\Phi_f(X) = Tr(AX)J$

   (c) Comparer $\ker(f)$ et $\ker(\Phi_f)$

   (d) Déterminer $Im(\Phi_f)$ et préciser $rg(\Phi_f)$

   (e) Calculer $Tr(\Phi_f)$ en fonction de A et J

3. On se propose de déterminer les formes linèaires φ de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant
   $\forall(X,Y) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$ $\varphi(XY) = \varphi(YX)$
   Soit $\varphi \in (M_n(\mathbb{K}))^*$ telle que $\forall(X,Y) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$ $\varphi(XY) = \varphi(YX)$

(a) Montrer que $\forall\ (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$ si $i \neq j$ alors $\varphi(E_{i,j}) = 0$

(b) Montrer que $\forall\ (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2\ \varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{j,j})$

(c) Déduire $\exists\lambda \in \mathbb{K}\ /\ \ \forall X \in M_n(\mathbb{K})\ \ \varphi(X) = \lambda Tr(X)$ puis conclure

4. On se propose de montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$

   (a) Soit φ une forme linéaire de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\exists (i,j) \in \{1,2,.....,n\}^2\ /\ \varphi(E_{ij}) \neq 0$
   Montrer que $\exists\alpha \in \mathbb{K}\ \ \varphi(I_n + \alpha E_{ij}) = 0$

   (b) Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ et $\varphi \in (M_n(\mathbb{K}))^*\ \ /\ \ \ker(\varphi) = H$

      i. Si $\exists (i,j) \in \{1,2,.....,n\}^2\ \ i \neq j$ et $\varphi(E_{ij}) \neq 0$
      Prouver $GL_n(\mathbb{K}) \cap H \neq \emptyset$

      ii. Si $\forall (i,j) \in \{1,2,.....,n\}^2\ \ i \neq j\ \ \ \ \varphi(E_{ij}) = 0$
      Justifier l'existence de $i \in \{1,2,.....,n\}$ et $\varphi(E_{iii}) \neq 0$
      Pour tout $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$
      Montrer que $\varphi(A) = \sum\limits_{i=1}^{i=n} a_{i,i}\varphi(E_{i,i})$
      Construire alors $A \in GL_n(\mathbb{K}) \cap H$

      iii. Conclure

C-Etude d'un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$

1. Soient $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $A \in M_n(K)$ et $\Phi_A : \underset{X \to \alpha X + Tr(X)A}{M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})}$

   (a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$

   (b) Montere que $H = \{Y \in M_n(\mathbb{R})\ / Tr(Y) = 0\}$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$

   (c) On se propoe de montrer la sujectivité de Φ_A
   cela revient à résoudre l'equation $\alpha X + Tr(X)A = B$ où B$\in M_n(K)$

      i. On suppose que $Tr(A) \neq 0$

         A. Montrer que $M_n(\mathbb{K}) = H \bigoplus vect(A)$

         B. $X \in M_n(\mathbb{K})$ est noté $X = \lambda_X A + M_X$
         Ecrire les équations satisfaites par M_X et λ_X lorsque X est solution de (1)

         C. Résoudre (1)

      ii. Résoudre (1) lorsque $Tr(A) = 0$

      iii. Conclure

   (d) On se propoe de déterminer les éléments propres de Φ_A
   Soit λ une valeur propre de Φ_A

      i. Montrer $\exists X \in M_n(\mathbb{K})$ et X$\neq 0\ /\ \ Tr(X)(\ \alpha + Tr(A) - \lambda) = 0$

      ii. Déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_A) \subset \{\alpha, \alpha + Tr(A)\}$

      iii. On suppoe que $Tr(A) \neq 0$

         A. Déterminer les éléments propres de Φ_A

         B. Montrer que Φ_A est diagonalisable

      iv. On suppoe que $Tr(A) = 0$

         A. Déterminer les éléments propres de Φ_A

         B. Φ_A est il diagonalisable?