Résumés des cours de S.I.I pour les deux années préparatoires

Filières MPSI et PCSI (Première et deuxième année)

<u>Document préparé par</u> : OUIKASSI
(Recueil de 30 pages)

Merci de m'envoyer, par E-mail, toutes vos remarques et suggestions à l'adresse : kamnit69@gmail.com

N.B : un résumé ne peut s'avérer bénéfique que si le cours entier est assimilé

MECANIQUE

CINEMATIQUE DU SOLIDE ET AUTRES INFORMATIONS UTILES

1. Torseur cinématique :

Le torseur cinématique du solide S par rapport au repère R, réduit au point A est :

$$\{\mathcal{V}_{(S/R)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{(S/R)} \\ \vec{V}_{(A\in S/R)} \end{Bmatrix}_A$$

$\vec{\Omega}_{(S/R)}$: Vecteur vitesse de rotation de S/R ;

$\vec{V}_{(A\in S/R)}$: Vecteur vitesse linéaire du point A dans le mouvement de S/R,

donné par : $\vec{V}_{(A\in S/R)} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_R$ O est un point du repère R.

2. Relation de changement du point de réduction du torseur cinématique :

En un point B, ce torseur devient :

$$\{\mathcal{V}_{(S/R)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{(S/R)} \\ \vec{V}_{(B\in S/R)} \end{Bmatrix}_B \quad \text{avec : } \vec{V}_{(B\in S/R)} = \vec{V}_{(A\in S/R)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}$$

3. Relations de composition de mouvement :

On considère un solide S en mouvement par rapport à un repère R_1 , lui-même en mouvement par rapport à un repère R_0.

$$\vec{\Omega}_{(S/R0)} = \vec{\Omega}_{(S/R1)} + \vec{\Omega}_{(R1/R0)}$$

$$\vec{V}_{(A\in S/R0)} = \vec{V}_{(A\in S/R1)} + \vec{V}_{(A\in R1/R0)}$$

$$\{\mathcal{V}_{(S/R0)}\} = \{\mathcal{V}_{(S/R1)}\} + \{\mathcal{V}_{(R1/R0)}\}$$

⚠ **Attention** : ***pour déterminer le vecteur vitesse*** $\vec{V}_{(M\in S/R)}$***, on ne peut pas dériver si M n'est pas un point fixe de S.***

4. Vecteur accélération :

$$\vec{\Gamma}_{(A\in S/R)} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\right]_R = \left[\frac{d\vec{V}_{(A\in S/R)}}{dt}\right]_R$$

- **Pour deux points liés au même solide :**

$$\vec{\Gamma}_{(B\in S/R)} = \vec{\Gamma}_{(A\in S/R)} + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{d\vec{\Omega}_{(S/R)}}{dt}\right]_R + \left[\vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{BA}\right] \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}$$

⚠ **Attention** : ***pour déterminer un vecteur accélération*** $\vec{\Gamma}_{(M\in S/R)}$***, on ne peut pas dériver si M n'est pas un point fixe de S.***

5. Vecteur vitesse de glissement :

Le vecteur vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_0 en leur point de contact I est : $\vec{V}_{(I\in S1/S0)}$

- Ce vecteur est contenu dans le plan tangent commun au deux solides contenant le point I.

- En l'absence de glissement en I entre ces deux solides, ce vecteur est nul : $\vec{V}_{(I \in S1/S0)} = \vec{O}$

6. Mouvement plan sur plan :

S est en mouvement plan par rapport à R si tous ses points se déplacent dans des plans parallèles à un plan de R.

- **Centre instantané de rotation de S/R (I_{SR})** :

C'est le point $\mathbf{I_{SR}}$ tel que : $\vec{V}_{(I_{SR} \in S/R)} = \vec{O}$

- ***Nota***: à l'instant considéré, S tourne par rapport à R autour de I_{SR}.
- **Détermination graphique de I_{SR}** :

Connaissant les supports des vitesses de deux points A et B de S/R, alors : I_{SR} = ($\perp$ en A au support de $\vec{V}_{(A \in S/R)}$) $\cap$ ($\perp$ en B au support de $\vec{V}_{(B \in S/R)}$)

7. Détermination graphique des vecteurs vitesses dans le cas de mécanisme plan :

- **Première méthode : Equiprojectivité (Fig.1)**

C'est l'exploitation graphique de la relation : $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_{(A \in S/R)} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_{(B \in S/R)}$

Conditions d'utilisation : On doit connaître complètement le vecteur vitesse d'un point d'un solide et le support de la vitesse de l'autre point (les deux point sont liés au même solide).

- **Deuxième méthode : CIR (Triangle ou champs des vitesses) (Fig.2)**

C'est l'exploitation graphique de l'existence du CIR, sachant que : $\vec{V}_{(I_{SR} \in S/R)} = \vec{O}$ et que le mouvement de S/R à l'instant considéré est une rotation autour de I_{SR}.

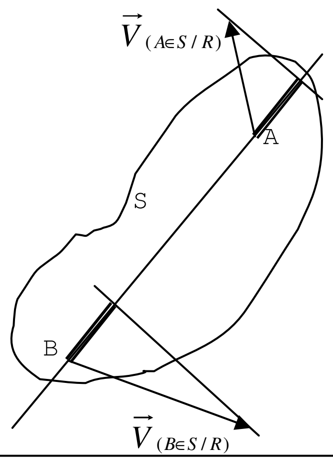
Conditions d'utilisation : On doit connaître la position du CIR et le vecteur vitesse d'un point de S/R.

- **Troisième méthode : composition (Fig.3)**

C'est l'exploitation graphique de la relation de composition des vecteurs vitesse (Même point mais des solides différents).

Conditions d'utilisation : On doit connaître, au moins, un vecteur vitesse et les supports des deux autres.

Fig.1



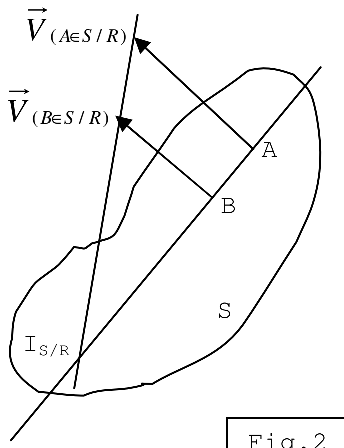


Fig.2

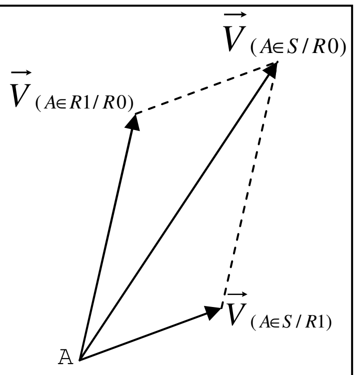


Fig.3

8. Rappels et compléments utiles

- **Engrenages :**

Rapport de réduction d'un train d'engrenages à axes fixes :

$$k = \frac{\omega_{sortie}}{\omega_{entrée}} = (-1)^n \frac{\Pi\ Z_{menantes}}{\Pi\ Z_{menées}}$$

[$(-1)^n$: valable que pour les engrenages cylindriques parallèles]

avec : n est le nombre d'engrenages cylindriques parallèles extérieurs.

Rapport de réduction d'un train épicycloidal :

$$k = \frac{\omega_{Planétaire\ de\ sortie} - \omega_{porte\ satellite}}{\omega_{planétaire\ entrée} - \omega_{porte\ satellite}} = (-1)^n \frac{\Pi\ Z_{menantes}}{\Pi\ Z_{menées}}$$

Signe du rapport de réduction k d'un engrenage conique : $(k = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{z_2}{z_1})$

Soit C_1 et C_2 les centres des deux roues 1 et 2 respectivement, et I leur point de contact.

- Si $\overrightarrow{IC_1}$ et $\overrightarrow{IC_2}$ sont de mêmes signes, alors : k est négatif ;
- Si $\overrightarrow{IC_1}$ et $\overrightarrow{IC_2}$ sont de signes différents, alors : k est positif ;

Système Vis-écrou

Soit **V** la vitesse de translation et **w** celle de rotation. **P** est le pas de l'hélice. On a la relation : $v = \pm\frac{P}{2\pi}w$

Le tableau suivant permet de décider du signe de la relation ci-dessus :

	Rotation et Translation affectées au même solide (Vis ou écrou)	Rotation et Translation partagées entre les deux solides
Hélice à droite	**+**	**−**
Hélice à gauche	**−**	**+**

Les liaisons :

	Torseur cinématique	Torseur statique
Dans l'espace	$\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix} \xrightarrow{\textbf{Réciprocité}}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$	**On ne garde que :** **- La rotation suivant la normale ;** **- Les deux translations dans le plan.** $\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\textbf{Réciprocité}}$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$

Les liaisons pour lesquelles le centre est fixe par rapport aux deux solides liés sont :

Encastrement – Sphérique – Pivot – sphérique à doigts.

(***Autrement dit, ce sont les liaisons qui n'autorisent aucune translation)***

La forme des deux torseurs est gardée en :

- Tout point de l'espace : *Encastrement, Glissière, Appui – plan*
- Tout point de l'axe : *Pivot, Pivot.glissant, Sphère – plan, hélicoidale*
- Tout point d'un plan : ***Linéaire rectiligne***
- Au centre : *Sphère – cylindre, Sphérique, Sphérique..à.doigts*

Loi (Entrée-Sortie) d'un mécanisme :

La Loi entrée-sortie (loi E/S) d'un mécanisme est ensemble des relations entre ses paramètres de sortie et celle d'entrée.

Quelques démarches permettant de déterminer la loi E/S :

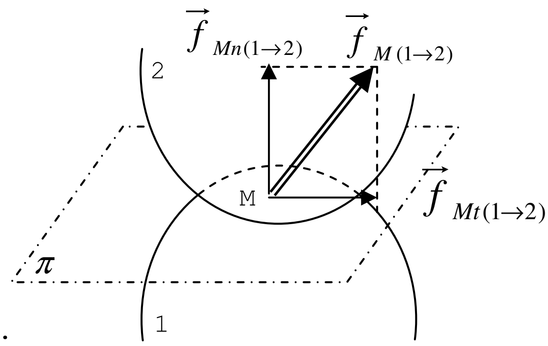
- ✓ *Fermeture cinématique ;*
- ✓ *Fermeture géométrique ;*
- ✓ *Absence de glissement ;*
- ✓ *Condition de maintient de contact cinématique : vitesse de glissement contenue dans le plan tangent commun ;*
- ✓ *Condition de maintient de contact statique : effort normal positif.*

STATIQUE DES SOLIDES

1. Modélisation des actions mécaniques de contact surfacique :

1.1. Modélisation locale :

Soient deux solide **1** et **2** en contact suivant une surface (S). L'action mécanique de **1** sur **2** est représentée en chaque point M de (S) par : le vecteur **densité surfacique de contact** $\vec{f}_{M(1\to2)}$.



Considérons le plan tangent commun π à **1** et **2** contenant le point M. On peut écrire :

$$\vec{f}_{M(1\to2)} = \vec{f}_{Mn(1\to2)} + \vec{f}_{Mt(1\to2)}$$

$\vec{f}_{Mn(1\to2)}$: **Densité surfacique normale** ou pression de contact ($\perp$ à π) ;

$\vec{f}_{Mt(1\to2)}$: **Densité tangentielle** (Contenu dans π).

1.2. Lois de coulomb :

1[er] cas : frottement $\vec{V}_{(M\in2/1)} \neq \vec{0}$

$$\vec{f}_{Mt(1\to2)} \wedge \vec{V}_{(M\in2/1)} = \vec{0}$$

$$\vec{f}_{Mt(1\to2)} \cdot \vec{V}_{(M\in2/1)} < 0$$

$$\left\|\vec{f}_{Mt(1\to2)}\right\| = k\left\|\vec{f}_{Mn(1\to2)}\right\|$$

K : coefficient de frottement

2[ème] cas : Adhérence $\vec{V}_{(M\in2/1)} = \vec{0}$

$$\left\|\vec{f}_{Mt(1\to2)}\right\| < k\left\|\vec{f}_{Mn(1\to2)}\right\|$$

A la limite de glissement (ou équilibre strict) on applique les lois de coulomb relatives au frottement.

1.3. Modélisation globale :

L'action mécanique de **1** sur **2** peut être représentée globalement par le torseur : $\{\tau_{(1\to2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(S1\to2)} \\ \vec{M}_{(A,1\to2)} \end{Bmatrix}_A$

tel que : $\vec{R}_{(1\to2)} = \iint_S \vec{f}_{M(1\to2)}.ds$ et $\vec{M}_{(A,1\to2)} = \iint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_{M(1\to2)}.ds$

Remarque :
Les relations précédentes restent toutes valables dans le cas d'un contact linéique entre 1 et 2, à condition de substituer :

La surface de contact (S) par la ligne de contact (L) ;

L'élément de surface ds par l'élément de longueur dL ;

La densité surfacique par la densité linéique.

2. Action mécanique de contact ponctuel :

2.1. Modélisation :

Soient deux solides **1** et **2** en contact ponctuel en un point A. L'action mécanique de **1** sur **2** peut être modélisée par un torseur :

$\{\tau_{(1\to2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to2)} \\ \vec{M}_{(A,1\to2)} \end{Bmatrix}_A$ avec : $\vec{R}_{(1\to2)} = \vec{N} + \vec{T}$ et $\vec{M}_{(A,1\to2)} = \vec{M}n + \vec{M}_t$

$\vec{N}$: $\perp$ à π : **Effort normal** . $\vec{T}$: contenu dans π : **Effort tangentiel** ;

$\overrightarrow{Mn}$: $\perp$ à π : **moment de pivotement.** $\overrightarrow{M_t}$: contenu dans π :**moment de roulement.**

2.2. Lois analogues aux lois de Coulomb :

Glissement	Pivotement	Roulement
1^er^ cas : $\overrightarrow{V}_{(A\in 2/1)} \neq \vec{0}$	1^er^ cas : $\overrightarrow{\Omega}_{n\,(2/1)} \neq \vec{0}$	1^er^ cas : $\overrightarrow{\Omega}_{t\cdot(2/1)} \neq \vec{0}$
$\overrightarrow{V}_{(A\in 2/1)} \wedge \overrightarrow{T} = \vec{0}$	$\overrightarrow{\Omega}_{n\,(2/1)} \wedge \overrightarrow{M_n} = \vec{0}$	$\overrightarrow{\Omega}_{t\cdot(2/1)} \wedge \overrightarrow{M_t} = \vec{0}$
$\overrightarrow{V}_{(A\in 2/1)} \cdot \overrightarrow{T} < \vec{0}$	$\overrightarrow{\Omega}_{n\,(2/1)} \cdot \overrightarrow{M_n} < \vec{0}$	$\overrightarrow{\Omega}_{t\cdot(2/1)} \cdot \overrightarrow{M_t} < \vec{0}$
$\Vert\overrightarrow{T}\Vert = k \cdot \Vert\overrightarrow{N}\Vert$	$\Vert\overrightarrow{M_n}\Vert = \mu \vert\overrightarrow{N}\vert$	$\Vert\overrightarrow{M_t}\Vert = \eta \vert\overrightarrow{N}\vert$
2^ème^ cas : $\overrightarrow{V}_{(A\in 2/1)} = \vec{0}$	μ : Paramètre de résistance au pivotement;	η : Paramètre de résistance au roulement;
$\Vert\overrightarrow{T}\Vert < k \cdot \Vert\overrightarrow{N}\Vert$	2^ème^ cas : $\overrightarrow{\Omega}_{n\,(2/1)} = \vec{0}$	2^ème^ cas : $\overrightarrow{\Omega}_{t\,(2/1)} = \vec{0}$
	$\Vert\overrightarrow{M_n}\Vert < \mu \vert\overrightarrow{N}\vert$	$\Vert\overrightarrow{M_t}\Vert < \eta \vert\overrightarrow{N}\vert$

3. Principe fondamental de la statique :

3.1. Enoncé :

Un système matériel Σ est en équilibre par rapport à un repère Galiléen si et seulement si le torseur des actions mécaniques extérieures est nul.

$$\left\{\tau_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma)}\right\} = \{0\}$$

3.2. Théorèmes généraux de la statique :

Théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{R}_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma)} = \vec{0}$

Théorème du moment statique : $\overrightarrow{M}_{A\,(\bar{\Sigma}\to\Sigma)} = \vec{0}$ (A : point quelconque).

3.3. Cas particuliers : Equilibre sous l'action de forces

Nota :

On appelle force toute action mécaniques représentable par un torseur glisseur

Le point de la surface (ou ligne) de contact où le moment est nul est appelé : ***Centre de poussée.***

Equilibre sous l'action de deux forces :

Si le système matériel est en équilibre sous l'action de deux forces alors elles sont directement opposées :

Même support ; Même module ; sens opposés.

Equilibre sous l'action de 3 forces :

Si le système matériel est en équilibre sous l'action de 3 forces alors :

- Elles sont coplanaires ;
- Leurs supports sont parallèles ou concourants en un point;
- La somme vectorielle des trois vecteurs forces est nulle (Triangle fermé).

CHAINES DE SOLIDES
MOBILITE ET HYPERSATISME

Pour la PCSI – PSI

h

Liaisons en //

Etude statique

$\{\tau_{Leq}\} = \Sigma\{\tau_{Li}\}$ (I)

h = Ns – rs (ce sont les inconnues statiques indéterminées)

Formule de mobilité : mc – h = Nc – 6γ

C'est le nombre de ddl de Leq

$N_L - N_P + 1$

Intuitivement

Etude statique (I)

Etude cinématique : $\{\upsilon_{Leq}\} = \{\upsilon_{Li}\}$

Liaisons en série

h = 0
mc = Nc

Pour Leq

Intuitivement

Etude statique : $\{\tau_{Leq}\} = \{\tau_{Li}\}$

Etude cinématique : $\{\upsilon_{Leq}\} = \Sigma\{\upsilon_{Li}\}$

Cycle ou Chaîne complexe

Etude statique : on applique le PFS à chaque solide sauf le bâti : h = Ns – rs

Formule de mobilité : mc – h = Nc – 6γ

Fermetures cinématiques

mcu + mci

C'est le nombre de mouvement d'entrée

C'est le nombre de mouvement qui subsistent quand on fixe les mouvements d'entrée

<u>**Nota**</u> : ***dans le cas d'un mécanisme plan, la formule de mobilité devient :***

mc – h = Nc – 3γ

Pour déterminer mc et Nc, on ne comptabilise que les translations dans le plan et les rotations normales au plan.

<u>**Légende**</u> :

- Ns : nombre total des inconnues statiques ;
- Nc : nombre total des inconnues cinématiques ;
- N_L : nombre de liaisons ;
- N_p : nombre de solides ;
- γ : nombre cyclomatique ;
- h : degrés d'hperstaticité ;
- mc : mobilité cinématique ;
- mcu : mobilité cinématique utile ;
- mci : mobilité cinématique interne ;
- ddl : degrés de liberté.

Pour la MPSI-MP

m_C

Liaisons en //

C'est le nombre de ddl de Leq

- Intuitivement
- Etude statique $\{\tau_{Leq}\} = \Sigma\{\tau_{Li}\}$ (I)
- Etude cinématique : $\{\upsilon_{Leq}\} = \{\upsilon_{Li}\}$

Liaisons en série

C'est Nc

Pour Leq

- Intuitivement
- Etude statique : $\{\tau_{Leq}\} = \{\tau_{Li}\}$
- Etude cinématique : $\{\upsilon_{Leq}\} = \Sigma\{\upsilon_{Li}\}$

Cycle ou Chaîne complexe

- Fermetures cinématiques
- mcu + mci
  - C'est le nombre de mouvement d'entrée
  - C'est le nombre de mouvement qui subsistent quand on fixe les mouvements d'entrée et de sortie

<u>Légende</u> :

Nc : nombre total des inconnues cinématiques ;
N_L : nombre de liaisons ;
N_p : nombre de solides ;
γ : nombre cyclomatique ;
mc : mobilité cinématique ;
mcu : mobilité cinématique utile ;
mci : mobilité cinématique interne ;
ddl : degrés de liberté.

DYNAMIQUE DES SOLIDES

1. CINETIQUE :

1.4. Centre de gravité d'un système matériel Σ:

- ***Définition*** : C'est le point G / $\int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$
- ***Propriétés :*** **–** G ∈ à l'élément de symétrie de Σ ;
  - Soit $\Sigma = \bigcup_1^n S_i$ (S_i solide de masse m_i et de centre de gravité G_i) et

    A point quelconque : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\sum_1^n m_i \overrightarrow{AG_i}}{\sum_1^n m_i}$

  - $\vec{V}_{(G/R)} = \dfrac{\sum_1^n m_i \vec{V}_{(Gi/R)}}{\sum_1^n m_i}$ et $\vec{\Gamma}_{(G/R)} = \dfrac{\sum_1^n m_i \vec{\Gamma}_{(Gi/R)}}{\sum_1^n m_i}$

- ***Théorèmes de GULDIN*** :

– **Premier Théorème** : La surface engendrée par la rotation d'une courbe plane et homogène, autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est le produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité : **S = 2Π R_G L.**

– **Deuxième théorème** : Le volume engendré par la rotation d'une surface plane et homogène, autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est le produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité : **V = 2Π R_G S.**

1.5. Matrice d'inertie d'un solide S en un point Q : (voir aussi page 12)

- ***Définitions***

$$\bar{\bar{I}}_{(Q,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ Telle que :

$A = \int_{P\in S} (y^2+z^2)dm$; $B = \int_{P\in S} (x^2+z^2)dm$; $C = \int_{P\in S} (x^2+y^2)dm$; $D = \int_{P\in S} yzdm$;

$E = \int_{P\in S} xzdm$ et $F = \int_{P\in S} xydm$. Sachant que : $\overrightarrow{QP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

A, B et C sont des moments d'inertie ; D, E et F sont des produits d'inertie. (En $Kg.m^2$)

- ***Pour un système matériel Σ :*** Soit $\Sigma = \bigcup_1^n S_i$ alors : $\bar{\bar{I}}_{(Q,\Sigma)} = \sum_1^n \bar{\bar{I}}_{(Q,Si)}$

- ***Effet de la symétrie matérielle sur la forme de la matrice d'inertie :***
  - **S possède un plan de symétrie matérielle** : L'axe ⊥ à ce plan est API (Axe Principal d'Inertie) ;
  - **S est une plaque plane** : L'axe ⊥ au à son plan est API, et le moment d'inertie autour de cet axe est la somme des deux autres moments d'inertie ;
  - **S possède un axe de révolution** : La matrice d'inertie est diagonale et les moments d'inertie autour des deux autres axes sont identiques.

- ***Théorème d'HYGHENS*** :

Soit un solide S de masse m et de centre d'inertie G. Q point quelconque :

$$\overline{\overline{I}}_{(Q,S)} = \overline{\overline{I}}_{(G,S)} + \overline{\overline{I}}_{(Q,\{ms,G\})} \quad \text{, tel que : } \overline{\overline{I}}_{(Q,\{ms,G\})} = m\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+b^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec : $\overrightarrow{QG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

- ***Moment d'inertie d'un solide S par rapport à un axe (Q, $\vec{\delta}$)*** :

$$J_{(S/(Q,\vec{\delta}))} = \vec{\delta}.\overline{\overline{I}}_{(Q,S)}.\vec{\delta}$$

1.6. Torseur cinétique d'un système matériel Σ / repère R :

- ***Définition :***

$$\{C_{(\Sigma/R)}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_C \\ \vec{\sigma}_{(Q,\Sigma/R)} \end{matrix} \right\}_Q \quad \text{avec : } \vec{R}_C = \int_{P\in\Sigma} \vec{V}_{(P/R)}.dm \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_{(Q,\Sigma/R)} = \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{QP} \wedge \vec{V}_{(P/R)}.dm$$

- ***Expressions pratiques :***

$\vec{R}_C = m_\Sigma.\vec{V}_{(G\Sigma/R)}$ et, **pour un solide**, $\vec{\sigma}_{(Q,S/R)} = \overline{\overline{I}}_{(Q,S)}.\vec{\Omega}_{(S/R)} + m.\overrightarrow{QG} \wedge \vec{V}_{(Q\in S/R)}$

Nota : Pour un système matériel $\Sigma = \bigcup_1^n S_i$: $\vec{\sigma}_{(Q,\Sigma/R)} = \sum_1^n \vec{\sigma}_{(Q,Si/R)}$

1.7. Torseur dynamique d'un système matériel Σ / repère R :

- ***Définition :***

$$\{D_{(\Sigma/R)}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_d \\ \vec{\delta}_{(Q,\Sigma/R)} \end{matrix} \right\}_Q \quad \text{avec : } \vec{R}_d = \int_{P\in\Sigma} \vec{\Gamma}_{(P/R)}.dm \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_{(Q,\Sigma/R)} = \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{QP} \wedge \vec{\Gamma}_{(P/R)}.dm$$

- ***Expressions pratiques :***

$$\vec{R}_d = m_\Sigma.\vec{\Gamma}_{(G\Sigma/R)} \quad \text{et,} \quad \vec{\delta}_{(Q,\Sigma/R)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{(Q,\Sigma/R)}}{dt}\right]_R + m_\Sigma.\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(G\Sigma/R)}$$

1.8. Energie cinétique d'un système matériel Σ / repère R :

- ***Définition :***

$$T_{(\Sigma/R)} = \frac{1}{2}\int_{P\in\Sigma} \vec{V}^2_{(P/R)}.dm$$

- ***Expression pratique :***

- Pour un solide S : $T_{(\Sigma/R)} = \frac{1}{2}\{V_{(S/R)}\} \otimes \{C_{(S/R)}\}$

- Pour un système matériel $\Sigma = \bigcup_1^n S_i$: $T_{(\Sigma/R)} = \sum_1^n T_{(Si/R)} = \sum_1^n \frac{1}{2}\{V_{(Si/R)}\} \otimes \{C_{(Si/R)}\}$

2. P.F.D :

2.1 Enoncé:

$\{D_{(\Sigma/Rg)}\} = \{\tau_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma)}\}$ Rg : repère galiléen

2.2 Thérèmes généraux de la Dynamique (T.G.D):

- ***Théorème de la résultante Dynamique T.R.D*** : $m_\Sigma \vec{\Gamma}_{(G\Sigma/Rg)} = \vec{R}_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma)}$

- ***Théorème du Moment Dynamique T.M.D*** : $\forall Q$ point : $\vec{\delta}_{(Q,\Sigma/R)} = \vec{M}_{(Q,\bar{\Sigma}\to\Sigma)}$

2.3 Equation de mouvement :

C'est toute équation issue des T.G.D, ne contenant aucune composante inconnue d'action mécanique (Si l'équation de mouvement est de premier ordre alors, elle sera appelée : **Equation intégrale première de mouvement**).

3. ENERGETIQUE :

3.1 Puissance d'action mécanique extérieure :

La puissance développé par l'action mécanique du système matériel Σ_1 sur le système matériel Σ_2, dans le mouvement de Σ_2 par rapport au repère R, est :

$$P_{(\Sigma 1 \to \Sigma 2/R)} = \int_{M \in \Sigma 2} \vec{V}_{(P/R)} . \vec{f}_{M(\Sigma 1 \to \Sigma 2)} . dm$$

Avec : $\vec{f}_{M(\Sigma 1 \to \Sigma 2)}$ est la densité massique de l'action mécanique de Σ_1 sur Σ_2.

- **Expression pratique : si** Σ_2 est un solide S alors :

$$P_{(\Sigma 1 \to S/R)} = \{V_{(S/R)}\} \otimes \{\tau_{(\Sigma 1 \to S)}\}$$

3.2 Puissance d'inter efforts entre Σ1 et Σ2 :

$$P_{(\Sigma 1 \leftrightarrow \Sigma 2)} = P_{(\Sigma 1 \to \Sigma 2/R)} + P_{(\Sigma 2 \to \Sigma 1/R)}$$

- **Propriété** : cette puissance est indépendante du repère R.
- **Pour deux solides S1 et S2** :

$$P_{(S1 \leftrightarrow S2)} = P_{(S1 \to S2/S1)} = P_{(S1 \to S2/S1)}$$

- **Définition d'une liaison parfaite** : la liaison L_{S1-S2} est parfaite si et seulement si : $P_{(S1 \xleftrightarrow{L} S2)} = 0$.

3.3 Energie potentielle :

- **Associée à une action mécanique extérieure** :

C'est le scalaire $V_{(\Sigma 1 \to \Sigma 2/R)}$ tel que : $P_{(\Sigma 1 \to \Sigma 2/R)} = -\dfrac{dV_{(\Sigma 1 \to \Sigma 2/R)}}{dt}$

Exemple : $V_{(\text{pesanteur} \to \Sigma/R)} = -m_\Sigma \vec{g} . \overrightarrow{OG_\Sigma}$ avec O est un point de R.

- **Associée à des inter efforts** :

C'est le scalaire $V_{(\Sigma 1 \leftrightarrow \Sigma 2)}$ tel que : $P_{(\Sigma 1 \leftrightarrow \Sigma 2)} = -\dfrac{dV_{(\Sigma 1 \leftrightarrow \Sigma 2)}}{dt}$

Exemples : $V_{(\Sigma 1 \xleftrightarrow{\text{Ressort de traction}} \Sigma 2)} = \dfrac{1}{2} k . \Delta L^2$ avec K est la raideur du ressort.

$V_{(\Sigma 1 \xleftrightarrow{\text{Ressort de torsion}} \Sigma 2)} = \dfrac{1}{2} c . \Delta \theta^2$ avec c est la raideur du ressort.

3.4 Théorème de l'Energie Cinétique (T.E.C) :

- **Pour un solide S** : $\dfrac{dT_{(S/Rg)}}{dt} = P_{(\bar{S} \to S/Rg)}$
- **Pour un ensemble de solides** $\Sigma = \bigcup_{1}^{n} S_i$: $\dfrac{dT_{(\Sigma/Rg)}}{dt} = P_{(\bar{\Sigma} \to \Sigma/Rg)} + P_{\text{int}}$

Avec : P_{int} est la puissance de tous les inter-efforts entre les solides de Σ.

3.5 Rendement η d'un mécanisme :

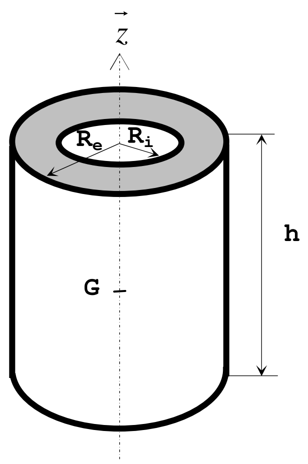
C'est le rapport de la puissance à la sortie P_s du mécanisme par la puissance à son entrée P_e.

La puissance perdue (Puissance intérieure du mécanisme) est :

$$P_{\text{int}} = P_e (\eta - 1)$$

Matrices d'inertie des solides usuels

Cylindre creux



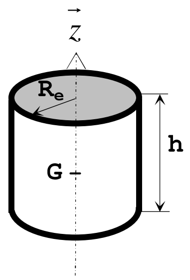
$$\overline{\overline{I}}_{(G,\,cylindre\ creux)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-,-,\vec z)}$$

$$A = m\left(\frac{R_e^{\,2} + R_i^{\,2}}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$$

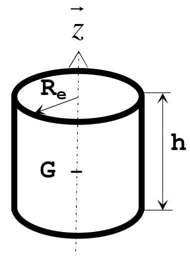
$$C = m\,\frac{R_e^{\,2} + R_i^{\,2}}{2}$$

m : masse ;
G : centre de gravité.

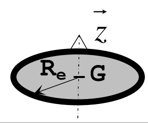
$R_i = 0$ → **Cylindre plein**



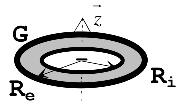
$R_i = R_e$ → **Surface cylindrique**



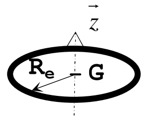
$h = R_i = 0$ → **Disque plein**



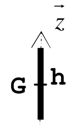
$h = 0$ → **Disque creux**



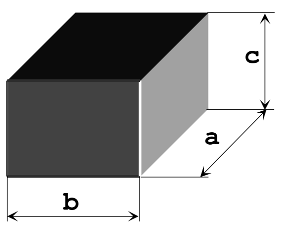
$h = 0$ et $R_i = R_e$ → **Cerceau circulaire**

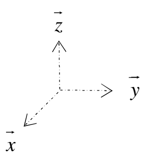


$R_i = R_e = 0$ → **Tige rectiligne**



Parallélépipède rectangle

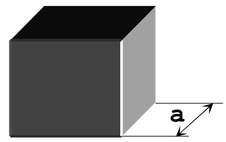




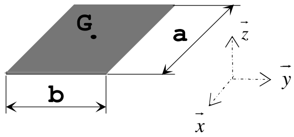
$$\overline{\overline{I}}_{(G,\,Paral.\,\mathrm{Rect.})} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}_{(\vec x,\vec y,\vec z)}$$

m : masse ; G : centre de gravité

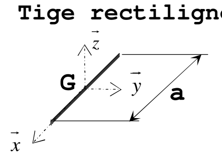
$a = b = c$ → **Cube**



$c = 0$ → **Surface rectangulaire**



$b = c = 0$ → **Tige rectiligne**



AUTOMATIQUE

Systèmes Combinatoires

1. Généralités :

1.1. Variable logique :

C'est une grandeur qui ne peut prendre que 2 états possibles (Vraie ou Faux).
On associe à ces deux états le nombre 0 ou 1.

1.2. Fonction logique :

Elle est représentée par des groupes de variables logiques reliées entre elles par des opérateurs logiques, et qui ne peut prendre que deux valeurs 0 ou 1.

2. Algèbre de BOOLE :

2.1. Opérateurs logiques de base :

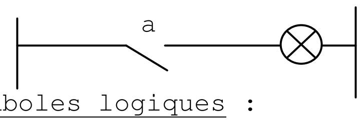
> ***Convention*** *:*
> *Interrupteur non actionné : 0*
> *Interrupteur actionné : 1*

- *Opérateur EGALITE ou* ***OUI*** : $F_{(a)} = a$

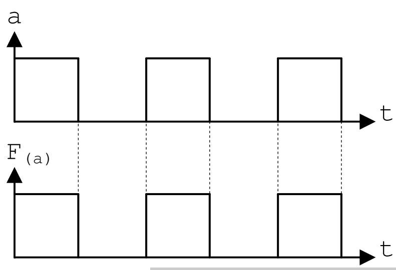
Table de vérité :

a	$F_{(a)}$
0	0
1	1

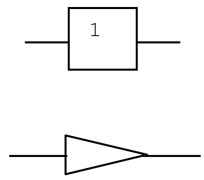
Schéma électrique à contacts :



Chronogramme :



Symboles logiques :

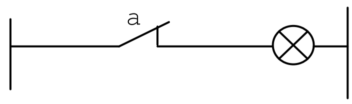


- *Opérateur COMPLEMENT ou NON : $F(a) = \overline{a}$*

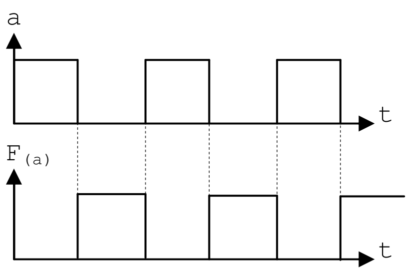
Table de vérité :

a	$F_{(a)}$
0	1
1	0

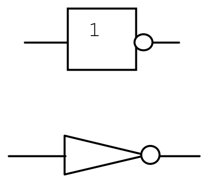
Schéma électrique à contacts :



Chronogramme :



Symboles logiques :

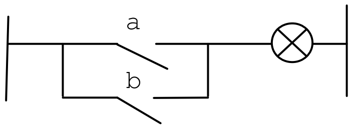


- Opérateur ADDITION ou OU : $F(a,b) = a + b$

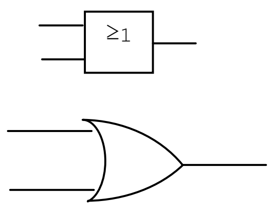
Table de vérité :

a	b	$F_{(a,b)}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Schéma électrique à contacts :



Symboles logiques :

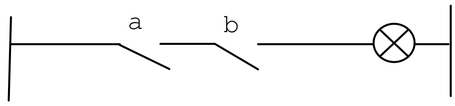


- Opérateur PRODUIT ou ET : F(a,b) = a . b

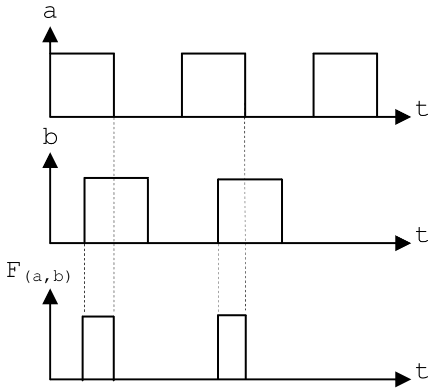
Table de vérité :

a	b	$F_{(a,b)}$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

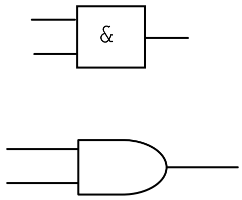
Schéma électrique à contacts :



Chronogramme :



Symboles logiques :

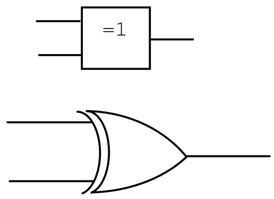


Complément : Opérateur OU EXCLUSIF : F(a,b) = a $\oplus$ b

Table de vérité :

a	b	$F_{(a,b)}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Symboles logiques :



Remarques :

. a $\oplus$ b=1 si a≠b ;

. a $\oplus$ b= $\bar{a}.b + a.\bar{b}$;

. $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ = e (bit de parité)
e est 1 si le nombre de 1 dans la combinaison $a_1a_2 \ldots a_n$ est **impair**

2.2. Théorème de DEMORGAN :

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}$$

2.3. Relations fondamentales de l'algèbre de BOOLE :

	Somme	Produit
Commutativité	a+b = b+a	a.b = b.a
Associativité	a+b+c = a+(b+c)	a.b.c = a.(b.c)
Distributivité	a+b.c = (a+b).(a+c)	a.(b+c)= a.b + a.c
Elément neutre	a+0 = a	a.1 = a
Complémentation	$\bar{a}$ + a = 1	$\bar{a}$ .a = 0
Idempotence	a+a = a	a.a = a
Absorption d'un terme	a+a.b = a	a.(a+b) = a
Multiple de complément	a+ $\bar{a}$ .b = a+b	a.($\bar{a}$ +b) = a.b
Elément absorbant	a+1 = 1	a.0 = 0
Double complémentation	$\bar{\bar{a}}$ = a	

3. Simplification des équations :

3.1.1. Méthode algébrique :

- Principe :

Cette méthode consiste à appliquer les relations de l'algèbre de BOOLE.

*3.1.2. <u>Méthode graphique</u> (*tableau de KARNAUGH) *:*

- Pour une fonction à n variables, le tableau de KARNAUGH contient 2^n cases.D'une case à la suivante une seule variable change à la fois.
- Porter la valeur de la fonction à l'intérieur de chaque case.
- Faire les regroupements des 1 (Ou des 0).

- ***<u>Conseils</u>*** :
  - ◊ On ne peut regrouper qu'un nombre de cases correspondant à une puissance de 2 ;
  - ◊ Rechercher les regroupements maxi ;
  - ◊ Rechercher les regroupements en commençant par les cases qui ne peuvent être regroupées que d'une seule manière ;
  - ◊ Minimiser le nombre des regroupements.

4. Systèmes combinatoires :

4.1. Définition :

On appelle système combinatoire, tout système pour lequel les variables logiques de sortie ne dépendent que des variables logiques d'entrée.

4.2. Méthode de résolution d'un système combinatoire :

Trois étapes sont nécessaires :

- Identifier les variables d'entrée et de sortie ;
- Dresser la table de vérité ;
- Simplifier les équations.

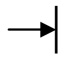
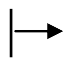
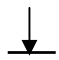
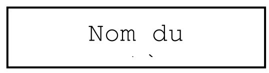
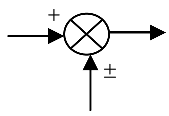
Asservissements linéaires continus invariants

A - DEFINITION :

Un système est dit asservi lorsqu'une grandeur de sortie (Action) suit aussi précisément que possible les variations de la grandeur d'entrée (Consigne ou Ordre), quelque soient les effets perturbateurs extérieurs.

B - Outils d'analyse :

B-1. Diagramme fonctionnel - Schéma bloc :

Elément	Schématisation
Entrée	
Sortie	
Perturbation	
Système ou processus physique	
Sommateur ou comparateur	

B-2. Transformée de Laplace :

Définition :

A toute fonction du temps $f_{(t)}$ nulle pour t < 0, on fait correspondre une fonction $F_{(P)}$ qu'on appelle : Transformée de Laplace de $f_{(t)}$, telle que :

$$F_{(P)} = L\left[f_{(t)}\right] = \int_0^{+\infty} f_{(t)}.e^{-pt}.dt$$

Propriétés de la transformée de Laplace :

- ***Superposition linéaire*** :

$$\lambda \, et \, \mu \;\; constantes \;\; réelles, \; f_{(t)} \, et \; g_{(t)} \; fonctions : L\left[\lambda f_{(t)} + \mu \, g_{(t)}\right] = \lambda \, F_{(p)} + \mu \, G_{(p)}$$

- ***Dérivation :***

$L\left[f'_{(t)}\right] = pF_{(p)} - f_{(0^+)}$ *Avec des conditions initiales nulles* : $L\left[\dfrac{df^n(t)}{dt^n}\right] = p^n F_{(p)}$

- ***Intégration :***

Avec des conditions initiales nulles : $L\left[\int^n f_{(t)} dt^n\right] = \dfrac{F_{(p)}}{p^n}$

❖ ***Théorème de la valeur initiale et finale :***

$$f_{(0^+)} = \lim_{p\to\infty} pF_{(p)} \qquad \text{et} \qquad f_{(\infty)} = \lim_{p\to 0} pF_{(p)}$$

❖ ***Théorème du retard :***

Soit $g_{(t)} = f_{(t-T)}$ *alors* $G_{(P)} = e^{-pT} F_{(p)}$

Transformées de Laplace des signaux usuels :

$$L\left[\delta_{(t)}\right] = 1 \ \S \ L\left[u_{(t)}\right] = \frac{1}{p} \ \S \ L\left[t\ u_{(t)}\right] = \frac{1}{p^2} \ \S \ L\left[t^2\ u_{(t)}\right] = \frac{1}{p^3} \ \S \ L\left[e^{-a\,t}\ u_{(t)}\right] = \frac{1}{p+a} \ \S$$

$$L\left[\sin\ (\omega\, t)\ u_{(t)}\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \ \S \ L\left[\cos\ (\omega\, t)\ u_{(t)}\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

B-3. Fonction de transfert :

Définition :

La fonction de transfert F.T (ou Transmittance) d'un système linéaire continu est le rapport de sa sortie sur son entrée en transformée de Laplace avec des conditions initiales nulles.

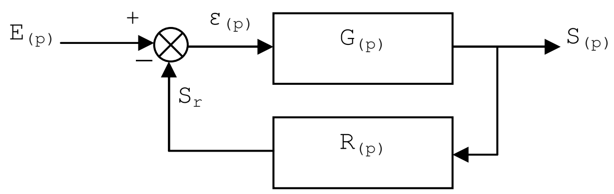
Forme canonique et Caractéristiques d'une fonction de transfert :

Forme canonique : $$H_{(p)} = k.\frac{1}{p^{\alpha}}.\frac{1+a_1 p + a_2 p^2 + \ldots}{1+b_1 p + b_2 p^2 + \ldots}$$

- ***Ordre*** : c'est le degré de son dénominateur ;
- ***Classe*** α : c'est le nombre de pôles nuls à l'origine ;
- ***Gain*** : $k = \lim_{p\to 0} p^{\alpha} H_{(p)}$

B-4. Relations fondamentales des systèmes bouclés :

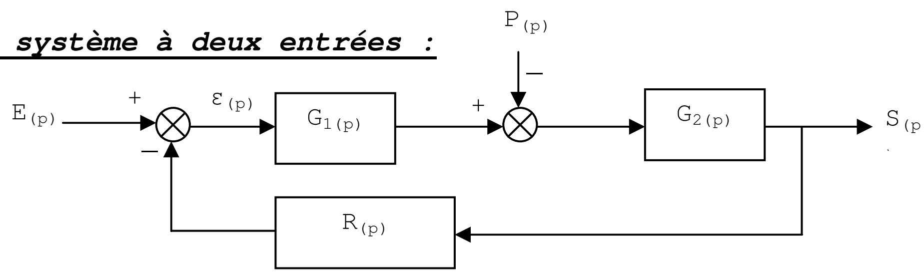
Schéma bloc minimal (forme canonique) :



- FTCD : $G_{(p)}$; FTCR : $R_{(p)}$; FTBO : $H_{BO(p)} = \frac{S_r}{\varepsilon}(p) = (FTCD).(FTCR)$
- FTBF : $H_{BF(p)} = \frac{S}{E}(p) = \frac{FTCD}{1+FTBO}$

Pour un système à retour unitaire : $R_{(p)} = 1$ $\qquad H_{BF(p)} = \frac{FTBO}{1+FTBO}$

Cas de système à deux entrées :



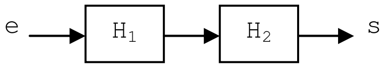
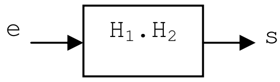
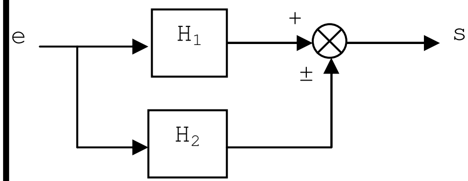
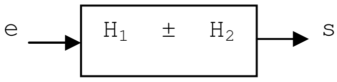
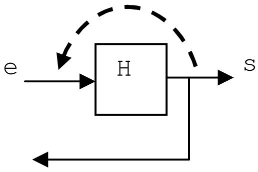
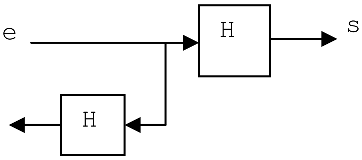
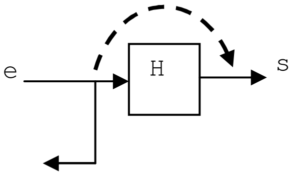
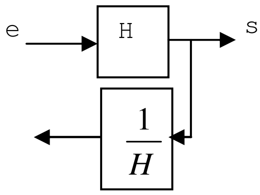
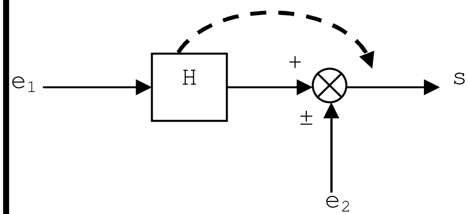
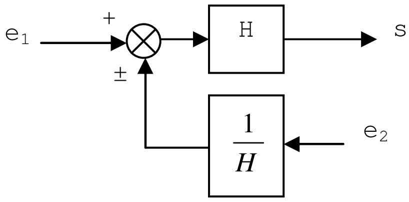
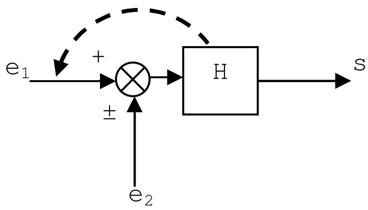
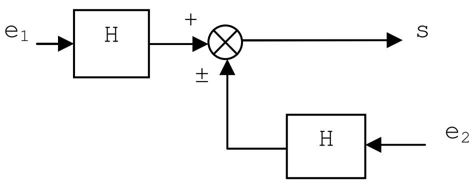
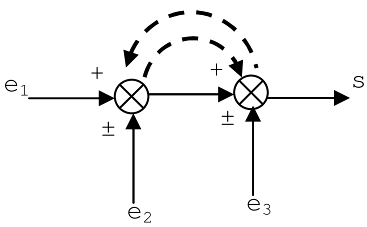
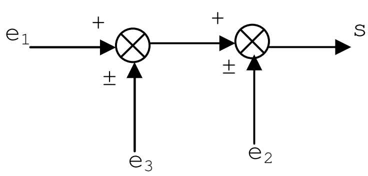
$$S_{(p)} = H_{1(p)} . E_{(p)} - H_{2(p)} . P_{(p)}$$

Avec : $H_{1(p)} = \dfrac{G_1.G_2}{1 + G_1.G_2.R}$ (Fonction de transfert vis-à-vis de la consigne)

$H_{2(p)} = \dfrac{G_2}{1 + G_1.G_2.R}$ (Fonction de transfert vis-à-vis de la perturbation)

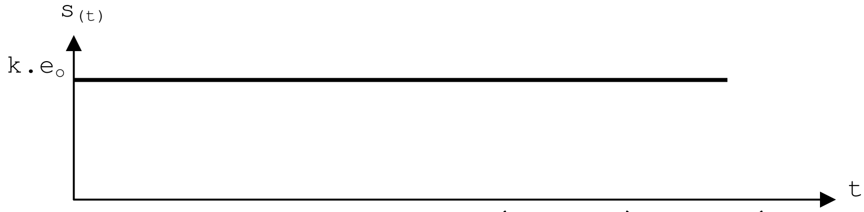
La fonction de transfert en boucle ouverte est : $H_{BO(p)} = G_1.G_2.R$

Théorèmes de transformation usuels :

Théorème	Schéma initial	Schéma transformé
Association d'éléments en série		
Association d'éléments en parallèle		
Déplacement de point de dérivation en amont d'un élément		
Déplacement de point de dérivation en aval d'un élément		
Déplacement d'un élément en aval d'un comparateur		
Déplacement d'un élément en amont d'un comparateur		
Permutation de deux comparateurs		

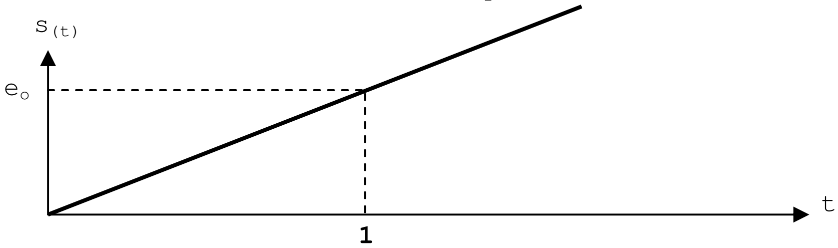
B-5. Réponses indicielles des systèmes élémentaires :

Amplificateur : $H_{(p)} = k$

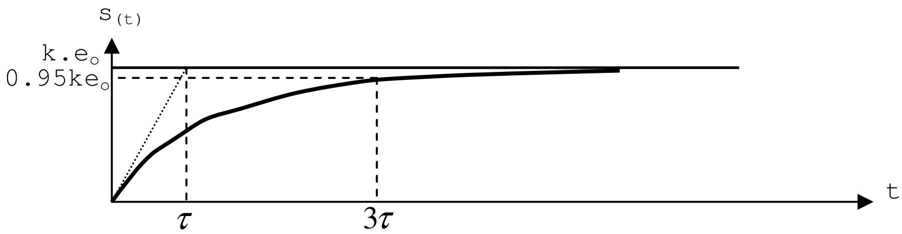


e_0 : amplitude de l'échelon à l'entrée.

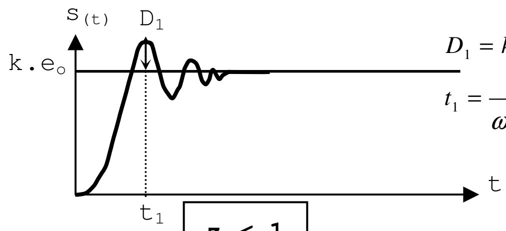
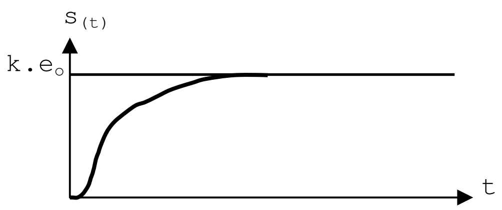
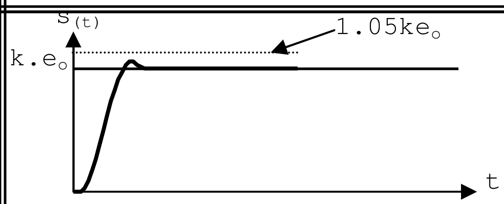
Intégrateur de premier ordre : $H_{(p)} = \dfrac{1}{p}$



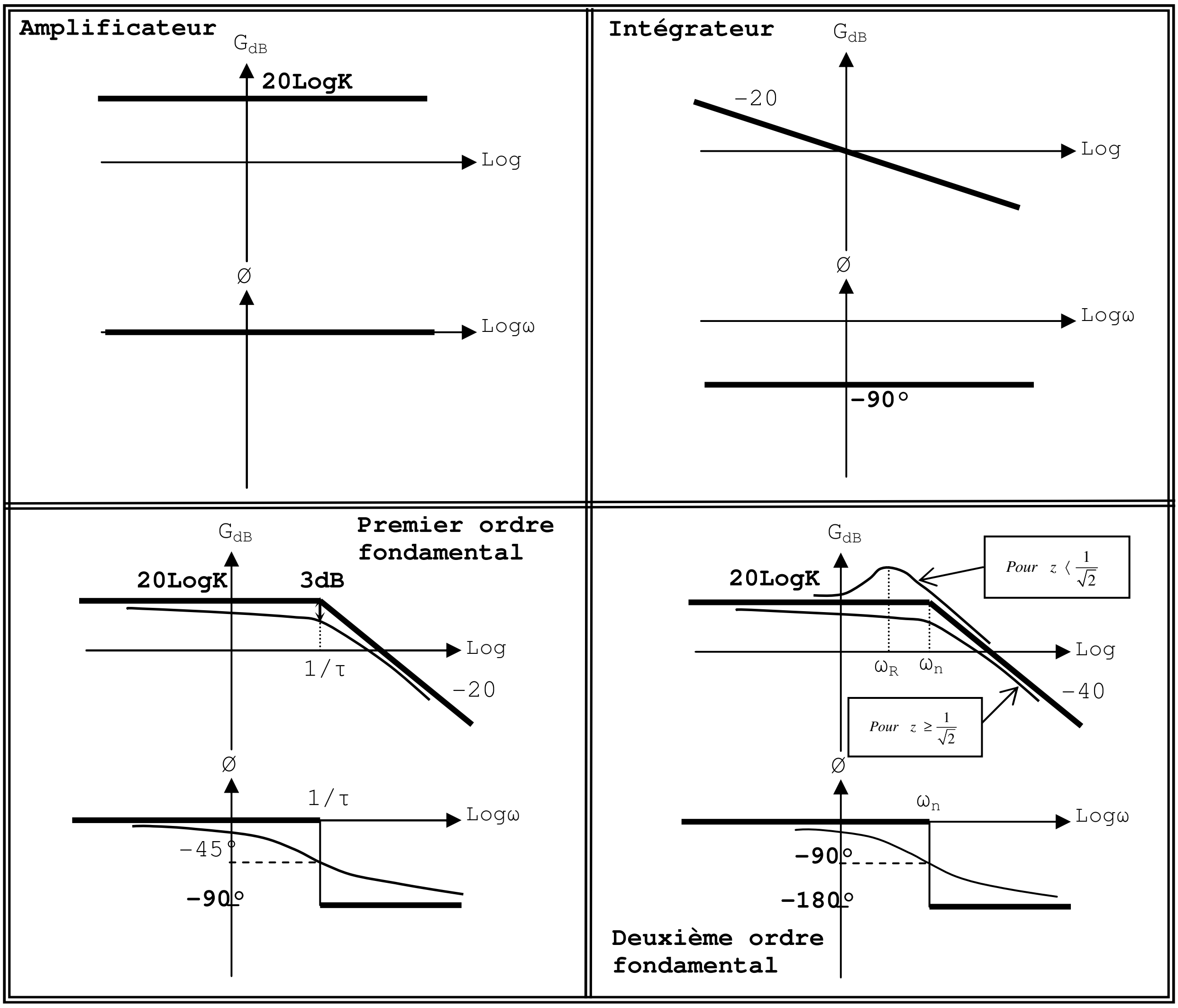
Premier ordre fondamental : $H_{(p)} = \dfrac{k}{1+\tau p}$



Deuxième ordre fondamental : $H_{(p)} = \dfrac{k}{1+\dfrac{2z}{\omega n}\,p + \dfrac{p^2}{\omega n^2}}$

 **z > 1**	 $D_1 = k.e_0 e^{\frac{-\pi Z}{\sqrt{1-z^2}}}$ $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega n\sqrt{1-z^2}}$ **z < 1**
 **z = 1 : système rapide et sans dépassements**	 **z = $\frac{1}{\sqrt{2}}$: système, absolument, le plus rapide**

B-6. Diagrammes de Bode des systèmes élémentaires :



Notion de pôle dominant :

$$H_{(p)} = \frac{k}{(1 + T_1.p).(1 + T_2.p)}$$

Si T_1 est très supérieure devant T_2, alors H(p) peut être assimilée à un premier ordre fondamental de la forme : $H_{(p)} = \dfrac{k}{1 + T_1.p}$.

C – Performances d'un système asservi :

C-1. Rapidité :

Elle est caractérisée par $T_{5\%}$, ou par la largeur de bande passante.
Un système est d'autant **plus rapide** que son $T_{5\%}$ est faible ou que sa bande passante est large.

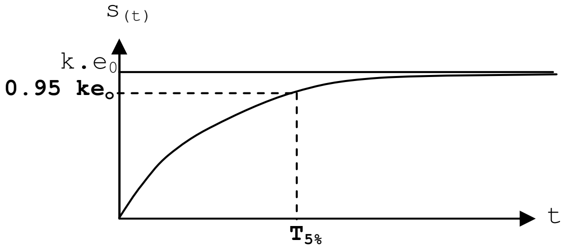
Remarques :

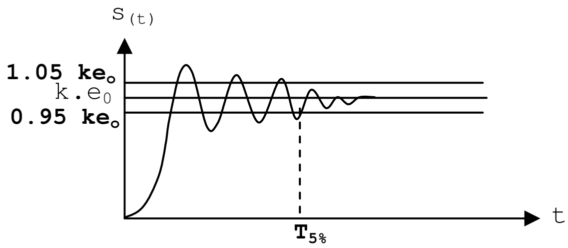
- Un système de premier ordre fondamental est rapide quand sa constante de temps τ est faible ;

- Un système de deuxième ordre fondamental est rapide quand sa pulsation propre ω_n est grande (pour z fixé).

Méthodes de détermination graphique de $T_{5\%}$:

- Par la définition : $T_{5\%}$ est tel que $\forall\, t \geq T_{5\%}\ :\ 0.95\ s_{(\infty)} \leq s_{(t)} \leq 1.05\ s_{(\infty)}$
- *Par la réponse indicielle* :





- *Par l'abaque* ***$T_{5\%}.\omega_n = f(z)$*** : (**Pour un deuxième ordre fondamental**)
- ***$T_{5\%} = 3\tau$*** : (**pour un premier ordre fondamental**)

C-2. Précision :

La précision est caractérisée par le signal d'erreur $\varepsilon_{(t)}$.

Un système est d'autant plus précis que son signal d'erreur est faible.

On se limitera à l'étude de la **précision statique**, définie par : $\varepsilon_s = \lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon_{(t)}$

On appelle :

- *Erreur de position (ou indicielle)* : erreur statique pour une entrée échelon ;
- Erreur de traînage (de poursuite ou de vitesse) : erreur statique pour une entrée rampe.

Erreur statique pour l'entrée principale :

Nombre d'intégrations en BO / Entrée	$\alpha_{BO} = 0$	$\alpha_{BO} = 1$	$\alpha_{BO} = 2$
Echelon : $e_0.\ u_{(t)}$	$\dfrac{e_o}{1 + k_{BO}}$	0	0
Rampe : $e_0.t.u_{(t)}$	∞	$\dfrac{e_o}{k_{BO}}$	0

Erreur pour une entrée perturbation en échelon (ou rampe) :

Cette erreur statique serait nulle (donc l'asservissement serait insensible à la perturbation), s'il existe au moins une (ou deux) intégration en amont du point d'injection de la perturbation.

C-3. Stabilité :

Définitions :

Définition: un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

Condition de stabilité :

Un système est stable ssi tous les poles de sa FTBF sont à parties réelles strictement négatives.

- **Remarques** :

  Remarque 1 : tout système de premier ordre ou de deuxième ordre fondamental est stable.

  Remarque 2 : si un système asservi est stable pour la consigne alors il l'est pour la perturbation.(Ses deux FTBF ont le même dénominateur).

Critères de stabilité :

Critère de ROUTH :

Nota : on appellera équation caractéristique d'un système asservi, le dénominateur de sa F.T.B.F égalé à zéro.

- **Enoncé du critère de ROUTH** :

Première condition (nécessaire mais pas suffisante) :
Tous les coefficients de l'équation caractéristique doivent être du même signe.

Deuxième condition :
Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont strictement positifs.

- **Construction du tableau de ROUTH** :

$$D_{(p)} = B_m p^m + B_{m-1} p^{m-1} + B_{m-2} p^{m-2} + \ldots + B_1 p + B_0$$

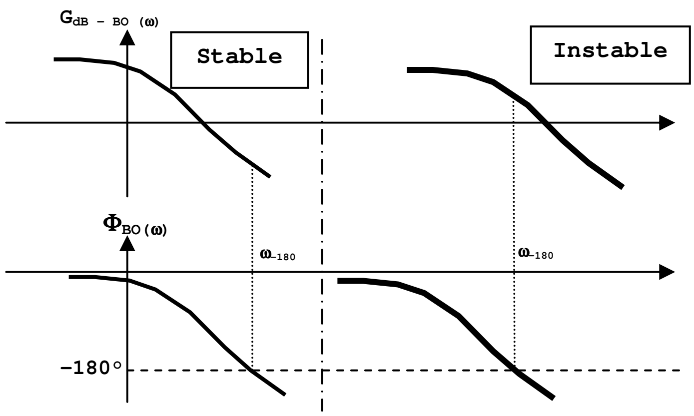
p^m	B_m	B_{m-2}	B_{m-4}	...
p^{m-1}	B_{m-1}	B_{m-3}	B_{m-5}	...
p^{m-2}	C_{m-2}	C_{m-4}	C_{m-6}	...
p^{m-3}	D_{m-3}	D_{m-5}	D_{m-7}	...
.				
.				
.				
p^1				
1				

Colonne des pivots

avec: $C_{m-2} = -\dfrac{1}{B_{m-1}}\begin{vmatrix} B_m & B_{m-2} \\ B_{m-1} & B_{m-3} \end{vmatrix}$; $C_{m-4} = -\dfrac{1}{B_{m-1}}\begin{vmatrix} B_m & B_{m-4} \\ B_{m-1} & B_{m-5} \end{vmatrix}$

Critère du revers dans le plan de Bode :

Un S.A est stable en boucle ouverte, si à la pulsation ω_{-180} pour laquelle la phase en boucle ouverte est de $-180°$, le gain en décibels en BO est < 0 .



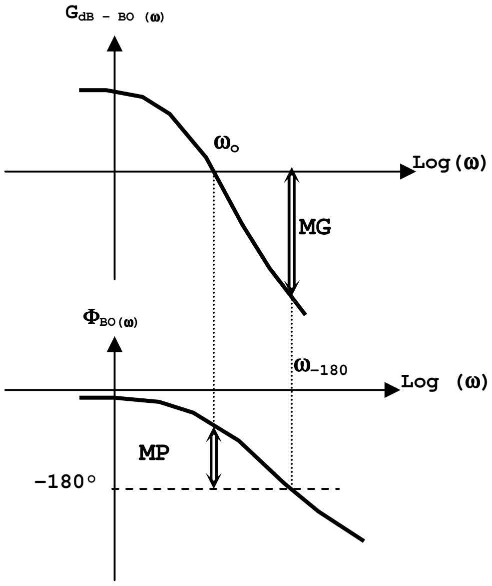
Marges de stabilité :

- **Détermination analytique des marges de stabilité :**

La marge de phase MP est définie à la pulsation ω_0, pour laquelle $20Log\lvert H_{BO(j\omega o)}\rvert = 0$ dB, par : $\mathbf{MP = 180° + Arg\ H_{BO(j\omega o)}}$.

La marge de gain MG est définie à la pulsation ω_{-180}, pour laquelle Arg $H_{BO(j\omega-180)} = -180°$, par : $\mathbf{MG = -\ 20Log\lvert H_{BO(j\omega-180)}\rvert}$.

- **Détermination graphique des marges de stabilité :**



D- Correcteurs :

Correcteur Proportionnel (P) : $c_{(p)} = b \rangle 1$

Toute augmentation du gain en BO provoque une :

- Amélioration de la rapidité et de la précision de l'asservissement ;
- Détérioration de sa stabilité et de son amortissement.

Correcteur Intégrateur (I) : $c_{(p)} = k/p$

L'augmenation de la classe en BO provoque une nette amélioration de la rapidité et de la précisionn de l'asservissement, mais son effet pour la stabilité est néfaste.

Correcteur proportionnel-intégrateur (P.I): $c_{(p)} = k.(1 + \frac{1}{\tau p}) = \frac{k}{\tau}\ \frac{1+\tau p}{p}$

Ce correcteur permet d'améliorer la précision et la rapidité de l'asservisemnt sans gêner sa stabilité.

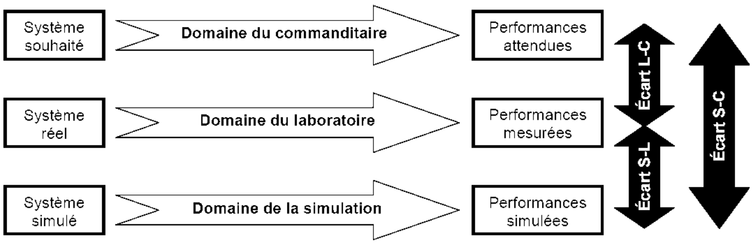
Correcteur à avance de phase : $C(p) = K\ \frac{1+T\ \ p}{1+\ a\ \ T\ \ p}$ $\quad avec:\ 0<\ a<1$

Ce correcteur permet de satisfaire aux exigences de la marge de phase.

Langage SysML

1. Introduction :

L'ensemble du processus industriel va faire naître des écarts qui sont:



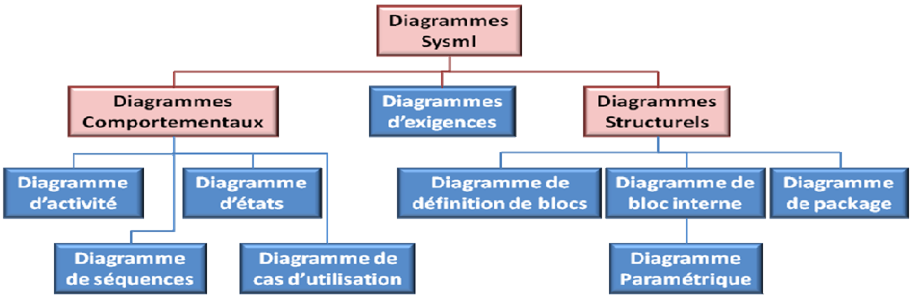
Le principal problème de l'ingénierie systèmes est de faire en sorte que les écarts entre les performances du produit réel et celles du produit souhaité par le client soient **minimums** ?

2. Langage SysML

- **Utilité**

C'est un langage modélisation permettant de décrire tout ou partie d'un système technique. SysML est aussi un outil de communication.

3. Diagrammes SysML



4. Indicateurs des diagrammes au programme des CPGE

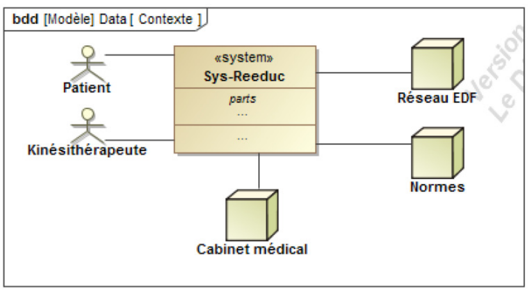
uc: diagramme des cas d'utilisation	**Stm** : diagramme (machine) d'état
req : diagramme des exigences	**bdd :** diagramme de définition des blocs
sd: diagramme de séquence	**ibd :** diagramme des blocs internes
par : diagramme paramétrique	

5. Principales relations utilisées et leurs significations

Relation	Désignation	Signification
A ——> B	Association	**A utilise B**
- - - - - - - - - ->	Dépendance	**A dépend de B**
——◇	Agrégation	**A** entre dans la composition de **B** sans être indispensable à son fonctionnement
——◆	Composition	**A** entre dans la composition de **B** et lui est indispensable
——▷	Généralisation	**A est une sorte de B**
——⊕	Contenance	**B contient A**

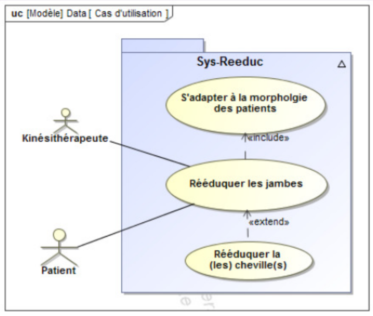
6. Diagramme de contexte

Permet de définir les frontières de l'étude.
Répond à la question : « *Quels sont les acteurs et éléments environnants du système ?* ».



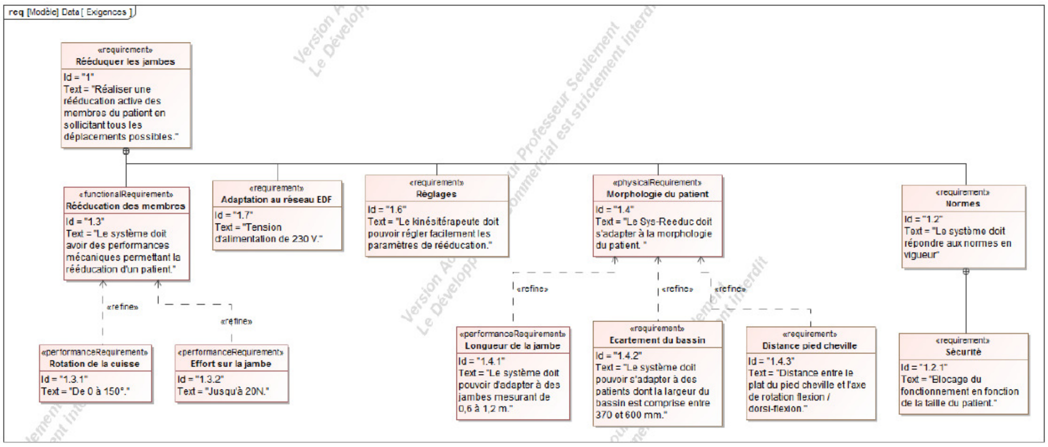
7. Diagramme des cas d'utilisation (uc)

C'est un diagramme fonctionnel qui montre les fonctionnalités offertes par le système.
Il répond à la question : « *Quels services rend le système aux différents acteurs ?* ».



8. Diagramme des exigences (req)

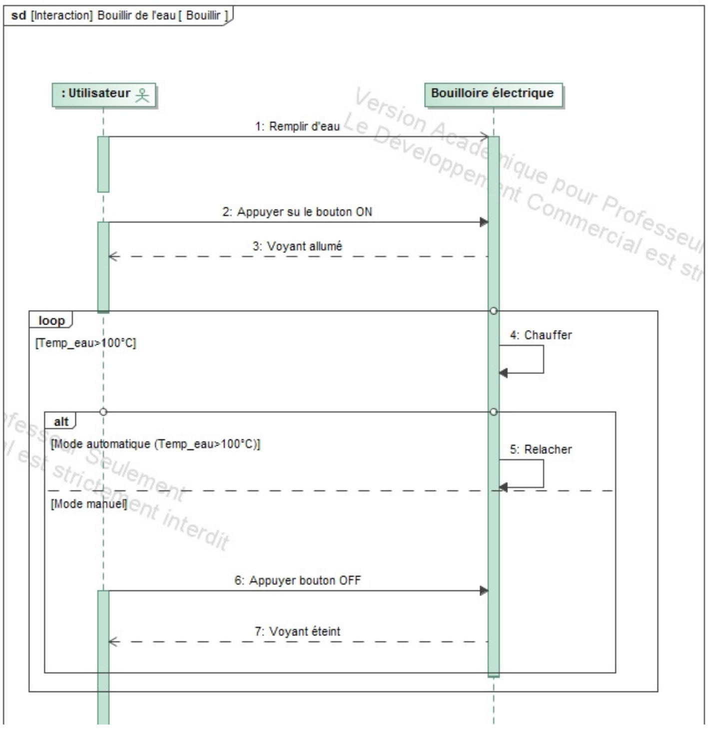
C'est un diagramme qui décrit les exigences du cahier des charges fonctionnel.
Il répond à la question : « *Quels sont les contraintes et fonctionnalités du système ?* »



9. Diagramme de séquence (sd)

C'est un diagramme dynamique qui représente les échanges de messages entre
Les signaux ou messages peuvent être de trois catégories :

Signal	Signification	Symbole
Synchrone	l'expéditeur attend une réponse	
Asynchrone	l'expéditeur n'attend pas réponse	
Réflexif	interaction interne	

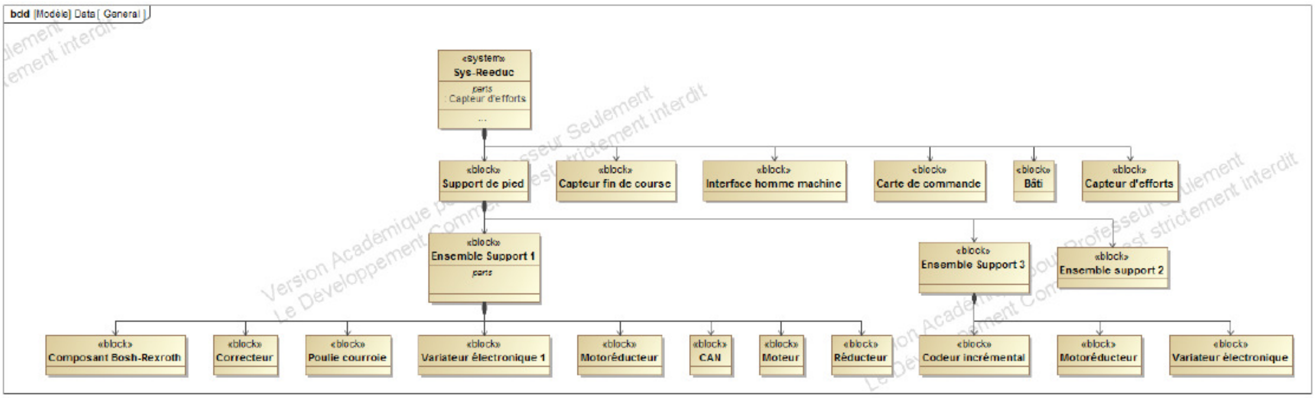


Principaux opérateurs :

- ***Loop*** : boucle. Le fragment peut s'exécuter plusieurs fois, et la condition de garde explicitel'itération ;
- ***opt*** : optionnel. Le fragment ne s'exécute que si la condition fournie est vraie ;
- ***alt*** : fragments alternatifs. Seul le fragment possédant la condition vraie s'exécutera.
- ***par*** : fragments parallèles. S'exécutent simultanément ;
- ***break*** : la séquence en cours s'interrompt si la condition précisée est vraie.

10. Diagramme de définition des blocs (bdd)

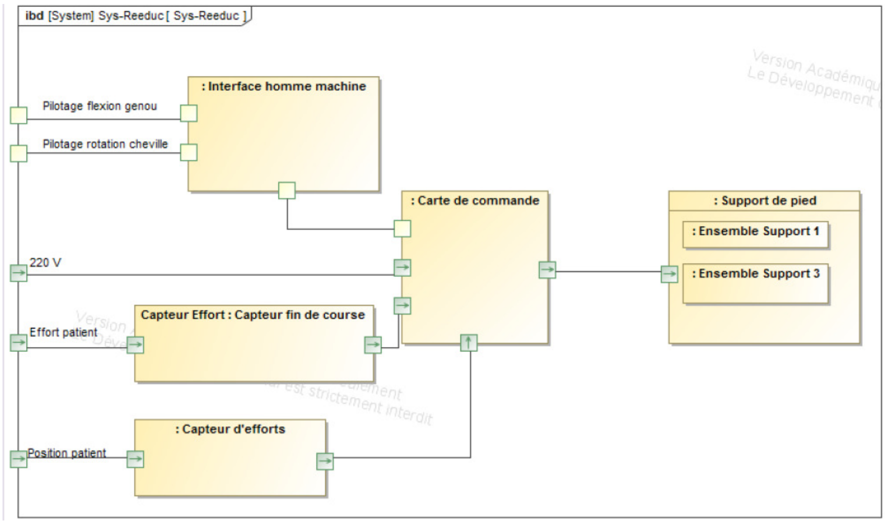
Décrit la hiérarchie du système et les classifications système/composant. Il répond à la question « *qui contient quoi ?* »



11. Diagramme des blocs internes (ibd)

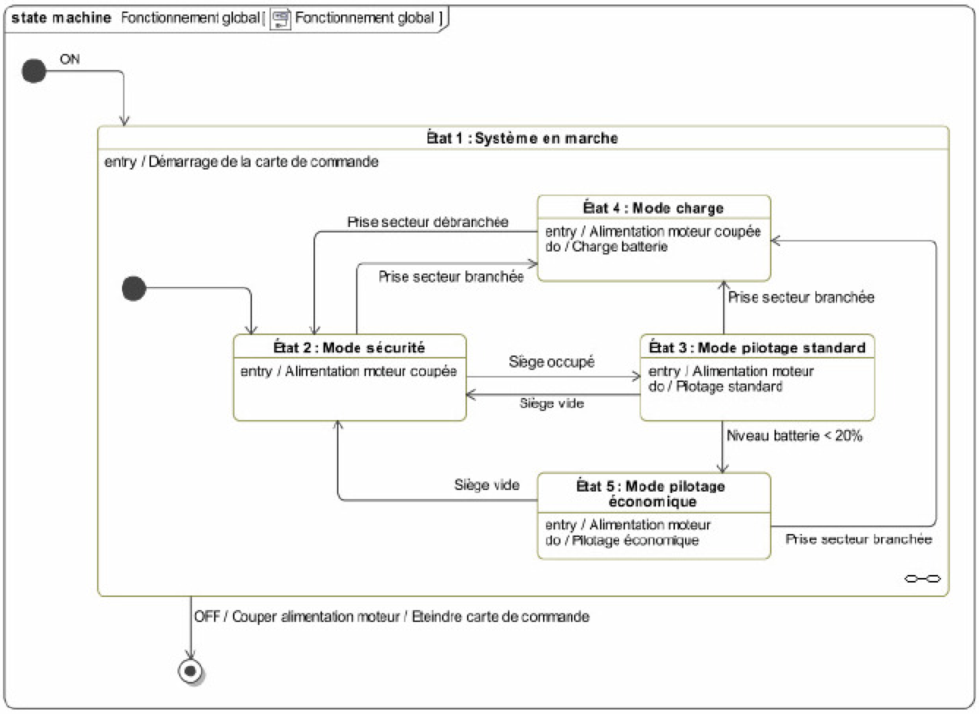
Le diagramme **ibd** permet de représenter les échanges de matière, information et énergie entre les éléments (parts) d'un même bloc.

Les ports sont les points d'interaction offerts et requis entre les blocs.



12. Diagramme d'état (stm)

Sert à décrire le fonctionnement d'un système (ou sous-système) en montrant les différents **états** successifs qu'il prend, en fonction des interactions. Le diagramme d'état répond à la question : « *Comment représenter les différents états du système ?* »



13. Diagramme paramétrique (par)

Le diagramme paramétrique permet d'intégrer dans le modèle des représentations de contraintes ou d'équations.