Exercice 1 :

1)Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants

a) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ b) $u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}$ c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ d) $u_n = e - (1+\frac{1}{n})^n$

2) Nature de la série de terme général

1) $\ln\left(\frac{n^2+ n +1}{n^2+ n -1}\right)$ 2) $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ 3) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ 4) $\frac{1}{\ln(n)\ \ln(\operatorname{ch} n)}$

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général (u_n) dans les cas suivants :

a) $u_n = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}}$ b) $u_n = \cos^n(\frac{1}{n^\alpha})(\alpha > 0)$ c) $u_n = (\frac{1}{n})^{1+\frac{1}{n}}$

d) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ e) $u_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$ f) $u_n = \tan(\pi(7+4\sqrt{3})^n)$

g) $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}$ $(a > 0)$ h) $u_n = \frac{1!+2!+...+n!}{(n+p)!}$ $(p \in \mathbb{N})$

Exercice 3

1) Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge.

Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2$ 2. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n}$ 3. $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, a_{2n}$ 4. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

2) Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série réelle.

a. On suppose $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ à termes positifs. Montrer que si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

b. On ne suppose plus $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ à termes positifs. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ n'implique pas la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2$

Exercice 4 :

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1/n \text{ si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 5 :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les series suivantes sont aussi convergentes

$\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$

Exercice 6 : Un calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel non nul $n, \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} \left(at^2 + bt\right)\cos(nt)\, dt$.

2) Montrer que $\forall t \in]0,\pi]$, $\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

3) En utilisant le lemme de **Lebesgue,** déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 7 : Séries de Bertrand.

Soient α et β deux réels. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n^{\alpha} ln^{\beta} n}$.

1) **Deux exemples :** montrer que la série de terme général $\frac{\ln n}{n^2}$,$n \geq 1$, converge et que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$, $n \geq 2$, diverge.

2) Montrer que si $\alpha < 0$, la série de terme général u_n diverge grossièrement.

3) Montrer que si $0 \leq \alpha < 1$, la série de terme général u_n diverge.

4) Montrer que si $\alpha > 1$, la série de terme général u_n converge.

5) Dans cette question, $\alpha = 1$.

a) Montrer que si $\beta \leq 0$, la série de terme général u_n diverge.

b) En comparant u_n à une intégrale, montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 8

1) Déterminer un équivalent de la **somme partielle** de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ lorsque $\alpha \leq 1$.

2)Déterminer un équivalent du **reste** de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$lorsque $\alpha > 1$.

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$

Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :$S_n = C - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

Exercice 9

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ 2) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$ 3) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 3n}$ 4) $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$ 6) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 7) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

8) $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$ $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ 9) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}\frac{a}{2^n}}{2^n}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 10 : (Critére de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l \in \mathbb{R}^+$
a) Montrer que si $l > 1$ alors $\sum u_n$ est divergente.
b) Montrer que si $l < 1$ alors $\sum u_n$ est convergente.
c) Observer que, lorsque $l = 1$, on ne peut rien conclure.

<u>Exercice 11 :</u>
Soit (u_n) une suite décroissante réelle.
On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
a) On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer la limite de $S_{2n} - S_n$.
b) En déduire $2n\ u_{2n} \longrightarrow 0$.
c) Conclure que $nu_n \longrightarrow 0$.

<u>Exercice 12 :</u>(Régle de Raabe -Duhamel)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.
a) On suppose qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$
Montrer que $u_n = O(v_n)$.
b) On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$.
Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.
c) On suppose cette fois-ci que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha < 1$
Montrer que la série $\sum u_n$ diverge

<u>Exercice 13 :</u>
Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :
a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ b) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ c) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ d) $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Partie I : Étude de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ikx}}{k}$

Q1) *Nature et calcul de la somme de la série* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

a) Établir la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

b) Soit $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Montrer que $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$.

ii) En déduire que $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $\left|\ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Conclure.

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel fixé dans l'intervalle $]0;2\pi[$.

Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. Simplifier la somme M_n. En déduire que $|M_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}$.

i) En remarquant que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k - M_{k-1}}{k}$, montrer que $S_n = \frac{M_n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M_k}{k(k+1)}$.

ii) Établir la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{M_k}{k(k+1)}$.

c) En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ikx}}{k}$ est convergente. Est-elle absolument convergente?

Q3) a) Soit f une fonction, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ $(a<b)$, et $\lambda > 0$. À l'aide d'une intégration par parties (à détailler), montrer qu'il existe une constante K (à préciser) telle que $\left|\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K}{\lambda}$.

b) En déduire $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;2\pi]$, on note $D_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$.

a) Montrer que D_n est continue sur $[0;\pi]$, et que $\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{ik}$.

b) Montrer que pour $t \in]0;2\pi[$, $D_n(t) = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i\frac{t}{2}}}{2i\sin(\frac{t}{2})}$.

Q5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}$.

a) Montrer que $S_n = i\int_0^x D_n(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

b) En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer $\frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = -\ln(2\sin(\frac{x}{2})) + i\frac{\pi - x}{2}$.

Q6) Que dire des séries $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos(kx)}{k}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(kx)}{k}$?