L'étude des circuits linéaire en régime transitoire

Objet:

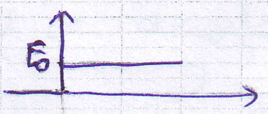
Il s'agit ds ce chap d'étudier le comportement d'un circuit linéaire contenant des élts réactifs (bobine, condensateur) et ce juste après la fermeture du circuit càd pendant la phase transitoire.

I_ Définitions:

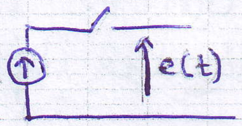
1)_ Echelon de tension:

On appelle échelon de tension, la tension $e(t)$ tq:

$$\begin{cases} e(t)=0 & \forall t<0 \\ e(t)=E_0 & \forall t\geq 0 \end{cases}$$



pratiquement, on peut le réaliser par

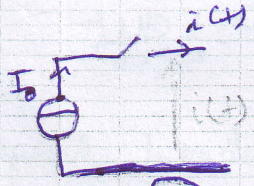


à $t<0$ K ouvert

à $t\geq 0$ K fermé.

2)_ Echelon de courant

C'est le courant $i(t)$ tq $\begin{cases} i(t)=0 & \forall t<0 \\ i(t)=I_0 & \forall t\geq 0 \end{cases}$ on le réalise ainsi



3) Ordre d'un circuit

On a vu qu'un circuit est dit linéaire lorsqu'il obéit à une équation dif linéaire, l'ordre du circuit est l'ordre de dérivation le plus élevé qui apparaît ds l'éq dif.

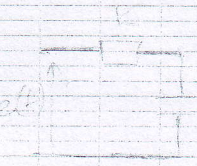
On traitera uniquement les circuits d'ordre 1 et d'ordre 2.

II_ Etude des circuits linéaires d'ordre 1.

1)_ Circuit RC.

a- cas de la charge :

On considère le circuit suivant



* éq dif du circuit :

à $t \geq 0$ $\quad e(t) = E_0$

$$\boxed{\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{RC} = \frac{E_0}{RC}}$$ le circuit est de de 1^{er} ordre.

$$\left[\frac{dU_c}{dt}\right] = \frac{[dU_c]}{[dt]} = \frac{V}{s}$$

$$\left[\frac{U_c}{RC}\right] = \frac{V}{[RC]} = \frac{V}{s} \Rightarrow [RC] = s$$

on pose $RC = \tau$ la cte de temps du circuit

$$\Rightarrow \frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

* résolution de l'éq dif

$$U_c(t) = U_{cg} + U_{cp}$$

$$\frac{dU_{cg}}{dt} + \frac{U_{cg}}{\tau} = 0 \Rightarrow U_{cg} = Ae^{-\alpha t}$$

$$U_{cp} = K_{cte} = E_0$$

$$U_c(t) = Ae^{-\alpha t} + E_0$$

on remplace dans l'éq dif : $Ae^{-\alpha t}\left(-\alpha + \frac{1}{\tau}\right) = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\tau}$$

$$U_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E_0$$

La détermination de A repose sur la C° de U aux bornes du condensateur, car sinon la puissance $P = \frac{1}{2} C \frac{dU_c^2}{dt}$ $\quad U_c : 0 \to 1$, $\Delta t \to 0$ $\Rightarrow P = \infty$ absurd

$$U_c(t = 0^-) = U_c(t = 0^+)$$

si le condensateur est initialement chargé avec q_0

$$\Rightarrow U_{c_0} = \frac{q_0}{C}$$

$$A + E_0 = \frac{q_0}{C} \Rightarrow A = \left(\frac{q_0}{C} - E_0\right)$$

$$\boxed{U_c(t) = \left(\frac{q_0}{C} - E_0\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + E_0}$$

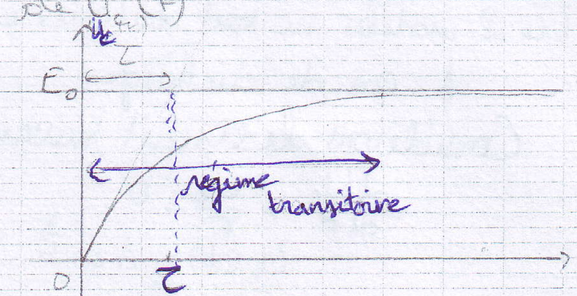
cas du condensateur initialement déchargé, $q_0 = 0$

$$U_c(t) = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

* représentation de $U_c(t)$

$\left.\frac{dU_c}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E_0}{\tau}$

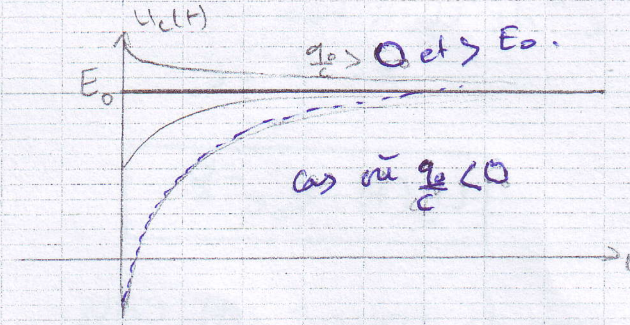
$\Delta U_c = E_0$, $\Delta t = \tau$



initialement déchargé

la pente à $t=0$

$\left.\frac{dU_c}{dt}\right|_0 = \frac{E_0 - \frac{q_0}{C}}{\tau}$



initialement chargé

pour un temps relativement grand ($t \gg \tau$), $U_c(t) \simeq$ cte, on dit qu'on est en régime permanent, pr un $t < t_0$ on dit qu'on est en régime transitoire.

Rque. La lim entre les 2 régime dépend de l'estimation désirée.

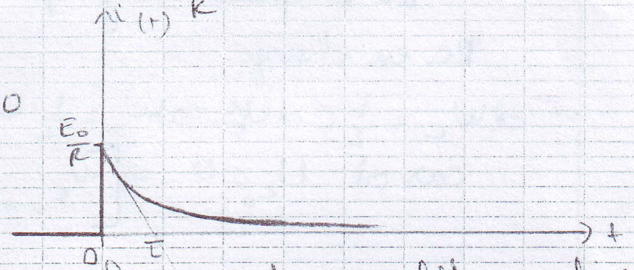
* courant dans le circuit:

$i(t) = C \frac{dU_c}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{CE_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$i(0) = 0$

$i(t=0) = \frac{E_0}{R} \neq 0$



On remarque que le courant a subit une discontinuité.

la pente à l'origine $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{E_0}{R\tau}$

Remarque: comportement limite du condensateur,

+ En régime permanent $t \to +\infty$ $i(t) = 0$

+ à $t=0$ $i(t) = \frac{E_0}{R}$ fil

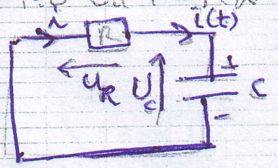
(initiall. déchargé).

+ si le cond est chargé initiall. $U_{c0} = \frac{q_0}{C}$ (parfait)

Ces 2 modèles ne sont valables qu'à $t=0$ ou $t \to +\infty$

b. Cas de décharge :

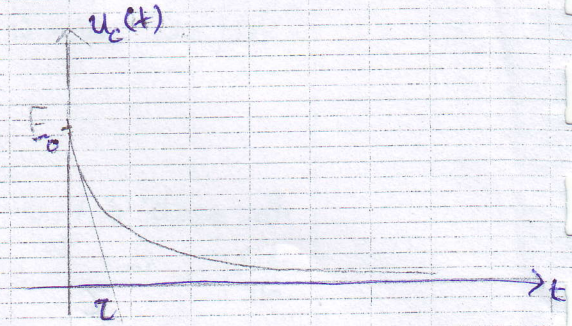
Considérons le circuit suivant



init chargé

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{\tau} = 0$$

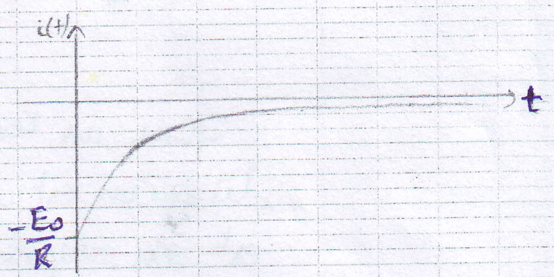
$$U_c(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$



C° de U_c à $t=0$

$$A = \frac{q_0}{C} = E_0$$

$$\boxed{U_c(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



pour le courant $i(t) = C\frac{dU_c}{dt}$

$$\boxed{i(t) = -\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

si $E_0 > 0$ $\quad i(t) < 0$

le courant réel est de sens opposé à celui choisi. Le condensa se comporte comme un générateur dc il va sortir de la borne +

c. Aspect énergétique :

RC en charge

$$dW_c = \frac{1}{2} C\, d(U_c^2) \Rightarrow W_c = \frac{1}{2} C(U_c^2(t) - U_{c_0}^2)$$

cas où $U_{c_0} = 0 \Rightarrow \left[W_{c_{0\to t}} = \frac{1}{2} C(U_c^2(t) - U_{c_0}^2) \right]$

cas où $U_{c_0} = 0 \Rightarrow W_c = \frac{1}{2} C U_c^2(t)$

$$dW_R = R i^2 dt$$

$$= \frac{E_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

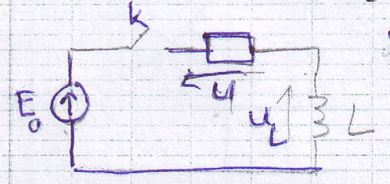
~~cas~~ $W_{R_{0\to t}} = \frac{E_0^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$

$$= \frac{CE_0^2}{2} \left(e^{-\frac{2t}{\tau}} - 1\right)$$

travail donné par le générateur

$$dW_g = U_g \cdot i \cdot dt$$

$$W_g = \frac{E_0^2}{R}\int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}}dt$$
$$= -C E_0^2 (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$$



2) Circuit RL

a- établissement du courant.

à $t=0$ K est fermé.

* éq dif

$E_0 = U + U_L$

$U_L = L\frac{di}{dt}$, $U = Ri$

$E_0 = R_0 i + L\frac{di}{dt}$

$$\left[\frac{di}{dt} + \frac{R_0}{L} i = \frac{E_0}{L}\right] \text{ ou encore } \left[\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E_0}{L}\right]$$

* Sol de l'éq dif.

$i(t) = i_G(t) + i_p(t)$

$= Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{R}$

de CI à $t=0$

cas où la bobine n'est pas parcourue initialement par un courant

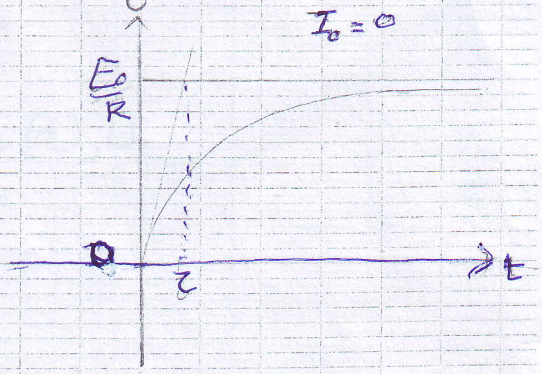
$i(0) = A + \frac{E_0}{R} = 0$

$A = -\frac{E_0}{R}$

$i(t) = -\frac{E_0}{R}(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$

si $i(0) = I_0$

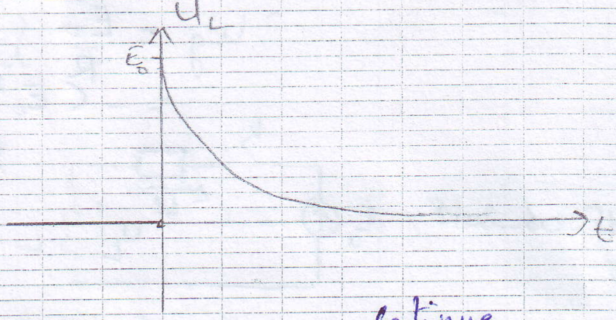
on a $\left[i(t) = (I_0 - \frac{E_0}{R})e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{R}\right]$ $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$



$$U_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$= L\frac{E_0}{\tau R}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$



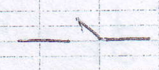
continue

On remarque que u_L n'est pas forcément C^0 en $t=0$

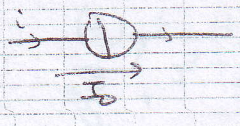
Remarque : Comportement limite de la bobine :

En régime permanent, $u_L(\infty)=0$ alors que $i_L(\infty)\neq 0$

à $t=\infty$ L = ——— fil

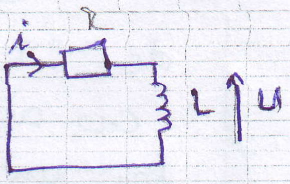
à $t=0$ $i(0^-)=0 \Rightarrow$ L = 

si $i(0)=I_0$

L = 

b- décharge :

On considère le circuit suivant



avec $I_0 = i(0)$

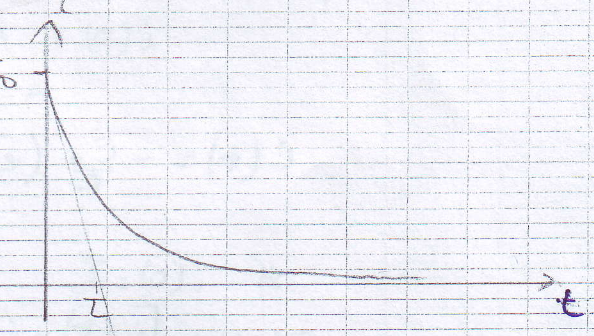
* Éq dif :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$$

* sol

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

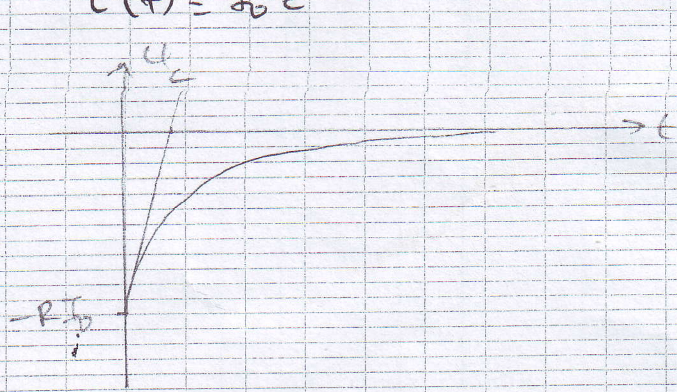
à $t=0$ $i(0) = I_0 = A$



$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$= -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



c- Aspects énergétique :

* cas de la charge (réactif)

$$W_L \Big|_0^t = \frac{1}{2} L \left(i^2(t) - i^2(0)\right) \quad \text{or } i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

c'est l'énergie électrique reçue par la bobine.

Selon $i(t) < i(0)$ ou l'inverse, l'énergie sera réellement donnée (resp reçue)

pour le résistor : (résistif)

$$dW_r = R\, i^2(t)\, dt$$

$$= R \frac{E_0^2}{R^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt$$

$$W_r = \int_0^t \frac{E_0^2}{R}\left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-2\frac{t}{\tau}}\right) dt$$

$$W_R = \frac{E_0^2}{R}\left(t - 2\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) - \frac{\tau}{2}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right)$$

pour le générateur :

$$dW_g = E_0\, i(t)\, dt$$

$$= \frac{E_0^2}{R}\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt$$

$$= \frac{E_0^2}{R}\left(t + \tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right)$$ l'énergie donnée par le générateur.

Remarque :

$$W_g = W_r + W_L \quad , \quad P_g = P_r + P_L \quad (\text{car } i(E = Ri + u_L))$$

* Cas de la décharge

$$W_R = \int_0^t R\, i^2(t)\, dt$$

$$= \frac{E_0^2}{R}\int_0^t e^{-2\frac{t}{\tau}} dt$$

$$= \frac{E_0^2}{R} \times \frac{\tau}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} L \left(\frac{E_0}{R}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) ; \quad t \to +\infty \quad W_R = \frac{1}{2} L \left(\frac{E_0}{R}\right)^2$$

$$W_L = -\frac{1}{2} L I_0^2 = -W_{L_{in}}$$